А.И. Громов, В.И. Кузьминов

МАТЕМАТИКА

**Издание четвертое,
переработанное и дополненное**

Рекомендовано
*УМО РАЕ по классическому университетскому
и техническому образованию в качестве учебного пособия
для иностранных студентов и абитуриентов,
обучающихся по программе предвузовского обучения
иностранных граждан математике на русском языке
как иностранном*

**Москва
Российский университет дружбы народов
2018**

УДК 51(075.8)
ББК 22.1-96
Г87

Утверждено
РИС Ученого совета
Российского университета
дружбы народов

Рецензенты:

заведующая кафедрой прикладной математики Оренбургского государственного университета доктор технических наук, профессор *И.П. Болодурина*;

заведующая кафедрой русского языка № 3 Российского университета дружбы народов, доктор педагогических наук, профессор *Н.М. Румянцева*

Громов, А. И.

Г87 Математика : учебное пособие. Изд. 4-е, перераб. и доп. / А. И. Громов, В. И. Кузьминов. – Москва : РУДН, 2018. – 500 с. : ил.

ISBN 978-5-209-07511-0

Пособие содержит определения, теоремы, правила и формулы, выражающие основные соотношения элементарной математики, элементы теории множеств, методы вычислений и тождественных преобразований математических выражений, методы решения и исследования основных типов уравнений и неравенств, систем уравнений и неравенств, метод координат, методы исследования основных свойств элементарных функций и построения графиков элементарных функций, основные свойства плоских и пространственных геометрических фигур.

Пособие состоит из занятий, включающих в себя тексты, упражнения и задания. Упражнения могут быть использованы как для тренировки грамматических структур русского языка на основе математического контента, так и для закрепления математических знаний. Материал пособия подобран так, чтобы преподаватель, ведущий занятия, был максимально свободен в организации разноуровневых заданий как по русскому языку, так и по математике, что позволяет организовать индивидуальный подход к обучению студентов.

По своему содержанию пособие является основой для изучения в бакалавриате следующих дисциплин: математический анализ, линейная алгебра и аналитическая геометрия, дискретная математика, теория вероятностей и математическая статистика, математическое моделирование и др.

Учебное пособие предназначено для иностранных студентов подготовительных факультетов вузов России. Тексты и упражнения адаптированы в соответствии с программой по русскому языку подготовительных факультетов для иностранных учащихся. Пособие может быть рекомендовано также для занятий с абитуриентами.

УДК 51(075.8)
ББК 22.1-96

ISBN 978-5-209-07511-0

ПРЕДИСЛОВИЕ

Пособие состоит из занятий, включающих в себя тексты, упражнения и задания. Упражнения могут быть использованы как для тренировки грамматических структур, так и для закрепления математических знаний. Грамматические структуры в пособии выделены рамкой, а математические определения обозначены словами *определение, теорема* или *утверждение*. Текст заданий адаптирован в соответствии с программой по русскому языку подготовительных факультетов для иностранных учащихся. Книга может быть использована для занятий и с российскими абитуриентами. В этом случае, учитывая современный уровень математических знаний абитуриентов, мы рекомендуем начать занятия с рубрики «тексты для повторного чтения» и соответствующих им заданий и упражнений.

Особое внимание в пособии уделено языку математики, выраженному современной знаковой системой, которая универсальна во всех профильных учебных курсах университетов.

Рубрики пособия: **текст**, **словник**, **задания**, **определение**, **теорема**, в отличие от рубрики **упражнение**, относятся в большей степени к математической части пособия. Уроки с первого до тридцать четвертого имеют **словники** на пяти языках (русском, английском, французском, испанском, немецком, китайском*), в которых дается перевод некоторых важных для данного урока слов. Пункт 6 предназначен для записи самим студентом соответствующего перевода.

Дополнительные уроки (урок первый на с. 15) в первую очередь предназначены для российских граждан, поскольку они отличаются более сложным стилем речи, одна-

* На китайском языке даны переводы в двух традициях написания в упрощенной (КНР) и в старой (Тайвань) иероглификах.

ко иностранным гражданам, владеющим в достаточной степени математическим знанием, рекомендуем чтение этих уроков для усовершенствования в русском языке. Как показывает опыт проведения занятий с иностранными гражданами, выполнение упражнений под рубрикой **правило** – выучивание их наизусть – способствует развитию артикуляции.

Материал в пособии подобран так, чтобы преподаватель, ведущий занятия, был максимально свободен в организации разноуровневых заданий как по русскому языку, так и математике.

Занятие 1.

НАТУРАЛЬНЫЕ ЧИСЛА. ЦЕЛЫЕ ЧИСЛА

Натура́льные чи́сла

0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9 – э́то ци́фры. Да́нные ци́фры составля́ют основа́ние десяти́чной систе́мы счисле́ния и испо́льзуются для за́писи чи́сел. Десяти́чная систе́ма счисле́ния явля́ется позицио́нной. Значе́ние ка́ждой ци́фры зави́сит от её пози́ции в за́писи числа́. *Например*,

555 – пятьсо́т пятьдеся́т пять
единиц́ы
деся́тки
со́тни

25 – это число́
7, 12, 65, 100 – э́то чи́сла

ци́фра, -ы (мн.ч.) 1. figure; 2. chiffre; 3. cifra; 4. Ziffer, f;
5. 數字 (数字); 6.
число́, -а (мн.ч.) 1. number; 2. nombre; 3. número;
4. Zahl, f; 5. 數 （数）; 6.
десяти́чная систе́ма счисле́ния 1. decimal system;
2. le système décimal de numération; 3. el sistema decimal de numeración: 4. das Dezimalsystem Zahlensysteme;
5. 小数系统; 6. العشـــري النظـــام
едини́цы 1.units; 2. unités 3. unidades; 4. Einheiten;
5. 单元; 6.
деся́тки 1. tens; 2. des dizaines; 3. decenas; 4. Dutzende;
5. 几十个; 6.
со́тни 1. hundres; 2. des centaines; 3. centenas;
4. Hunderter; 5. 数以百计; 6.

Упражнение 1. Вы́полните в фо́рме диало́га.
а) Образец:

Вопрос:	*Ответ*:
15 – э́то ци́фра и́ли число?	15 – э́то число́.

18, 41, 52 – э́то ци́фры и́ли чи́сла? 18, 41, 52 – э́то чи́сла.
37 – , 16 – , 2, 3, 7 –, 28 – , 19 – , 13, 40, 73 –

б) *Образец*:

9 – что э́то?	9 – э́то ци́фра.	9 – э́то число́.
7 –	7 –	7 –
5 –	5 –	5 –
81 –	81 –	81–

Упражне́ние 2. Прочита́йте.

1, 11, 10	4, 14, 40	7, 17, 70	21, 12, 120	91, 19, 190
2, 12, 20	5, 15, 50	8, 18, 80	31, 13, 130	51, 15, 150
3, 13, 30	6, 16, 60	9, 19, 90	41, 14, 140	81, 18, 180

Упражнение 3. Прослу́шайте и запиши́те ци́фрами чи́сла: во́семь, со́рок, два́дцать, два, шестна́дцать, три́дцать, девятна́дцать, сто со́рок, две́сти, сто́ два, двена́дцать.

Прочита́йте:

26 – э́то натура́льное число́.
12 – э́то натура́льное число́.
1, 2, 3, 4 – э́то натура́льные чи́сла.
$\boldsymbol{N} = \{1, 2, 3, 4, ...\}$ – э́то мно́жество натура́льных чи́сел.

натура́льн║ый; -ая, -ое, **-**ые 1. natural; 2. naturel; 3. natural; 4. natürlich; 5. 自然的 ; 6.

мно́жество, –а 1. set, aggregate; 2. ensemble; 3. conjunto, multitud; 4. Menge, f; 5. 集合 ; 6.

скобки фигу́рные 1. braces; 2. accolades, f,pl; 3. llaves, f,pl; 4. geschweifte (geschwungene) Klammern; 5. 華擴好, (花括号)；6.

обознача́ть, обозна́чить (что?) 1. denote; 2. désigner; 3. designar, denotar 4. benennen, bezeichnet werden; 5. 表示,表味,表出; 6.

$x \in N$ Чита́ется: «икс» – э́то натура́льное число́ **и́ли** «икс» принадлежи́т мно́жеству «эн».

Если x – натура́льное число́, то пи́шем: $x \in N$.
$\in$ – э́то математи́ческий знак принадле́жности.
$x \in N$ – э́то математи́ческое предложе́ние.
Чита́ется: x – элеме́нт мно́жества натура́льных чи́сел (N).

принадлежа́ть (чему?) 1. belong; 2. appartenir; 3. pertenecer; 4. enthalten, gehören; 5.屬于, 從屬于 (属于， 从属于); 6.

элеме́нт, –ы 1. element; 2. élément, m; 3.elemento, m; 4. Element, n; 5. 元, 素; 6.

предложе́ние, –я 1. proposition; 2. proposition, f; 3. proposición; 4. Úrteil, n, Satz, m; 5. 命题,語句（命题，语句）；6.

Упражнение 4. Перепиши́те и прочита́йте вслух сле́дующее математи́ческое предложе́ние и запи́шите его в си́мвольном ви́де.

Образец: 2 – э́то натура́льное число́. $2 \in N$.
0 – э́то не натура́льное число́. $0 \notin N$
50 –; 98 – ; 47 – ; 13 – ; 0 – .

Це́лые чи́сла

+ (плюс) – э́то математи́ческий знак. – (ми́нус) – э́то математи́ческий знак. = (равно́) – э́то математи́ческий знак. +, –, =, $\in$ – э́то математи́ческие зна́ки. $\{+, -, =, \in\}$ – э́то мно́жество математи́ческих зна́ков.

Чи́сла …–4, –3, –2, –1, 0, 1, 2 … составля́ют мно́жество це́лых чи́сел.

$\mathbf{Z} = \{0, \pm 1, \pm 2, \pm 3, \ldots\}$ – э́то мно́жество це́лых чи́сел.
12 – э́то це́лое число́.
–20 (ми́нус два́дцать) – э́то це́лое число́
–5, –10, 24, 15, 0 – э́то це́лые чи́сла.

це́л‖ый; –ая, ое, -ые 1. integer; 2. entier; 3. entero; 4. ganz, ganzzahlig; 5. 整的; 6.

Упражнение 5.

1. Прочита́йте: $\boldsymbol{N} = \{1, 2, 3, 4, ...\}$ – э́то мно́жество нату-ра́льных чи́сел. $\boldsymbol{Z} = \{0, \pm 1, \pm 2, \pm 3, ...\}$ – э́то мно́жество це́лых чи́сел.

2. Прочита́йте *по образцу*́: $20 \in Z$ – 20 – це́лое число́ и́ли 20 принадлежи́т мно́жеству це́лых чи́сел.

$-5 \in Z$, $13 \in N$, $0 \in Z$, $64 \in N$, $8 \in Z$, $27 \in N$, $-15 \in Z$, $-3 \notin N$, $\frac{1}{2} \notin Z$, $10 \in N$.

3. Прочита́йте текст: $N \subset Z$.

Чита́ется: ***Z*** включа́ет (соде́ржит) ***N*** и́ли мно́жество нату-ра́льных чи́сел – э́то подмно́жество мно́жества це́лых чи́сел.

включа́ть (что?) include; 2. inclure; 3. incluir; 4. angliedern; 5. 包含, 有, 嵌入，列入，（遷入）; 6.

содержа́ть (что?) 1. contain; 2. contenir; 3. conteer; 4. enthalten, einschlißen; 5. 包含,包育; 6.

подмно́жество, –а 1. subset; 2. sous–ensemble, m; 3. subconjunto, m; 4. Teilmenge ,f; 5. 子集合; 6.

8 – э́то положи́тельное число́.

–3 – э́то отрица́тельное число́.

положи́тельн║ый; -ая, **-**ое, -ые 1. positive; 2. positif; 3. positivo; 4. positiv; 5. 正的; 6.

отрица́тельн║ый; -ая, -ое, -ые 1. negative; 2. negatif; 3. negativo; 4. negativ; 5. 負的, 否定的; 6.

Упражнение 6. Чита́йте.

–6 – э́то отрица́тельное число́.

+10 – э́то положи́тельное число́.

12 – э́то положи́тельное число́.

–19, –4, –20, –12 – э́то отрица́тельные чи́сла.

11, 19, 24, 82 – э́то положи́тельные чи́сла.

9 и –9 – э́то противополо́жные чи́сла.

а и –*а* – э́то противополо́жные чи́сла.

противополо́жн║ый; -ая, -ое, -ые 1. opposite; 2. opposé; 3. opuesto; 4. entgegengesetzt; 5. 相反的; 6.

Упражнение 7. Читайте.
Образец: –3 и 3 – противополо́жные чи́сла.
–12 и 12; –19 и 19; 91 и –91; –40 и 40; –61 и 61; 23 и –23.

Выраже́ния. Математи́ческие выраже́ния

$-24 \cdot 3 + 4$ – э́то арифмети́ческое выраже́ние

выраже́ние, -ия 1. expression; 2. expression;
3. expression; 4. Ausdruck, m; 5. 表達式, 表示, 表現 ;6.
матема́тика 1. mathematics; 2. mathématiques, f, pl.;
3. matemática(s), f; 4. Mathematik, f; 5. 數學; 6.
арифме́тика 1. arithmetic; 2. arithmétique, f;
3. aritmética, f; 4. Arithmetik, f; 5. 算數 (算数）； 6.
а́лгебра 1. algebra; 2. algebre, f; 3. álgebra, f;
4. Algebra, f; 5. 代数 6.
геоме́трия 1. geometry; 2. géométrie, f; 3. geometría, f;
4. Geometrie, f; 5. 几何学； 6.

15·3. Чита́ется: 15 умно́жить на 3. 15·3 – э́то арифмети́ческое выраже́ние.

что? *(вин. п.)* **умно́жить на что?** *(вин. п.)*

15: 3. Читается 15 раздели́ть на 3. 15: 3 – э́то арифмети́ческое выраже́ние.

что? *(вин. п.)* **раздели́ть на что?** *(вин. п.)*

15+3 – э́то арифмети́ческое выраже́ние.
(к 15 (пятна́дцати) приба́вить 3)

к чему? *(дат. п.)* **приба́вить что?** *(вин. п.)*

15–3 – э́то арифмети́ческое выраже́ние.
(из 15 (пятна́дцати) вы́честь 3)

из чего́? *(род. п.)* **вы́честь что?** *(вин. п.)*

Следующие алгебраические выражения читаются так:
$a+b$ *a* плюс *b* – это сумма чисел *a* и *b*.
$a-b$ *a* минус *b* – это разность чисел *a* и *b*.
$a \cdot b$ *a* умножить на *b* – это произведение чисел *a* и *b*.
$a:b$ *a* разделить на *b* – это частное чисел *a* и *b*.

Упражнение 8. Читайте выражение:
а) 32–64+3; б) $2x+4$; в) $-5\cdot 3+4$; г) $x-3y$;
д) $24\cdot 5-16\cdot 3$; е) $-12-6\cdot 3$ ж) $a+2b$; з) $8\cdot 4-2a$;
и) $x-5+12\cdot 4$.

Результат сложения (+) двух чисел – это сумма.
Результат вычитания (–) двух чисел – это разность.
Результат умножения ($\times(\cdot)$) двух чисел – это произведение.
Результат деления ($\div(:)$) двух чисел – это частное.
Деление, умножение, сложение, вычитание – это арифметические действия (операции).

результат, –ы 1. result; 2. résultat, m; 3. resultado, m; 4. Ergebnis, n, Resultat, n; 5. 结果 , 成果；6.

$-24\cdot 3+4=-68$
–68 – это значение арифметического выражения.

значение выражения 1. value of expression; 2. valeur de l′expressión; 3. el valor de la expresion; 4. Ausduckstelle f; 5. 數值的, 数值的; 6.

Задание 1. Найдите значение выражения.
$-19+40$; $15-15\cdot 4$; $-32\cdot 5$; $45-45\cdot 34$;
$-6\cdot(-3)\cdot(-2)$; $16\cdot 81-81$; $-42+12\cdot 4$.

Задание 2. Найдите значение выражения.
а) $93\cdot 7+141$; б) $357-348{:}6$; в) $38+35\cdot 42$;

г) $-88:11-34\cdot 25$;   д) $(-4)^3+3^4$;   е) $2^7\cdot 3^3-2^4\cdot 3^2$;
ж) $(-2)^2+32:8$.

Упражнение 9. Отве́тьте на вопро́сы.

1. $-81+40=-41$ — -41 – что э́то ?
2. $32\cdot(-11)=-352$ — -352 – что э́то?
3. 15 – Како́е э́то число?
4. –12 – Како́е э́то число?
5. –3 и 3 – Каки́е э́то чи́сла?

Занятие 2.

ВЫРАЖЕНИЯ С ПЕРЕМЕННОЙ

x^2+2x-3 – выраже́ние с переме́нной x, где x – переме́нная.
$2a+5$ – выраже́ние с переме́нной a, где a – переме́нная.
Математи́ческие (арифмети́ческие, алгебраи́ческие) выраже́ния обознача́ются A, $P(X)$, $f(x)$, $g(x)$, и т.д.

$f(x)$ чита́ем «эф» от «икс»

переме́нная, –ые 1. variable; 2. variable; 3. variable;
4. Variabel; 5. 元, 變量 (元，变量)； 6.

Приме́ры. Найди́те значе́ние выраже́ния.

а) $f(x)=3x-15$ при $x=-7$.
Реше́ние. $f(-7)=3\cdot(-7)-15=-36$.

б) $f(x)=4-2x$ при $x=6$.

в) $f(x)=5x-9$ при $x=0;\ 3;\ -4$.

г) $f(x)=(2-x)^2+3$ при $x=0;\ 4;\ -7$.

Сте́пень

a^n чита́ется a в сте́пени n (a в «э́нной» сте́пени).

a^2 – a в квадра́те (a квадра́т) и́ли a во второ́й сте́пени.

a^3 – a в ку́бе (a куб) и́ли a в тре́тьей сте́пени.

a^4 – a в четвёртой сте́пени.

a^5 – a в пя́той сте́пени.

a^n – сте́пень. a – основа́ние сте́пени. n – показа́тель сте́пени.

сте́пень, –и 1. degree, power, exponent; 2. degré; 3. potencia, f; 4. Potenz, f; 5.次, 次數, 等數, 冪; 6.
показа́тель, –и 1. degree, order, index; 2. exposant; 3. indice, exponente, m; 4. Potenzexponent, m, Hochzahl, f; 5. 冪指數, (幂指数); 6.
основа́ние, –я 1. base; 2. base f; 3. base, f; 4. Grundseite, f; 5. 次數(冪)的基; 6.

Упражнение 1. Читайте выраже́ния.

x^2; $2x^2$; $-3x+2x^2-4$; $5x^3$; $-2x^2-3x$.

Упражнение 2. Читайте.

а) 5^3 Пять в ку́бе (пять в тре́тьей сте́пени) – э́то сте́пень. 5 – основа́ние сте́пени. 3 – показа́тель сте́пени.

б) 2^4 Два в четвёртой сте́пени. – э́то сте́пень. 2 – основа́ние сте́пени. 4 – показа́тель сте́пени.

Определе́ние. Если $n \in \boldsymbol{N}$ и $n > 1$, $a \in R$, то произведе́ние $\underbrace{a \cdot a \cdot a \cdot \cdots \cdot a}_{n \text{ раз}} = a^n$ называ́ется **n-ой** сте́пенью a.

Сво́йства сте́пени. Если $n, m \in N$, $a, b \in R$, тогда́

1. $a^n \cdot a^m = a^{n+m}$. 2. $\left(a^m\right)^n = a^{n \cdot m}$. 3. $(ab)^n = a^n b^n$.

4. $a^n : a^m = a^{n-m}$, $a \neq 0$. 5. $a^o = 1$, $a \neq 0$. 6. $a^{-n} = \dfrac{1}{a^n}$, $a \neq 0$

свойство, -а 1. property; 2. propiété; 3. propiedad; 4. Verhalten; 5. 性质，(性質); 6.

$12 : 4$ (12 раздели́ть на 4).

$\boxed{\textbf{что? (}\textit{вин. п.}\textbf{) раздели́ть на что? (}\textit{вин. п.}\textbf{)}}$

$a : b$ $\left(\dfrac{a}{b}\right)$ (*a* раздели́ть на *b*). $\dfrac{a}{b}$ – э́то ча́стное чи́сел *a* и *b*, где $b \neq 0$ или $\dfrac{a}{b}$ – отноше́ние *a* к *b*, где $b \neq 0$.

дели́мое, –ые 1. dividend; 2. dividende; 3. dividiendo, m; 4. Dividend, m; 5. 實, 被除數, （实，被除数）; 6.
дели́тель, –и 1. divisor; 2. diviseur, m; 3. divisor, m; 4. Teiler, m; 5. 因子, 約數, 除數,(因子，约数，除数); 6.
отноше́ние, –я 1. ratio, relation; 2. rapport, m, relation, f; 3. razón, f, relación, f; 4. Verhältnis, n; 5. 比; 6.

Задание 1. Найди́те значе́ние выраже́ния.

$(-4)^3$; $-5\cdot(-2)^3\cdot 3^2$; $2^2\cdot 5$; $-7\cdot 2^4$;

$\dfrac{8\cdot 3^2}{3}$; $\dfrac{3^5\cdot 3^{10}}{3^6\cdot 3^7}$; $\dfrac{(-5)^3\cdot 4^2}{5^2}$; $\dfrac{8\cdot 3^3}{2\cdot 3^2}$.

Одночле́ны

Выраже́ние $3a^2b$ – одночле́н. 3 – коэффицие́нт одночле́на и́ли коэффицие́нт выраже́ния.

Выраже́ния $2x$; $-5x^2$; $3a$ – одночле́ны.

$2x\cdot x^3 = 2x^4$ – стандáртный вид одночле́на

вид, –ы 1. form, kind, aspect; 2. aspect, forme; 3. aspecto, forma; 4. Form; 5. 看; 6.
стандáртн‖ый; -ая, -ое, -ые 1. standard; 2.standart; 3. estándar; 4. standardisirt, genormt; 5. 標準化, 標準的, (标准的，标准化）; 6.

записа́ть (что?) **в ви́де** 1. to put down in the form;
2. escrire sons la forme; 3. notar en la forma;
4. Schreiben in der Form; 5. 是书面的形式; 6

Зада́ние 2. Запиши́те одночле́н в станда́ртном ви́де.

а) $3x^5 \cdot x^2$; б) $\left(-3a^3\right)\cdot\left(-2a\right)$; в) $\left(-2x\right)^2\cdot\left(-3x^3\right)$;

г) $4x^2(-2)^3\cdot(3x)^2$; д) $-4x(-3)^2\cdot x^4$; е) $-8x^3\cdot(-2x)^3$.

Многочле́ны

Определе́ние. Многочле́н – э́то су́мма одночле́нов.

Приме́р.

$$\underbrace{3x^2-5x^2+x^2}_{\uparrow}-7=\underbrace{-x^2-7}_{\uparrow}$$

подо́бные чле́ны станда́ртный вид многочле́на

привести́ подо́бные чле́ны 1. reduce similar terms;
2. réduire des termes similaires; 3. reducir términos semejantes; 4. reduzieren ähnliche Begriffe; 5. 减少类似的条款; 6.

Зада́ние 3. Многочле́н запиши́те в станда́ртном ви́де.

а) $3x^4+4x-2x^2-5x+6$; б) $x\left(3x^2-5x+2\right)-x^2(x-3)$;

в) $-(2x+3)-(x+4)$; г) $5a^2-2\left(a^2-1\right)$;

д) $(x-2)(x-2)$; е) $(3+x)(x-3)$.

Фо́рмулы сокращённого умноже́ния

$a^2-b^2=(a-b)(a+b)$ – э́то ра́зность квадра́тов чи́сел a и b.

$(a+b)^2=a^2+2ab+b^2$ – э́то квадра́т су́ммы чи́сел a и b.

$(a-b)^2=a^2-2ab+b^2$ – э́то квадра́т ра́зности чи́сел a и b.

Занятие 1 (дополнительное)

ФОРМУЛЫ СОКРАЩЁННОГО УМНОЖЕНИЯ

Рассмотрим тождества, которые обычно называются **формулами сокращённого умножения.**

Умножим многочлен (a+b) на (a+b). Получим:

$$(a+b)^2 = (a+b)\cdot(a+b) = a\cdot a + a\cdot b + b\cdot a + b\cdot b =$$
$$= a^2+ab+ba+b^2=a^2+2ab+b^2.$$

$$\boxed{(a+b)^2 = a^2+2ab+b^2}$$

Сформулируем полученный результат***:*** ***квадрат суммы двух чисел*** **равен квадрату первого числа, плюс удвоенное произведение первого числа на второе, плюс квадрат второго числа.**

Умножим многочлен ($a-b$) на $(a-b)$. Получим:

$$(a-b)^2 = (a-b)\cdot(a-b) = a\cdot a - a\cdot b - b\cdot a + b\cdot b =$$
$$= a^2 - ab - ba+b^2=a^2 - 2ab+b^2.$$

$$\boxed{(a-b)^2 = a^2 - 2ab+b^2}$$

Сформулируем полученный результат: ***квадрат разности двух чисел*** **равен квадрату первого числа, минус удвоенное произведение первого числа на второе, плюс квадрат второго числа.**

Умножим квадрат многочлена $(a+b)^2$ на $(a+b)$, т.е.

$$(a+b)^2\cdot(a+b) = (a^2+2ab+b^2)\cdot(a+b) = a^2\cdot a + a^2\cdot b + 2ab\cdot a + 2ab\cdot b + b^2\cdot a + b^2\cdot b = a^3 + a^2 b + 2a^2b + 2ab^2+ ab^2+b^3 = a^3+3a^2b+3ab^2+b^3.$$

Таким образом, получена формула

$$\boxed{(a+b)^3 = a^3+3a^2b+3ab^2+b^3}$$

Куб суммы двух чисел **равен кубу первого числа, плюс утроенное произведение квадрата первого числа на второе, плюс утроенное произведение первого числа на квадрат второго, плюс куб второго числа.**

Умно́жим квадра́т многочле́на $(a–b)^2$ на $(a–b)$, т.е.
$(a–b)^2\cdot(a–b)= (a^2–2ab+b^2)\cdot(a–b) = a^2\cdot a – a^2\cdot b –$
$– 2ab\cdot a + 2ab\cdot b + a\cdot b^2 – b^2\cdot b = a^3 – a^2 b – 2a^2b +$
$+ 2ab^2 + b^2a – b^3 = a^3 – 3a^2b + 3ab^2 – b^3.$
Таки́м о́бразом, полу́чена фо́рмула

$$\boxed{\boldsymbol{(a–b)^3 =a^3 – 3a^2b+3ab^2 – b^3}}$$

Сле́довательно, ***куб ра́зности двух чи́сел*** **ра́вен ку́бу пе́рвого числа́, ми́нус утро́енное произведе́ние квадра́та пе́рвого числа́ на второе, плюс утроенное произведение первого числа́ на квадра́т второ́го, ми́нус куб второ́го числа́.**

Тепе́рь рассмо́трим произведе́ние a+b на a–b.
Полу́чим: $(a+b)\cdot(a–b) = a\cdot a – a\cdot b + b\cdot a –b\cdot b =$
$=a^2–ab+ba–b^2=a^2–b^2.$
Таки́м о́бразом, полу́чена фо́рмула

$$\boxed{\boldsymbol{a^2 – b^2 = (a – b)(a + b)}}$$

Ра́зность квадра́тов двух чи́сел **равна́ произведе́нию ра́зности э́тих чи́сел на их су́мму.**

Вы́ведем фо́рмулу ра́зности ку́бов двух чи́сел $\boldsymbol{a^3–b^3}$.
Рассмо́трим произведе́ние $(a–b)\cdot(a^2+ab+b^2)$. Поско́льку
$(a–b)\cdot(a^2+ab+b^2) = a\cdot a^2 +a\cdot ab +a\cdot b^2 – b\cdot a^2 –$
$–b\cdot ab –b\cdot b^2 = a^3 +a^2 b +ab^2 –b\cdot a^2 –ab^2 –b^3=a^3–b^3$, то полу́чим:

$$\boxed{\boldsymbol{a^3–b^3=(a–b)\cdot(a^2+ab+b^2)}}$$

Сформули́руем**:** ***ра́зность ку́бов двух чи́сел*** **равна́ произведе́нию ра́зности э́тих чи́сел на непо́лный квадра́т су́ммы э́тих чи́сел**

Дока́жем фо́рмулу су́ммы ку́бов двух чи́сел

$$\boxed{\boldsymbol{a^3+b^3 = (a + b)\cdot(a^2–ab+b^2)}}$$

Вы́полним умноже́ние многочле́на $(a+b)$ на $(a^2–ab+b^2)$.

$(a + b)\cdot(a^2 – ab + b^2) = a\cdot a^2 – a\cdot ab + a\cdot b^2 + ba^2 – b\cdot ab +$
$+ b\cdot b^2 = a^3 – a^2b + ab^2 + ba^2 – ab^2 + b^3 = a^3 + b^3.$

Эту фо́рмулу мо́жно прочита́ть так: ***су́мма ку́бов двух чи́сел*** **равна́ произведе́нию су́ммы э́тих чи́сел на непо́лный квадра́т ра́зности э́тих чи́сел.**

Приме́ры.

Разложи́те многочле́ны на мно́жители.

1. $3x^3 - 27x$.

Реше́ние: $3x^3 - 27x = 3x(x^2 - 9) = 3x(x-3)(x+3)$.

2. $125x - 5x^3$.

Реше́ние: $125x – 5x^3 = –5x(x^2 – 25) = –5x(x+5)(x–5)$.

3. $c^2 - 4d^2$.

Реше́ние: $c^2 – 4d^2 = c^2 – (2d)^2 = (c – 2d)\cdot(c + 2d)$.

4. $p^3 + 64n^3$.

Реше́ние: $p^3 + 64n^3 = p^3 + (4n)^3 = (p + 4n)(p^2 – 4pn + 16n^2)$.

5. $\frac{1}{8}a^3 - m^3$.

Реше́ние:

$$\frac{1}{8}a^3 - m^3 = \left(\frac{1}{2}a\right)^3 - m^3 = \left(\frac{1}{2}a - m\right)\left(\frac{1}{4}a^2 + \frac{1}{2}am + m^2\right).$$

Зада́ние 1. Разложи́те многочле́н на мно́жители.

а) $a^2 - 16b^2$; б) $x^2 - a^4x^6$; в) $16b^4 - 4x^2a^2b^2$;
г) $a^4 - 2a^2b^3 + b^6$; д) $1-(a^2b)^2$; е) $125x^3 - m^3$;
ж) $p^4 - p^{16}$; з) $8a^3 - 64b^3$; и) $x^6 - y^6$;
к) $1 - \frac{x^3}{8}$; л) $1 - a^6$; м) $4x^4 + 5x^2 + 1$;
н) $x^4 - (1+ab)x^2 + ab$; о) $x^8 + x^4 + 1$;
п) $x(x^3 - a^3) + ax(x^2 - a^2) + a^3(x - a)$;
р) $(x^2 + x + 3)(x^2 + x + 4) - 12$.

Примеча́ние: поле́зно испо́льзовать фо́рмулы сокращённого умноже́ния.

Зада́ние 2. Упрости́те алгебраи́ческое выраже́ние.

а) $(2a-b)(2a+b)+b^2$; б) $(x+7)^2-10x$;

в) $(a+c)(a-c)-(a-2c)^2$; г) $(x+3)^2-(x-3)^2$;

д) $(a+3c)^2+(b+3c)(b-3c)$; е) $(a+3)^3+(a-3)^3$;

ж) $(2a+1)(2a-1)+(a-7)(a+7)$; з) $(a+x+y)^3-(a-x-y)^3$.

Зада́ние 3. Вы́числите.

а) 35^2-25^2; б) $42\cdot 58$; в) $1002\cdot 998-1003\cdot 997$;

г) $\frac{84{,}5^2-59{,}5^2}{61^2-11^2}$.

Зада́ние 4. Вы́полните действия.

а) $\left(5a+\frac{1}{7}b\right)\left(5a-\frac{1}{7}b\right)$; б) $\left(\frac{1}{3}y-2x\right)^2$; в) $(5x-6y)^3$;

г) $\left(\frac{1}{z}+\frac{2}{y}\right)\left(\frac{1}{z^2}-\frac{2}{zy}+\frac{4}{y^2}\right)$; д) $\left(\frac{a}{b}+\frac{b}{a}\right)\left(\frac{a^2}{b^2}-1+\frac{b^2}{a^2}\right)$;

е) $\left(\frac{1}{2z}-\frac{4}{y}\right)\left(\frac{1}{4z^2}+\frac{2}{zy}+\frac{16}{y^2}\right)$;

ж) $\left(\frac{0{,}4}{2zy}-\frac{10}{x}\right)\left(\frac{1}{25y^2z^2}+\frac{2}{zyx}+\frac{100}{x^2}\right)$; з) $\left(\frac{1}{y}+1\right)^3$.

Зада́ние 5. Разложи́те на мно́жители с по́мощью фо́рмул сокращённого умноже́ния.

а) $16a^2-121p^2$; б) $x^3-6x^2y+12xy^2-8y^3$;

в) $343a^3+294a^2b+84ab^2+8b^3$;

г) $27x^3-8a^3$; д) $\frac{1}{81}t^2-25y^4$; е) $\frac{27f^3}{125a^3}+1$.

Зада́ние 6. Докажи́те, что:

а) 23^2-15^2 де́лится на 8; б) 8^5+2^{11} де́лится на 17;

в) $41^4–22^4$ де́лится на 19; г) 328^3+172^3 де́лится на 2000;
д) $43^3–37^3$ де́лится на 1603.

Зада́ние 7. Определи́те знак выраже́ния.

а) $\left(\frac{5}{6}\right)^2-\left(\frac{2}{3}\right)^2$; б) $\left(\frac{25}{27}\right)^2-\left(\frac{32}{54}\right)^2$; в) $\left(\frac{2}{5}\right)^3-\left(-\frac{2}{3}\right)^3$;

г) $\left(\frac{5}{2}\right)^3+\left(-\frac{2}{3}\right)^3$; д) $\left(\frac{5}{7}\right)^3-\left(\frac{3}{2}\right)^3$; е) $\left(\frac{2}{7}\right)^3-\left(\frac{3}{4}\right)^3$;

ж) $\left(-\frac{25}{17}\right)^3+\left(\frac{53}{34}\right)^3$; з) $\left(\frac{25}{27}\right)^3+\left(-\frac{32}{54}\right)^3$.

Зада́ние 8. Запиши́те в ви́де многочле́на.

а) $(x-3)^2$; б) $-3(5x-1)^2$; в) $(x+4)(4-x)$;

г) $(x^2-5)^2$; д) $(4x-1)^2$; е) $(x-4)(x+2)^2$.

Зада́ние 9. Найди́те значе́ние выраже́ния.

а) $(x-10)^2-x(x+80)$ при $x = –128$;

б) $(2x+9)^2-x(4x+31)$ при $x = 39$.

Зада́ние 10. Запиши́те выраже́ние в ви́де $(x+m)^2+n$.

а) $x^2+12x+40$; б) $x^2+16x+70$;

в) $x^2+14x+48$; г) x^2-8x-1;

д) $x^2+44x+100$; е) $x^2-20x+53$.

Образе́ц реше́ния: а) $x^2+12x+40=x^2+2\cdot x\cdot 6+6^2-6^2+40=$
$=(x+6)^2-36+40=(x+6)^2+4$.

Занятие 3.
РАЗЛОЖЕНИЕ НА МНОЖИТЕЛИ

разложе́ние, –я 1. factorization. 2. decomposition;
3. decomposición; 4. Zerlegung, f; Entwicklung, f;
4. Auflösung, f; 5. 分解，展开（式）； 6.

мно́житель, -и 1. multiplier, factor; 2. facteur, m;
3. factor, m; 4. Faktor, m, Multiplikator, m;
5. 乘數,乘子,乘因子,因式; 6.

$a \cdot b$ – э́то произведе́ние чи́сел a и b

$$\left.\begin{array}{l} a - \text{мно́житель} \\ b - \text{мно́житель} \end{array}\right\} \text{э́то мно́жители}$$

Фигу́рная ско́бка $\}$ – знак. Чита́ем его́ как "и". Да́нное математи́ческое предложе́ние мо́жно прочита́ть так: a и b – мно́жители.

Умноже́ние	Разложе́ние на мно́жители
$5 \cdot 3 = 15$	$15 = 5 \cdot 3$

разложи́ть (что?) **на мно́жители** 1. to factorize;
2. se décomposant en facteurs; 3. descomponer en factores;
4. zerlegen in Faktoren; 5. 打破成因素; 6.

что? (*вин. п.*) **разложи́ть на что?** (*вин. п.*)

Число́ разложи́те на мно́жители.
Выраже́ние разложи́те на мно́жители.
Многочле́н разложи́те на мно́жители.

Упражне́ние 1.
а) 21 разложи́те на мно́жители. *Реше́ние.* $21 = 3 \cdot 7$
б) $5x - 15$ разложи́те на мно́жители.

Реше́ние. $5x - 15 = 5x - 5 \cdot 3 = 5(x - 3)$. Общий мно́житель 5 выно́сим за ско́бки.

о́бщ‖ий, -ая, -ее, -ие 1. common;2. commun; 3. común;

4. gemeinsame; 5. 公因子; 6.

что? (*вин. п.*) **выноси́ть что? (***вин. п.***) куда?**

в) $3x^2 - 6x$ разложи́те на мно́жители.

Реше́ние: $3x$ – о́бщий мно́житель. О́бщий мно́житель $3x$ выно́сим за ско́бки. $3x^2 - 6x = 3x(x-2)$.

Приме́р. $x^6 - 27x^3 = x^3(x^3 - 3^3) = x^3(x-3)(x^2+3x+9)$.

Алгебраи́ческое выраже́ние $x^6 - 27x^3$ мы разложи́ли на мно́жители $x^3\left(x-3\right)\left(x^2+3x+9\right)$.

Зада́ние 1. Разложи́те на мно́жители.

$x^2 - 2x$;	$x(x-2)+(x-2)$;	$x^2 - 9$;	$2x^2 - 2$;
$6x - 2x^2$;	$2x(x-4)-(x-4)$;	$16 - x^2$;	$x^3 - x^2$;
$3x^2 - 3x^3$;	$x(x+3)+(-x-3)$;	$x^2 - 25$;	$3x^3 - 3x$;
$2x - 8$;	$x + 2 - x^2(x+2)$;	$4x^2 - 1$;	$25x^2 - 16$.

Просты́е и составны́е чи́сла

$2 = 2\cdot 1$; 2 – просто́е число́

$5 = 5\cdot 1$; 5 – просто́е число́

$13 = 13\cdot 1$; 13 – просто́е число́

2, 5, 13 – просты́е чи́сла

Мно́жество чи́сел {2, 3, 5, 7, 11, 13, 17, 19, 23, 29, 31, …} – э́то мно́жество просты́х чи́сел.

Теоре́ма Евклида. Мно́жество просты́х чи́сел бесконе́чно.

теоре́ма, –ы 1. Theorem; 2. théorème m; 3. teorema, m; 4. Theoreme, n; 5. 定理； 6.

просто́е число́ 1. prime number; 2. premier nombre, m; 3. número primo; 4. Primzahl, f; 5. 素数（素數）; 6.

2 – просто́е число́. Оно́ состои́т из двух мно́жителей: 1 и 2. Други́х мно́жителей нет. Сле́довательно, 2 мо́жно разделить то́лько на 2 и́ли на 1. Символически э́ти предложе́ния мо́жно записа́ть так: $2 \cdot 1 = 2 \Rightarrow \quad 2 = \dfrac{2}{1} \quad \vee (\text{или}) \quad 1 = \dfrac{2}{2}$.

$12 = 3 \cdot 4 = 3 \cdot 2^2$; 12 – э́то составно́е число́

$30 = 2 \cdot 15 = 2 \cdot 3 \cdot 5$; 30 – э́то составно́е число́

составно́е число́ 1. composite number; 2. compose nombre; 3. numero compuesto; 4. zusammengesetzte Zahl; 5. 合成數(合成数），复合数（復合數); 6.

Составно́е число́ мо́жно разложи́ть на просты́е мно́жители. Наприме́р, $24 = 3 \cdot 8 = \underbrace{3 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2}_{\textit{простые множители}} = 3 \cdot 2^3$

Упражне́ние 2. Прочитайте.

7 – э́то просто́е число́.

19 – э́то просто́е число́.

23 – э́то просто́е число́.

11, 13, 17, 19, 23, 29 – э́то просты́е чи́сла.

8 – э́то составно́е число́. 24 – э́то составно́е число́.

1 – э́то ни просто́е, ни составно́е число́.

Зада́ние 2. Сле́дующие чи́сла разложи́те на просты́е мно́жители.

216, 162, 144, 225, 512, 111, 81, 256.

Зада́ние 3. Разложи́те на мно́жители многочле́н.

$x^2 - 6x + 9$; $-x^2 + 4x - 4$; $2x^2 - 12x + 18$;

$-2x^2 - 16x - 32$; $x^3 + 2x^2 + x$; $10x - x^2 - 25$.

Утвержде́ние. Если $a \cdot b = 0$, то и́ли $a = 0$, и́ли $b = 0$.

Это предложе́ние мо́жно записа́ть си́мвольно так:

$$a \cdot b = 0 \quad \underset{\text{следовательно}}{\Rightarrow} \quad \left[\begin{array}{l} a = 0, \\ b = 0. \end{array}\right.$$

Квадра́тная скобка [– э́то знак. Чита́ем его́ как «и́ли».

утвержде́ние, –ия 1. statement, affirm, assert;
2. affirmation f, assertion f; 3. afirmación f, aserción;
4. Behauptung f; 5. 斷定,論斷,命題
(断定，论断，命题); 6.

Упражне́ние 3. Когда́ выраже́ние $f(x) = (x+3)(x-4)$ равно́ нулю?

Выраже́ние $f(x)$ равно́ нулю́, е́сли $x+3=0$, и́ли $x-4=0$. Сле́довательно, **(** $\Rightarrow$ **)** $x=-3$ и́ли $x=4$.

Отве́т. $f(x)=0$, когда́ $x \in \{-3;4\}$.

Когда́ выраже́ние ... равно́ нулю?

При како́м значе́нии переме́нной выраже́ние равно́ нулю?

Упражнение 4. При како́м значе́нии переме́нной выраже́ние $f(x) = (x+5)(x+13)$ равно́ нулю?

Решение. Выраже́ние $f(x)$ равно́ нулю́, е́сли $x+5=0$ и́ли $x+13=0$, $\Rightarrow$ $x=-5$ и́ли $x=-13$.

Выраже́ние $f(x) = (x+5)(x+13)$ равно́ нулю́, е́сли $x=-5$ и́ли $x=-13$.

Отве́т. $f(x)=0$, когда́ $x \in \{-5;-13\}$.

Задание 4. Когда́ выраже́ние $f(x)$ равно́ нулю?

$f(x) = (x+8)(x-1)$; $\qquad f(x) = (x^2 - x)(x+3)$;

$f(x) = x(x-2)$; $\qquad f(x) = 3(x-4) - x^2 + 4x$;

$f(x)=x^2+7x$; $\qquad f(x)=(x^2+2x)(x^2-x)$;

$f(x)=3x^2-6x$; $\qquad f(x)=x(2-x)+3x-6$.

Зада́ние 5. При како́м значе́нии переме́нной выраже́ние равно́ нулю?

$Q(x)=x^2+2x+1$; $\qquad P(x)=x^2+2x+1+x(x+1)$;

$R(x)=x^3+2x^2+x$; $\qquad F(a)=a^3-16a$;

$f(x)=x^2-25$; $\qquad g(b)=9b-b^3$.

Текст (дополнительный)

Определе́ние. Два математи́ческих выраже́ния, соединённые зна́ком =, образу́ют ра́венство.

Числово́е ра́венство мо́жет быть **и́стинным** (ве́рным) и́ли **ло́жным** (неве́рным).

Пример: 5 = 5 – и́стинное ра́венство; 3 = 5 – ло́жное ра́венство.

Бу́квенное ра́венство мо́жет быть та́кже и́стинным и́ли ло́жным при разли́чных числовы́х значе́ниях букв. Наприме́р: $a=b$, е́сли $a=3$, а $b=5$, то ра́венство 3 = 5 – ло́жное.

Ка́ждому алгебраи́ческому выраже́нию соотве́тствует мно́жество числовы́х значе́ний переме́нной, при кото́рых э́то выраже́ние **име́ет смысл** и принима́ет числовы́е значе́ния. Тако́е мно́жество значе́ний называ́ется ***о́бластью определе́ния*** математи́ческого выраже́ния и обозначается буквой ***D***.

Наприме́р: $f(x)=\dfrac{x+1}{x^2-1}$; $D(f(x))=\{x \mid x\in \mathbf{R}\setminus\{-1, 1\}\}$.

Два математи́ческих выраже́ния называ́ются ***тожде́ственными***, е́сли

1) их о́бласти определе́ния совпада́ют;

2) они́ принима́ют одина́ковые числовы́е значе́ния при подстано́вке в ка́ждое выраже́ние одного́ и того́ же набо́ра значе́ний входя́щих в него́ букв, вы́бранных из о́бласти определе́ния.

Ра́венство, в кото́ром пра́вая и ле́вая ча́сти равны́ при любы́х значе́ниях переме́нных из о́бласти определе́ния, называ́ется ***то́ждеством***.

Приме́ром то́ждеств явля́ются фо́рмулы сокращённого умноже́ния:

$$a^2 - b^2 = (a - b) \cdot (a + b);$$
$$a^3 \pm b^3 = (a \pm b)(a^2 \mp ab + b^2);$$
$$(a \pm b)^2 = a^2 \pm 2ab + b^2;$$
$$(a \pm b)^3 = a^3 \pm 3a^2b + 3ab^2 \pm b^3;$$
$$a^n - b^n = (a - b)(a^{n-1}b^0 + a^{n-2}b^1 + \ldots + a^1b^{n-2} + a^0b^{n-1});$$
$$(a + b + c)^2 = a^2 + b^2 + c^2 + 2ab + 2bc + 2ac.$$

Занятие 4.
ОБЫКНОВЕННЫЕ ДРОБИ

Определение 1. Выраже́ние $\frac{a}{b}$ называ́ется дро́бью, где $b \neq 0$. a – числи́тель, b – знамена́тель.

что? (*им. п.*) **называ́ется чем?** (*тв. п.*)

дробь, –и 1. fraction; 2. fraction, f; 3. fracción, f;
4. Bruch, m; 5. 分數; 6.
числи́тель, –и 1. numerador; 2. numérateur, m;
3. numerador, m; 4. Zähler, m; 5. 分子; 6.
знамена́тель, –и 1. denominator; 2. dénominateur, m;
3. denominador, m; 4. Nenner, m; 5. 分母, 公比; 6.

$\frac{1}{2}$ – одна́ втора́я; $\frac{2}{3}$ – две тре́тьих; $\frac{3}{2}$ – три вторы́х.

$\frac{1}{3}$ – о́дна тре́тья; $\frac{2}{5}$ – две пя́тых; $\frac{3}{9}$ – три девя́тых;

$\frac{1}{4}$ – одна́ четвёртая; $\frac{2}{7}$ – две седьмы́х; $\frac{3}{5}$ – три пя́тых.

что? (*вин. п.*) ме́ньше, чем что? (*вин. п.*)

ме́ньше, чем (<) 1. less then; 2. moins a;
3. es menor que; 4. kleiner als; 5. 較小于 (较小于); 6.

что? (*вин. п.*) бо́льше, чем что? (*вин. п.*)

бо́льше, чем (>) 1. greater then; 2. supéireur a;
3. es mayor que; 4. größer als; 5. 大于; 6.

Дробь $\frac{1}{2}$ – одна́ втора́я ме́ньше, чем едини́ца (оди́н) 1, а дробь $\frac{3}{2}$ – три вторы́х бо́льше, чем оди́н (едини́ца). Математи́ческими зна́ками э́то предложе́ние мо́жно записа́ть так:

$\frac{1}{2} < 1, \quad \frac{3}{2} > 1.$

Упражнение. Чита́йте.

$5 < 12$	(5 ме́ньше, чем 12).
$-3 < 6$	(–3 ме́ньше, чем 6).
$\frac{2}{3} < 1$	$\left(\frac{2}{3}\right.$ ме́ньше, чем 1$\left.\right)$.
$17 > 14$	(17 бо́льше, чем 14).
$5 > 0$	(5 бо́льше, чем 0).
$a > b$	(a бо́льше, чем b).

$\frac{3}{8}$ – пра́вильная дробь (числи́тель ме́ньше, чем знамена́тель).

$\frac{7}{5}$ – непра́вильная дробь (числи́тель бо́льше, чем знамена́тель).

$\frac{8}{8}$ – непра́вильная дробь.

$\frac{5}{9}; -\frac{7}{10}; \frac{13}{14}$ – пра́вильные дро́би.

$\frac{8}{3}; -\frac{15}{4}; \frac{16}{16}$ – непра́вильные дро́би.

непра́вильная дробь $\Leftrightarrow$ **сме́шанное число́**

$2\frac{3}{8}$ – две це́лых, три восьмы́х.

$2\frac{3}{8}$ – сме́шанное число́ $\left(2\frac{3}{8} = 2 + \frac{3}{8}\right)$.

$2\frac{5}{6}$ – две це́лых, пять шесты́х.

$1\frac{1}{2}$ – одна́ це́лая, одна́ втора́я.

$3\frac{7}{8}$ – три це́лых, семь восьмы́х.

Определение 2. Если числи́тель дро́би $\frac{a}{b}$ бо́льше и́ли ра́вен знамена́телю, т.е. $a \geq b$, то така́я дробь называ́ется **непра́вильной** дро́бью, е́сли числи́тель ме́ньше знамена́теля, т.е. $a < b$, то дробь называ́ется **пра́вильной**

пра́вильная дробь 1. proper fraction; 2. propere fraction; 3. fracción propia; 4. unechter Bruch;
5. 真分數, 真分数；6.

непра́вильная дробь 1. improper fraction;
2. impropere fraction; 3. fracción impropia;
4. richtige Bruch; 5. 不当的分数; 6.

Операции сравнения чисел

Ра́венство: (= - равно́).
Нера́венство: (> - бо́льше, чем; < - ме́ньше, чем).
Нера́венство: (≥ - бо́льше и́ли равно́ (не ме́ньше),
Нера́венство: (≤ - ме́ньше или равно́ (не бо́льше).

Сво́йства дро́би

1. $\frac{a}{b} = \frac{a:m}{b:m}$, $m \neq 0$. Значе́ние дро́би не изме́нится, е́сли числи́тель и знамена́тель раздели́ть на одно́ и то же число́, не ра́вное нулю́.

одно́ и то же 1. the same; 2. le męme, la męme;
3. lo mismo; 4. ein und dasselbe; 5. 同一個東西
(同一个东西); 6.

Сократи́ть дробь э́то зна́чит числи́тель и знамена́тель раздели́ть на их о́бщий дели́тель. Например, $\frac{36}{42} = \frac{36:6}{42:6} = \frac{6}{7}$.
Чита́ется: дробь $\frac{36}{42}$ мо́жно сократи́ть на 6, бу́дет $\frac{6}{7}$.

сократи́ть (что?) 1. reduce; 2. simplitier; 3. simplificar, cancelar; 4. kürzen, kürzen…durch; 5. 約分,（约分）; 6.

2. $\frac{a}{b} = \frac{a \cdot m}{b \cdot m}, m \neq 0$. Значе́ние дро́би не изме́нится, е́сли числи́тель и знамена́тель умно́жить на одно́ и то же число́, не ра́вное нулю́.

сократи́ть что? (*вин. п.*) на ско́лько? (*вин. п.*)

$\frac{15}{24}$ сократи́ть на 3. $\frac{15}{24}=\frac{5}{8}$.

Задание 1. Сократи́те дробь.

а) $\frac{30}{45}$; $\frac{22}{66}$; $\frac{75}{125}$; $\frac{196}{128}$; $\frac{36\cdot 24}{12\cdot 64}$; $\frac{6\cdot 25}{75\cdot 9}$.

б) $\frac{2x}{3x}$; $\frac{6a}{24a}$; $\frac{15x}{25}$; $\frac{7x}{21x}$.

Задание 2. Сократи́те рациона́льное выраже́ние.

а) $\frac{3(x+1)}{9}$; $\frac{15(x-1)}{21x^2}$; $\frac{(x-4)(x+4)}{3(x+4)}$; $\frac{6(x-2)}{2-x}$.

б) $\frac{x^6+x^4}{x^4+x^2}$; $\frac{4-x^2}{10-5x}$; $\frac{x-2}{2-x}$; $\frac{(x-2)(x+3)}{(2-x)^2}$.

Занятие 5.

АРИФМЕТИЧЕСКИЕ ДЕЙСТВИЯ С ДРОБЯМИ

Умноже́ние

Правило. *Что́бы умно́жить дробь на дробь, ну́жно произведе́ние числи́телей раздели́ть на произведе́ние знамена́телей. Если возмо́жно, сократи́те дробь.*

Символи́чески э́то действие опи́сывается так:

$$\frac{a}{b}\cdot\frac{c}{d}=\frac{a\cdot c}{b\cdot d},\ \ b\neq 0,\ d\neq 0.$$

Примеры:

а) $\frac{2}{9}\cdot\frac{7}{11}=\frac{2\cdot 7}{9\cdot 11}=\frac{14}{99}$;

б) $\frac{5}{8}\cdot\frac{20}{21}=\frac{5\cdot 20}{8\cdot 21}=\frac{5\cdot 5}{2\cdot 21}=\frac{25}{42}$;

в) $\frac{13}{15}\cdot\frac{30}{31}=\frac{13\cdot 30}{15\cdot 31}=\frac{13\cdot 2}{1\cdot 31}=\frac{26}{31}$;

г) $\frac{8}{7}\cdot\frac{23}{28}=\frac{8\cdot 23}{7\cdot 28}=\frac{2\cdot 23}{7\cdot 7}=\frac{46}{49}$;

д) $\frac{20}{11}\cdot\frac{7}{65}=\frac{20\cdot 7}{11\cdot 65}=\frac{4\cdot 7}{11\cdot 13}=\frac{28}{143}$.

Умноже́ние це́лого числа́ на дробь (и́ли дро́би на це́лое число́).

Примеры:

а) $\frac{4}{15}\cdot 5=\frac{4}{15}\cdot\frac{5}{1}=\frac{4\cdot 5}{15\cdot 1}=\frac{4\cdot 1}{3\cdot 1}=\frac{4}{3}=1\frac{1}{3}$;

б) $\frac{14}{19}\cdot 6=\frac{14}{19}\cdot\frac{6}{1}=\frac{84}{19}=4\frac{8}{19}$;

в) $\frac{23}{25}\cdot 10=\frac{23}{25}\cdot\frac{10}{1}=\frac{23\cdot 10}{25\cdot 1}=\frac{23\cdot 2}{5\cdot 1}=\frac{46}{5}=9\frac{1}{5}$;

г) $\frac{37}{39}\cdot 26=\frac{37}{39}\cdot\frac{26}{1}=\frac{37\cdot 26}{39\cdot 1}=\frac{37\cdot 2}{3\cdot 1}=\frac{74}{3}=24\frac{2}{3}$;

д) $\frac{8}{17}\cdot 3=\frac{8}{17}\cdot\frac{3}{1}=\frac{24}{17}=1\frac{7}{17}$.

Умноже́ние сме́шанного числа́ на дробь

Примеры:

1. $7\frac{2}{3}\cdot\frac{15}{46}=\frac{23}{3}\cdot\frac{15}{46}=\frac{23\cdot 15}{3\cdot 46}=\frac{1\cdot 5}{1\cdot 2}=\frac{5}{2}=2\frac{1}{2}$;

2. $5\frac{4}{9}\cdot\frac{3}{7}=\frac{49}{9}\cdot\frac{3}{7}=\frac{49\cdot 3}{9\cdot 7}=\frac{7\cdot 1}{3\cdot 1}=\frac{7}{3}=2\frac{1}{3}$;

3. $22\frac{1}{2}\cdot\frac{19}{20}=\frac{45}{2}\cdot\frac{19}{20}=\frac{45\cdot 19}{2\cdot 20}=\frac{9\cdot 19}{2\cdot 4}=\frac{171}{8}=21\frac{3}{8}$;

4. $63\frac{2}{3}\cdot\frac{51}{382}=\frac{191}{3}\cdot\frac{51}{382}=\frac{191\cdot 51}{3\cdot 382}=\frac{1\cdot 17}{1\cdot 2}=\frac{17}{2}=8\frac{1}{2}$;

5. $35\frac{1}{6}\cdot\frac{30}{211}=\frac{211}{6}\cdot\frac{30}{211}=\frac{1\cdot 5}{1\cdot 1}=\frac{5}{1}=5$;

6. $38\frac{53}{60}\cdot 10=\left(38+\frac{53}{60}\right)\cdot 10=380+\frac{53}{6}=380+8\frac{5}{6}=388\frac{5}{6}$;

7. $51\frac{7}{9}\cdot 3=153+\frac{7\cdot 3}{9\cdot 1}=153+\frac{7}{3}=155\frac{1}{3}$;

8. $24\frac{7}{12}\cdot 15=360+\frac{7\cdot 15}{12\cdot 1}=360+\frac{35}{4}=368\frac{3}{4}$;

9. $1215\frac{7}{13}\cdot 2=2430+\frac{7\cdot 2}{13\cdot 1}=2430+\frac{14}{13}=2431\frac{1}{13}$;

10. $146\frac{3}{7}\cdot 4=584+\frac{3\cdot 4}{7\cdot 1}=584+\frac{12}{7}=585\frac{5}{7}$.

Деление

Правило. *Чтóбы разделúть дробь на дробь, нýжно пéрвую дробь умнóжить на дробь,* ***обрáтную*** *второй.*

Символúчески э́то дéйствие опúсывается так:

$$\frac{a}{b}:\frac{c}{d}=\frac{a\cdot d}{b\cdot c},\quad b\neq 0,\, d\neq 0,\, c\neq 0.$$

Примеры:

а) $\frac{8}{15}:\frac{4}{13}=\frac{8}{15}\cdot\frac{13}{4}=\frac{8\cdot 13}{15\cdot 4}=\frac{2\cdot 13}{15\cdot 1}=\frac{26}{15}=1\frac{11}{15};$

б) $\frac{17}{24}:\frac{9}{16}=\frac{17}{24}\cdot\frac{16}{9}=\frac{17\cdot 2}{3\cdot 9}=\frac{34}{27}=1\frac{7}{27};$

в) $\frac{23}{25}:\frac{8}{15}=\frac{23}{25}\cdot\frac{15}{8}=\frac{23\cdot 3}{5\cdot 8}=\frac{69}{40}=1\frac{29}{40};$

г) $\frac{74}{15}:\frac{111}{200}=\frac{74}{15}\cdot\frac{200}{111}=\frac{2\cdot 40}{3\cdot 3}=\frac{80}{9}=8\frac{8}{9};$

д) $\frac{7}{43}:\frac{45}{86}=\frac{7}{43}\cdot\frac{86}{45}=\frac{7\cdot 2}{1\cdot 45}=\frac{14}{45};$

е) $8\frac{4}{15}:\frac{31}{33}=\frac{124}{15}\cdot\frac{33}{31}=\frac{4\cdot 11}{5\cdot 1}=\frac{44}{5}=8\frac{4}{5};$

ж) $13\frac{1}{2}:\frac{9}{11}=\frac{27}{2}\cdot\frac{11}{9}=\frac{3\cdot 11}{2\cdot 1}=\frac{33}{2}=16\frac{1}{2};$

з) $18\frac{2}{3}:\frac{8}{15}=\frac{56}{3}\cdot\frac{15}{8}=\frac{7\cdot 5}{1\cdot 1}=\frac{35}{1}=35;$

и) $41\frac{3}{5}:\frac{104}{105}=\frac{208}{5}\cdot\frac{105}{104}=\frac{2\cdot 21}{1\cdot 1}=42;$

к) $3\frac{4}{17}:5\frac{1}{2}=\frac{55}{17}\cdot\frac{2}{11}=\frac{5\cdot 2}{17\cdot 1}=\frac{10}{17};$

л) $20\frac{3}{4}:16\frac{3}{5}=\frac{83}{4}\cdot\frac{5}{83}=\frac{1\cdot 5}{4\cdot 1}=\frac{5}{4}=1\frac{1}{4};$

При делéнии смéшанного числá на цéлое дéйствуйте по образцáм:

а) $88\frac{16}{23}:4=\left(88+\frac{16}{23}\right):4=22+\frac{16\cdot 1}{23\cdot 4}=22+\frac{4\cdot 1}{23\cdot 1}=22\frac{4}{23};$

б) $23\frac{5}{6}:4=\left(20+3\frac{5}{6}\right):4=5+3\frac{5}{6}:4=5+\frac{23\cdot 1}{6\cdot 4}=5\frac{23}{24};$

в) $75\frac{2}{15}:18=\left(72+3\frac{2}{15}\right):18=4+3\frac{2}{15}:18=$

$=4+\frac{47\cdot 1}{15\cdot 18}=5\frac{47}{270};$

г) $543\frac{17}{21}:180=\left(540+3\frac{17}{21}\right):180=3+3\frac{17}{21}:180=$

$=3+\frac{80\cdot 1}{21\cdot 180}=3+\frac{4}{189}=3\frac{4}{189};$

д) $306\frac{12}{13}:60=\left(300+6\frac{12}{13}\right):60=5+6\frac{12}{13}:60=$

$=5+\frac{90\cdot 1}{13\cdot 60}=5+\frac{3\cdot 1}{13\cdot 2}=5\frac{3}{26};$

е) $1452\frac{35}{36}:70=\left(1400+52\frac{35}{36}\right):70=20+52\frac{35}{36}:70=$

$=20+\frac{1907\cdot 1}{36\cdot 70}=20\frac{1907}{2520};$

ж) $100\frac{4}{11}:33=\left(99+1\frac{4}{11}\right):33=3+1\frac{4}{11}:33=3+\frac{15\cdot 1}{11\cdot 33}=$

$=3+\frac{5}{121}=3\frac{5}{121}.$

Сложе́ние

что? (*им. п.*) **име́ть что? (***вин. п.***)**

Чле́ны многочле́на $3x^2-x$ име́ют о́бщий мно́житель x.

Дроби $\frac{3}{7}$ и $\frac{2}{7}$ име́ют о́бщий знамена́тель 7.

Дроби $\frac{1}{4}$ и $\frac{5}{12}$ име́ют ра́зные знамена́тели 4 и 12.

а) Дро́би име́ют о́бщий знамена́тель.

Правило $\dfrac{a}{b} \pm \dfrac{c}{b} = \dfrac{a \pm c}{b}$.

Примеры:

1. $\dfrac{7}{19} + \dfrac{2}{19} + \dfrac{5}{19} = \dfrac{7+2+5}{19} = \dfrac{14}{19}$;

2. $\dfrac{8}{31} + \dfrac{11}{31} + \dfrac{6}{31} = \dfrac{8+11+6}{31} = \dfrac{25}{31}$;

3. $\dfrac{43}{103} + \dfrac{8}{103} + \dfrac{5}{103} + \dfrac{24}{103} = \dfrac{43+8+5+24}{103} = \dfrac{80}{103}$.

б) Дро́би име́ют ра́зные знамена́тели

Пра́вило. *Что́бы сложи́ть дро́би с ра́зными знамена́телями, их снача́ла ну́жно привести́ к о́бщему знамена́телю, а зате́м сложи́ть их по пра́вилу сложе́ния дробе́й с о́бщим знамена́телем.*

приводи́ть что? *(вин. п.)* **к чему́?** *(дат. п.)*

привести́ к о́бщему знамена́телю 1. to reduce fractions to comon a denominator; 2. réduire les fractions au dénominateur commún; 3. reducir las fracciones a un denominador común; 4. Einrichtung der Brüche; 5. 通分; 6.

Примеры:

1. $\dfrac{7^{(5}}{15} + \dfrac{11^{(3}}{25} = \dfrac{35}{75} + \dfrac{33}{75} = \dfrac{68}{75}$.

Результа́т запи́сываем так: $\dfrac{7^{(5}}{15} + \dfrac{11^{(3}}{25} = \dfrac{35+33}{75} = \dfrac{68}{75}$.

2. $\dfrac{13^{(10}}{24} + \dfrac{7^{(15}}{16} + \dfrac{19^{6}}{40} = \dfrac{130+105+114}{240} = \dfrac{349}{240} = 1\dfrac{109}{240}$.

3. $\dfrac{31^{(21}}{45} + \dfrac{4^{(15}}{63} + \dfrac{19^{(35}}{27} = \dfrac{651+60+665}{945} = \dfrac{1376}{945} = 1\dfrac{431}{945}$.

4. $\dfrac{43^{(13}}{44} + \dfrac{19^{(26}}{22} + \dfrac{140^{(4}}{143} = \dfrac{559+494+560}{572} = \dfrac{1613}{572} = 2\dfrac{469}{572}$.

Задание 1. Выполните действия.

а) $\frac{3}{8}\cdot\frac{1}{9}$; б) $4\frac{1}{8}\cdot 4$; в) $1\frac{1}{3}\cdot\frac{9}{16}$; г) $1\frac{7}{8}:8\frac{3}{4}$.

Задание 2. Найдите значение выражения.

а) $\frac{2^7\cdot 3^6}{2^6\cdot 3^4}$; б) $\frac{5^3\cdot 3^5}{5^5\cdot 3^2}$; в) $\frac{81\cdot 125}{3^3\cdot 5^2}$.

Задание 3. Найдите значение выражения.

а) $\frac{3}{7}+\frac{2}{7}$; б) $3\frac{2}{9}+15\frac{4}{9}$; в) $1+3\frac{4}{5}$;

г) $1-\frac{3}{4}$; д) $\frac{11}{43}-\frac{41}{43}$; е) $12-\frac{3}{5}$;

ж) $19\frac{2}{5}-5$; з) $15\frac{9}{11}-\frac{7}{11}$; и) $15\frac{1}{3}-\frac{2}{3}$.

Задание 4. Выполните действия.

а) $\frac{x}{3}+\frac{2}{3}$; б) $\frac{x}{5}+\frac{2x}{5}$; в) $\frac{x+5}{9}-\frac{x+2}{9}$;

г) $\frac{11x-5}{14x}+\frac{3x-2}{14x}$; д) $\frac{x}{6}-\frac{x+2}{6}$; е) $\frac{2x}{5}+\frac{16x}{5}$;

ж) $\frac{2}{x-2}+\frac{x}{x-2}$; з) $\frac{3}{x+3}+\frac{x}{x+3}$; и) $\frac{8}{3(x-1)}+\frac{1}{3(x-1)}$.

Задание 5. Найдите значение x.

а) $x+3=\frac{3}{11}$; б) $\frac{3}{25}+x=\frac{7}{25}$; в) $x-\frac{5}{8}=-\frac{7}{8}$;

г) $x+2=\frac{1}{7}$; д) $\frac{x}{3}-\frac{4}{5}=\frac{7}{15}$; е) $5x=1$.

Задание 6. При каком значении x выражение равно нулю?

а) $f(x)=\frac{3}{x+4}-\frac{x+2}{x+4}$; б) $f(x)=\frac{2x}{x-2}+\frac{4}{x-2}$.

Занятие 2 (дополнительное)

НОД и НОК ЦЕЛЫХ ЧИСЕЛ

Наибольший общий делитель (НОД)

Приме́ры:

1. Даны́ чи́сла: 245; 70; 140.
Найди́те *НОД* (245; 70; 140).
Реше́ние: $245=5\cdot 7\cdot \underline{\mathbf{7}}$
$70=2\cdot 5\cdot \underline{\mathbf{7}}$
$140=2\cdot 2\cdot 5\cdot \underline{\mathbf{7}}$

Вывод: У всех да́нных чи́сел есть два о́бщих просты́х дели́теля: 5 и 7.
Сле́довательно, *НОД* (245; 70; 140) = 7.

2. Найди́те *НОД* (32; 56; 24).
Реше́ние: $32 = 2\cdot 2\cdot \mathbf{2\cdot 2\cdot 2}$
$56 = \mathbf{2\cdot 2\cdot 2}\cdot 7$
$24 = 3\cdot \mathbf{2\cdot 2\cdot 2}$
Сле́довательно, *НОД* (32; 56; 24)= 2·2·2 = 8.

3. Найди́те *НОД* (60; 350; 640).
Реше́ние: $60 = 2\cdot \mathbf{2}\cdot 3\cdot \mathbf{5}$
$350 = \mathbf{2\cdot 5}\ 5\cdot 7$
$640 = 2\cdot 2\cdot 2\cdot 2\cdot 2\cdot 2\cdot \mathbf{2\cdot 5}$
НОД (60; 350; 640) = 2·5 = 10.

4. Найди́те *НОД* (75; 80; 27).
Реше́ние: $75 = 3\cdot 5\cdot 5$
$80 = 2\cdot 2\cdot 2\cdot 2\cdot 5$
$27 = 3\cdot 3\cdot 3.$

Вы́вод: У да́нных чи́сел нет ни одного́ о́бщего просто́го дели́теля. Сле́довательно, *НОД* (75; 80; 27) = 1.

Определе́ние

Те чи́сла, для кото́рых наибо́льший о́бщий дели́тель ра́вен едини́це, называ́ют **взаи́мно просты́ми**.

Два (или более) *натуральных числа называются взаимно простыми, если у них нет общих делителей, кроме единицы*.

Примеры:

1. Даны числа 40; 60; 180; 20.
Каждое из этих чисел делится на 20, следовательно, *НОД* (40; 60; 180; 20) = 20.

2. *НОД* (1500; 2000; 500; 6000) = 500.

Если среди заданных чисел имеется простое число и хотя бы одно из остальных чисел на него не делится, то такие числа являются взаимно простыми.

Примеры:

1. Даны числа: 26; 40; 5.
Найдите *НОД* (26; 40; 5).
Решение: 26 не делится на 5, а 5 – простое число, следовательно, НОД (26; 40; 5) = 1.

2. Найдите *НОД* (17; 20; 104).
Решение: 17 – простое число, 20 не делится на 17, следовательно, *НОД* (17; 20; 104) = 1.

Определение

Наибольший общий делитель нескольких натуральных чисел – это самое большое натуральное число, на которое делится каждое число совокупности.

Правило:

Чтобы найти НОД нескольких чисел, нужно каждое из них разложить на простые делители (иногда говорят: на простые множители); выяснить, какие из простых делителей являются общими, а затем все общие делители перемножить.

Наименьшее общее кратное (НОК)

Даны два натуральных числа, например, 20 и 12.
Рассмотрим несколько чисел, **кратных** числу 20:
20; 40; 60; 80; 100; 120; 140; 160 и т.д.

и не́сколько чи́сел, **кра́тных** числу́ 12:

12; 24; 36; 48; 60; 72; 84; 96; 108; 120 и т.д.

В э́тих двух мно́жествах име́ются чи́сла, кото́рые явля́ются о́бщими кра́тными для 20 и 12 – э́то чи́сла 60 и 120 (но существу́ют и други́е: 180;240;300;360;..).

Общих кра́тных для чи́сел 20 и 12 существу́ет бесчи́сленное мно́жество. Са́мое наименьшее́ из них 60. Его называ́ют **наиме́ньшим о́бщим кра́тным** чи́сел 20 и 12 и обозна́чают так:

НОК (20; 12) = 60.

Определение. *Наиме́ньшим о́бщим кра́тным не́скольких чи́сел называ́ется наиме́ньшее из натура́льных чи́сел, кото́рое де́лится на ка́ждое из да́нных чи́сел.*

*Наиме́ньшее о́бщее кра́тное чи́сел **a** и **b** обознача́ют НОК (**a**; **b**).*

Примеры:

1. *НОК* (60; 120; 300) = 600
2. *НОК* (70; 30; 420) = 420
3. *НОК* (1; 2; 15) = 30
4. *НОК* (80; 40) = 80

Правило:

Что́бы найти́ НОК не́скольких чи́сел, ну́жно разложи́ть на просты́е дели́тели (мно́жители) ка́ждое из э́тих чи́сел, взять одно́ из э́тих разложе́ний и доба́вить к нему́ недостаю́щие просты́е сомно́жители из други́х разложе́ний.

Примеры:

1. Найди́те *НОК* (80; 48).

Реше́ние: 80 = 2·2·2·2·5
48 = 2·2·2·2·3.

Возьмём пе́рвое из разложе́ний: 2·2·2·2·5 и доба́вим из второ́го разложе́ния недостаю́щий мно́житель 3. Полу́чим: 80·3 = 240. Сле́довательно,

НОК (80;48)=240.

2. Найдите *НОК* (30; 75; 24).

Решение: $30 = 2\cdot3\cdot5$; $75 = 3\cdot5\cdot5$; $24 = 2\cdot2\cdot2\cdot3$.

Возьмём одно из разложений, например, $2\cdot3\cdot5$; из второго разложения добавим недостающий множитель 5; получилось: $2\cdot3\cdot5\cdot5$. В разложении третьего числа имеются ещё два множителя (“двойки”), которых в произведении $2\cdot3\cdot5\cdot5$ нет. Добавим их: $2\cdot3\cdot5\cdot5\cdot2\cdot2$.

Получим: 600. Итак, *НОК* (30; 75; 24) = 600.

3. Найдите *НОК* (50; 40; 35).

Решение: $50 = 2\cdot5\cdot5$

$40 = 2\cdot2\cdot2\cdot5$

$35 = 5\cdot7$.

К первому разложению $2\cdot5\cdot5$ из второго добавим две “двойки” (в первом была только одна “двойка”, а во втором их три); получилось: $2\cdot5\cdot5\cdot2\cdot2$. Теперь из третьего разложения добавим недостающий множитель “семь”. Получим: *НОК* (50;40;35) = $2\cdot5\cdot5\cdot2\cdot2\cdot7 = 1400$.

Легко понять, что *если одно из данных чисел делится на каждое из остальных, то оно и является наименьшим общим кратным всех этих чисел*.

Примеры:

1. *НОК* (600; 50; 100) = 600

2. *НОК* (350; 70; 25) = 350

3. *НОК* (80; 16; 20) = 80.

Заня́тие 6.

АРИФМЕТИЧЕСКИЕ ДЕЙСТВИЯ С ДРОБЯМИ

Вычита́ние

Пра́вила вычита́ния дробей во мно́гом аналоги́чны пра́вилам сложе́ния дробе́й и проиллюстри́рованы сле́дующими приме́рами.

Дро́би $\frac{1}{3}, \frac{2}{15}, \frac{5}{6}$ име́ют ра́зные знамена́тели.

Эти дро́би мо́жно привести́ к о́бщему знамена́телю.

$$\frac{1}{3}=\frac{1\cdot 10}{3\cdot 10}=\frac{10}{30}; \quad \frac{2}{15}=\frac{2\cdot 2}{15\cdot 2}=\frac{4}{30}; \quad \frac{5}{6}=\frac{5\cdot 5}{6\cdot 5}=\frac{25}{30}.$$

30 – о́бщий знамена́тель (наиме́ньший).

Примеры:

1. $\frac{23}{28}-\frac{5}{28}=\frac{23-5}{28}=\frac{18}{28}=\frac{9}{14}$; **2.** $\frac{43}{47}-\frac{4}{47}=\frac{43-4}{47}=\frac{39}{47}$;

3. $\frac{51}{61}-\frac{17}{61}=\frac{51-17}{61}=\frac{34}{61}$; **4.** $\frac{7}{8}-\frac{1^{(4}}{2}=\frac{7}{8}-\frac{4}{8}=\frac{7-4}{8}=\frac{3}{8}$;

5. $\frac{14^{(3}}{15}-\frac{2^{(5}}{9}=\frac{42-10}{45}=\frac{32}{45}$; **6.** $\frac{25^{(5}}{28}-\frac{3^{(2}}{70}=\frac{125-6}{140}=\frac{119}{140}$;

7. $\frac{9^{(5}}{32}-\frac{11^{(2}}{80}=\frac{45-22}{160}=\frac{23}{160}$.

Для выполн́ния сложе́ния и вычита́ния сме́шанных чи́сел внима́тельно изучи́те приведённые ни́же приме́ры.

1. $7\frac{4}{15}+23\frac{7}{15}=30\frac{4+7}{15}=30\frac{11}{15}$;

2. $40\frac{5}{6}-13\frac{1}{6}=27\frac{5}{6}-\frac{1}{6}=27\frac{5-1}{6}=27\frac{4}{6}=27\frac{2}{3}$;

3. $8\frac{5}{9}-5\frac{7}{9}=3\frac{5}{9}-\frac{7}{9}=2+1\frac{5}{9}-\frac{7}{9}=2+\frac{14-7}{9}=2\frac{7}{9}$;

4. $34\frac{2}{3}+106\frac{5}{8}=140\frac{2}{3}+\frac{5}{8}=140\frac{16+15}{24}=140\frac{31}{24}=141\frac{7}{24}$;

5. $215\frac{7}{9}-103\frac{4}{15}=112\frac{7^{(5}}{9}-\frac{4^{(3}}{15}=112\frac{35-12}{45}=112\frac{23}{45}$;

6. $17\frac{3}{16}-10\frac{11}{12}=7\frac{3}{16}-\frac{11}{12}=7\frac{9}{48}-\frac{44}{48}=6+1\frac{9}{48}-\frac{44}{48}=$

$=6\frac{57-44}{48}=6\frac{13}{48}$.

Задание 1. Выполни́те действия.

а) $\frac{5}{6}+\frac{7}{12}$; б) $\frac{7}{60}-\frac{2}{3}$; в) $\frac{17}{18}-\frac{5}{9}$; г) $\frac{11}{60}-\frac{7}{20}$;

д) $5\frac{1}{2}+2\frac{3}{8}$; е) $3\frac{2}{5}-1\frac{3}{20}$; ж) $7\frac{13}{16}-6\frac{3}{4}$; з) $-1\frac{3}{4}-1\frac{3}{16}$.

Задание 2. Запиши́те в ви́де дро́би.

а) $\frac{a+2}{a^2}-\frac{a-3}{a}$; б) $\frac{5x-3}{6x}-\frac{x-2}{2}$; в) $x+\frac{1}{x}$;

г) $5x^2-\frac{15x^2-1}{3}$; д) $x-\frac{x-1}{2}+\frac{x+3}{4}$; е) $\frac{2a^2-1}{a}-a+5$

Задание 3. Найди́те значе́ние выраже́ния.

а) $\frac{5}{7}+\frac{1}{2}$; б) $\frac{8}{11}-\frac{5}{7}$; в) $\frac{23}{48}-\frac{3}{8}$;

г) $-\frac{1}{6}-\frac{1}{15}$; д) $-\frac{1}{42}-\frac{2}{63}$; е) $\frac{3}{55}-\frac{21}{22}$.

Задание 4. Запиши́те в ви́де дро́би.

а) $\frac{4}{x+2}-\frac{3}{x-2}+\frac{12}{x^2-4}$; б) $\frac{a}{a-6}-\frac{3}{a+6}+\frac{a^2}{36-a^2}$;

в) $\frac{3}{x^2-3x}+\frac{x^2}{x-3}$; г) $\frac{1}{(x-3)^2}-\frac{2}{x^2-9}+\frac{1}{(x+3)^2}$;

д) $\frac{3}{(x-2)^2}-\frac{x}{2-x}$.

Задание 5. При како́м значе́нии x выраже́ние равно́ нулю?

а) $f(x)=\frac{1}{x+4}+\frac{2}{x-5}$; б) $f(x)=\frac{5x-2}{4-x^2}-\frac{1}{x-2}+\frac{5}{x}$.

Задание 6. Выполните действия.

а) $4\frac{6}{11}\cdot\left(1\frac{1}{5}+4\frac{1}{2}\right)$; б) $-1\frac{1}{2}+\frac{3}{10}\cdot\left(\frac{8}{15}-1\frac{7}{10}+\frac{1}{6}\right)$;

в) $-\frac{3}{26}\cdot4\frac{1}{3}-4\frac{1}{2}\cdot\left(3\frac{17}{36}-5\frac{7}{12}\right)$; г) $\frac{1}{5}+1\frac{4}{5}\cdot\left(\frac{4}{9}-1\frac{1}{5}+\frac{1}{6}\right)$.

Задание 7. Вы́полните де́йствия.

а) $\frac{3}{15}+\frac{7}{20}+\frac{4}{21}$; б) $23\frac{4}{9}+5\frac{1}{3}+11\frac{1}{12}$; в) $50\frac{3}{20}+45\frac{7}{36}+31\frac{5}{18}$;

г) $123\frac{5}{24}+71\frac{61}{120}+3\frac{5}{8}$; д) $415\frac{7}{13}+12\frac{5}{6}+20\frac{21}{26}$;

е) $65\frac{7}{22}+10\frac{3}{55}+43\frac{15}{77}$; ё) $16-\frac{7}{12}$; ж) $8\frac{1}{2}-4\frac{7}{23}$;

з) $26\frac{3}{8}-5\frac{5}{12}$; и) $104\frac{35}{48}-20\frac{13}{28}$; к) $45\frac{9}{13}-10\frac{12}{17}$;

л) $43\frac{7}{18}-25\frac{17}{20}$; м) $38\frac{8}{11}-17\frac{14}{15}$; н) $6\frac{2}{3}+11\frac{7}{8}-12\frac{3}{16}$;

о) $40\frac{4}{15}+19\frac{13}{20}-33\frac{19}{35}$; п) $107\frac{3}{8}+16\frac{7}{20}-40\frac{7}{15}$;

р) $65\frac{1}{2}-9\frac{1}{4}+7\frac{3}{4}$; с) $34\frac{5}{8}-20\frac{7}{9}+2\frac{1}{3}$.

Задание 8. Вы́полните действия.

а) $\frac{7}{15}\cdot\frac{25}{28}$; б) $\frac{14}{23}\cdot\frac{46}{63}$; в) $\frac{20}{33}\cdot\frac{11}{16}$; г) $4\frac{1}{3}\cdot\frac{5}{13}$;

д) $15\frac{2}{3}\cdot\frac{25}{47}$; е) $2\frac{3}{5}\cdot\frac{35}{39}$; ё) $\frac{6}{17}\cdot4\frac{1}{4}$; ж) $\frac{5}{8}\cdot1\frac{3}{10}\cdot\frac{2}{13}$;

з) $\frac{26}{27}\cdot5\frac{2}{5}\cdot1\frac{1}{4}$; и) $\left(\frac{4}{5}+\frac{7}{8}\right)\cdot\frac{20}{21}$; к) $\left(1\frac{7}{9}+3\frac{1}{2}\right)\cdot\frac{36}{37}$;

л) $\left(5\frac{2}{7}-1\frac{3}{14}\right)\cdot\frac{28}{29}$; м) $\left(20\frac{7}{8}-15\frac{1}{2}\right)\cdot\frac{8}{9}$; н) $\left(38\frac{1}{2}-6\frac{5}{9}\right)\cdot\frac{18}{19}$;

о) $\frac{23}{41}:2\frac{3}{10}$; п) $\frac{5}{16}:2\frac{1}{2}$; р) $2\frac{7}{12}:\frac{31}{32}$;

с) $25\frac{2}{3}:\frac{22}{27}$; т) $24\frac{5}{6}:14\frac{9}{10}$; у) $\left(8\frac{7}{12}+3\frac{5}{6}-1\frac{1}{3}\right):\frac{7}{18}$;

ф) $\left(23\frac{8}{9}+\frac{5}{21}-\frac{109}{126}\right)\cdot\frac{63}{64}$; х) $5\frac{3}{7}:1\frac{20}{21}$;

ц) $\left(12\frac{7}{8}-1\frac{15}{16}+3\frac{13}{24}\right):\frac{5}{48}$; ч) $\left(3\frac{1}{8}:2\frac{1}{2}+10\frac{1}{4}\right):3\frac{1}{2}$;

ш) $3\frac{1}{8}:2\frac{1}{2}+10\frac{1}{4}:3\frac{1}{2}$; щ) $14-5\frac{1}{2}:\frac{11}{12}$.

Задание 9. Вы́полните действия.

а) $\left(\left(\frac{7}{9}-\frac{47}{72}\right):1\frac{1}{4}+\frac{7}{40}\right):\left(\frac{179}{500}-\frac{27}{250}\right)\cdot1\frac{3}{5}-\frac{19}{25}$;

б) $\dfrac{\left(\frac{1}{6}+\frac{1}{10}+\frac{1}{15}\right):\left(\frac{1}{6}+\frac{1}{10}-\frac{1}{15}\right)\cdot2\frac{13}{25}}{\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{3}+\frac{1}{4}-\frac{1}{5}\right):\left(\frac{1}{4}-\frac{1}{6}\right)\cdot\frac{7}{13}}$;

в) $\left(16\frac{1}{2}-13\frac{7}{9}\right)\cdot\frac{18}{33}+\left(\frac{8}{33}-\frac{1}{11}\right)\cdot2\frac{1}{5}+\frac{2}{11}$;

г) $\left(2:3\frac{1}{5}+\left(3\frac{1}{4}:13\right):\frac{2}{3}+\left(2\frac{5}{18}-\frac{17}{36}\right)\cdot\frac{18}{65}\right)\cdot\frac{1}{3}$;

д) $\left(520\cdot\frac{43}{100}:\frac{13}{50}-217+2\frac{3}{7}\right)-\left(31\frac{1}{2}:12\frac{3}{5}+114\cdot2\frac{1}{3}+61\frac{1}{2}\right)$;

е) $\left(\dfrac{3\frac{3}{4}+2\frac{1}{2}}{2\frac{1}{2}-1\frac{7}{8}}-\dfrac{2\frac{3}{4}+1\frac{1}{2}}{2\frac{3}{4}-1\frac{1}{2}}\right)\cdot\frac{10}{11}$; ж) $\dfrac{\left(2\frac{38}{45}-\frac{1}{15}\right):13\frac{8}{9}+3\frac{3}{65}\cdot\frac{26}{99}}{\left(18\frac{1}{2}-13\frac{7}{9}\right)\cdot\frac{1}{85}}$;

з) $\dfrac{\left(\dfrac{13}{44}-\dfrac{2}{11}-\dfrac{5}{66}:2\dfrac{1}{2}\right)\cdot 1\dfrac{1}{5}}{3\dfrac{1}{5}+\left(5\dfrac{1}{2}-3\dfrac{1}{4}\right)\cdot\dfrac{4}{5}}$;

и) $\left(\left(3\dfrac{7}{12}-2\dfrac{11}{18}+2\dfrac{1}{24}\right)\cdot 1\dfrac{5}{31}-\left(2\dfrac{1}{2}+\dfrac{5}{6}\right)\cdot\dfrac{3}{52}\right):1\dfrac{7}{13}$;

к) $\dfrac{19}{84}:\left(5\dfrac{13}{42}-2\dfrac{13}{29}+\dfrac{5}{24}\right)+1\dfrac{2}{27}-\dfrac{1}{3}\cdot\dfrac{4}{9}$.

Обратные дроби

Если числи́тель пе́рвой дро́би явля́ется знамена́телем второ́й, а знамена́тель пе́рвой явля́ется числи́телем второ́й, то таки́е дро́би называ́ются обра́тными.

Приме́ры обра́тных дробе́й: $\dfrac{7}{8}$ и $\dfrac{8}{7}$; $\dfrac{3}{5}$ и $\dfrac{5}{3}$; $\dfrac{6}{11}$ и $\dfrac{11}{6}$; $\dfrac{43}{100}$ и $\dfrac{100}{43}$. Очеви́дно, е́сли дробь явля́ется пра́вильной, то обра́тная к ней бу́дет непра́вильной дро́бью.

Если дробь равна́ едини́це ($\dfrac{7}{7}$ или $\dfrac{5}{5}$ или $\dfrac{13}{13}$ и т.д.), то и обра́тная дробь то́же равна́ едини́це.

Задание 10. Ве́рно ли, что дробь, обра́тная непра́вильной, явля́ется пра́вильной дро́бью?

Здание 11. Найди́те дро́би, обра́тные к сле́дующим дробя́м.

$$\frac{8}{43};\ \frac{51}{18};\ \frac{29}{30};\ \frac{4}{17};\ \frac{1}{6};\ \frac{5}{9};\ \frac{13}{13};\ \frac{15}{1};\ \frac{7}{12}.$$

Задание 12. Если дробь явля́ется несократи́мой, то мо́жно ли сократи́ть обра́тную?

Зада́ние 13. Сме́шанные чи́сла предста́вьте в ви́де неправи́льных дро́бей, а зате́м найди́те обра́тные к ним дро́би.

$$8\frac{1}{3};\ 14\frac{1}{2};\ 3\frac{2}{9};\ 2\frac{15}{17};\ 20\frac{1}{3};\ 7\frac{5}{9};\ 4\frac{3}{13};\ 6\frac{15}{16};\ 5\frac{7}{12}.$$

Вы́полните зада́ние по образцу́:

$5\frac{2}{7}=\frac{37}{7}$; $\frac{7}{37}$ – *обра́тная дробь.*

Заня́тие 7.

ДЕСЯТИЧНЫЕ ДРОБИ. РАЦИОНАЛЬНЫЕ ЧИСЛА

Десяти́чные дро́би

$\frac{2}{5}$ – э́то обыкнове́нная дро́бь;

$\frac{2}{5} = \frac{4}{10} = 0{,}4$ э́то десяти́чная дро́бь.

Чита́йте дро́би:

0,1 – ноль це́лых, одна́ деся́тая.
0,01 – ноль це́лых, одна́ со́тая.
0,2 – ноль це́лых, две деся́тых.
0,02 – ноль це́лых, две со́тых.
0,3 – ноль це́лых, три деся́тых.
1,5 – одна́ це́лая, пять деся́тых.
1,89 – одна́ це́лая, во́семьдесят девя́ть со́тых.
2,3 – две це́лых, три деся́тых.

Упражне́ние 1. Чита́йте дро́би.

2,3; 2,34; 5,1; –3,07; $\frac{8}{9}$; $-\frac{3}{4}$; $\frac{a}{3}$; $\frac{-x}{2}$; $\frac{-3}{x+2}$; 0,17; $\frac{x+4}{5}$.

Зада́ние 1. Найди́те значе́ние выраже́ния.

а) $\dfrac{74{,}55}{35}$; б) $\dfrac{3{,}825}{85}$; в) $\dfrac{0{,}12}{0{,}4}$; г) $\dfrac{0{,}035}{0{,}05}$;

д) $\dfrac{2{,}856}{1{,}4}-2{,}4$; е) $\dfrac{1{,}696}{1{,}6}-1{,}9$.

Зада́ние 2. Найди́те значе́ние выраже́ния.

а) $\dfrac{1{,}2\cdot 0{,}6-1{,}2}{1^2-0{,}2^2}$; б) $\dfrac{0{,}8\cdot 0{,}4+0{,}8}{5{,}5^2-1{,}5^2}$; в) $\dfrac{4{,}5^2-1{,}5^2}{0{,}3\cdot 0{,}7-0{,}3}$;

г) $\dfrac{1{,}2^2-1{,}8^2}{1{,}2\cdot 0{,}2-1{,}2\cdot 0{,}8}$; д) $\dfrac{0{,}2^2-2\cdot 0{,}2\cdot 0{,}3+0{,}3^2}{0{,}5\cdot 0{,}9-0{,}5}$;

е) $\left(1\dfrac{2}{3}\right)^2-2\cdot 1\dfrac{2}{3}\cdot\dfrac{2}{3}+\left(\dfrac{2}{3}\right)^2$.

Коне́чные и бесконе́чные десяти́чные дро́би

Дробь $\dfrac{3}{4}=3:4=0{,}75$ – э́то коне́чная десяти́чная дробь.

Дробь $\dfrac{2}{3}=2:3=0{,}666...$ – э́то бесконе́чная десяти́чная дробь.

0,(6) Чита́ется: ноль це́лых, 6 в пери́оде; 6 – э́то пери́од.

коне́чн‖ый, -ая, -ое; -ые. 1. finite; 2. fini; 3. finito, final; 4. finit; 5. 有窮的,有限的, （有穷的，有限的）; 6.

бесконе́чн‖ый, -ая, -ое; -ые. 1. infinite; 2. infini; 3. infinito; 4. infinit; 5. 無限的, 無窮的 , (无限的，无穷的); 6.

бесконе́чность, –и 1. infinity; 2. infini, m; 3. infinito, m; 4. Infinitum, m; 5. 無窮(大), 無線(大), 无穷（大），无限（大））; 6.

Упражне́ние 2. Чита́йте.

0,1(2) – ноль це́лых, одна́ деся́тая, два в пери́оде.

3,(7) – три це́лых, семь в пери́оде.
2,4(3) – две це́лых, четы́ре деся́тых, три в пери́оде.

пери́од, –ы 1. period; 2. périoe, f; 3. period, f;
4. Periode, f; 5. 周期, (周期); 6.
периоди́чность, –и 1. periodicity; 2. périodicité, f;
3. periodicidad,f; 4. Periodizität, f; 5.周期性 (周期性); 6.
непериоди́ческ‖ий, -ая, -ое; -ие. 1. non-periodic;
2. non périodeques; 3.no periódico; 4. nichtperiodich;
5. 非周期的; 非周期的；6.

Зада́ние 3. Найди́те значе́ние выраже́ния.

а) $\left(\frac{2}{3}:3-1\right)\cdot 1{,}5^2$; б) $325\cdot(-0{,}2)^3+1\frac{2}{3}$; в) $0{,}9\cdot 1\frac{2}{5}-1{,}4^2$;

г) $\frac{0{,}2}{0{,}8}+\frac{4}{9}\cdot\left(-1\frac{1}{2}\right)^3$; д) $1\frac{5}{6}-0{,}5\cdot 2{,}8$; е) $(-1{,}6)^2\cdot\frac{5}{8}+\frac{2}{3}\cdot 1\frac{3}{5}$.

Рациона́льные чи́сла

Чи́сла ви́да $\frac{p}{q}$, где $p\in Z$, $q\in N$ – э́то рациона́льные чи́сла.

Утвержде́ние. Любо́е рациона́льное число́ – это коне́чная и́ли бесконе́чная периоди́ческая десяти́чная дробь.

Приме́р: $\frac{3}{4}=0{,}75$; $\frac{1}{3}=0{,}333...=0,(3)$.

Определе́ние. Число́ называ́ется действи́тельным, е́сли оно явля́ется и́ли бесконе́чной непериоди́ческой, и́ли бесконе́чной периоди́ческой десяти́чной дро́бью.

Мно́жество действи́тельных чи́сел обознача́ется ***R***.

Приме́ры бесконе́чных непериоди́ческих десяти́чных дробе́й:
π = 3,1415929…

e = 2,7182818284590… – число Не́пера
0,0100110001110000111100000011111…

Перево́д обыкнове́нной дро́би в десяти́чную дробь и обра́тно

Если числи́тель обыкнове́нной дро́би разде́лить на знамена́тель, то полу́чится десяти́чная дробь (коне́чная ли́бо бесконе́чная периоди́ческая).

Примеры:

$$\frac{5}{8}=0{,}625,\quad \frac{7}{40}=0{,}175,\quad \frac{13}{16}=0{,}8125,\quad \frac{19}{15}=1{,}26666\ldots=1{,}2(6),$$

$$\frac{8}{9}=0{,}8888\ldots=0,(8),\quad \frac{5}{7}=0,(714285),\quad \frac{17}{11}=1,(54).$$

Для перево́да коне́чной десяти́чной дро́би в обыкнове́нную поступа́ют так:

а) $4,72=4\frac{72}{100}=4\frac{18}{25}$; **б)** $13,65=13\frac{65}{100}=13\frac{13}{20}$;

в) $1,884=1\frac{884}{1000}=1\frac{221}{250}$; **г)** $5,25=5\frac{25}{100}=5\frac{1}{4}$;

д) $15,8=15\frac{8}{10}=15\frac{4}{5}$.

Существу́ет та́кже пра́вило перево́да десяти́чной периоди́ческой дро́би в обыкнове́нную. В ка́честве упражне́ния рассмотри́те э́ти приме́ры и сформули́руйте пра́вило перево́да десяти́чной периоди́ческой дро́би в обыкнове́нную.

Примеры:

а) $6{,}3(51)=6\frac{351-3}{990}=6\frac{348}{990}=6\frac{174}{495}$;

б) $18{,}24(3)=18\frac{243-24}{900}=18\frac{219}{900}=18\frac{73}{300}$;

в) $25{,}138(4)=25\frac{1384-138}{9000}=25\frac{1246}{9000}=25\frac{623}{4500}$;

г) $0{,}65(471) = \dfrac{65471-65}{99900} = \dfrac{65406}{99900} = \dfrac{10901}{16650}$;

д) $0{,}7(307) = \dfrac{7307-7}{9990} = \dfrac{7300}{9990} = \dfrac{730}{999}$.

сформули́ровать (что?) 1. formulate; 2. formuler; 3. formular; 4. formulieren; 5. 表達出,說出,表示出來; 6.

Зада́ние 4. Обрати́те сле́дующие дро́би.

а) 0,4; 1,15; 0,125; 3,784; 0,(37); 1,27(41); 0,139(235); 2,243(1043);

б) $\dfrac{5}{7}$; $\dfrac{15}{37}$; $\dfrac{11}{7}$; $\dfrac{45}{13}$; $\dfrac{13}{6}$.

Занятие 8.
ЧИСЛОВЫЕ МНОЖЕСТВА

Мно́жество натура́льных чи́сел – э́то мно́жество $\boldsymbol{N} = \{1, 2, 3, 4, 5, \ldots, n, \ldots\}$.

Мно́жество це́лых чи́сел – э́то мно́жество $\boldsymbol{Z} = \{0, \pm 1, \pm 2, \pm 3, \pm 4, \pm 5, \ldots\}$.

$\boldsymbol{Q} = \left\{ \dfrac{p}{q}, \text{ где } p \in Z, q \in N \right\}$ – э́то мно́жество рациона́льных чи́сел.

Мно́жество действи́тельных чи́сел состои́т из объедине́ния мно́жества рациона́льных чи́сел и мно́жества бесконе́чных десяти́чных непериоди́ческих дробе́й.

Упражнение 1. Читайте.

$\dfrac{3}{4}$ – э́то рациона́льное число́.

$-\dfrac{5}{8} = \dfrac{-5}{8}$ – э́то рациона́льное число́.

$-7=\dfrac{-7}{1}$ – это рациональное число.

$0{,}3=\dfrac{3}{10}$ – э́то рациона́льное число́.

$-5\in Q$ (−5 – рациона́льное число́).

$-2\in Q,\ -2\in Z,\ 5\in Z,\ 5\in N$.

Опера́ции над мно́жествами

Упражнение 2.

1. Ско́лько опера́ций (арифмети́ческих де́йствий) с натура́льными чи́слами вы зна́ете?

2. Бу́дет ли су́мма натура́льных чи́сел натура́льным число́м?

3. Бу́дет ли ра́зность натура́льных чи́сел натура́льным число́м?

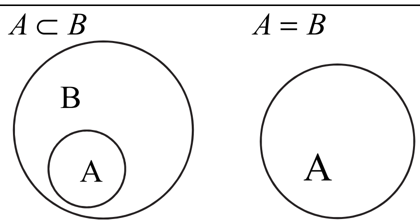
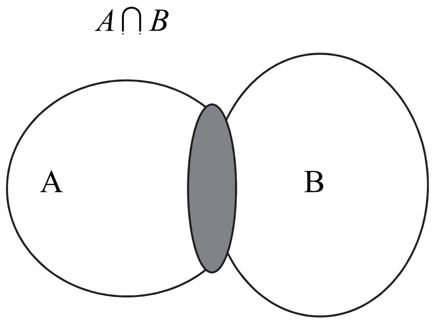
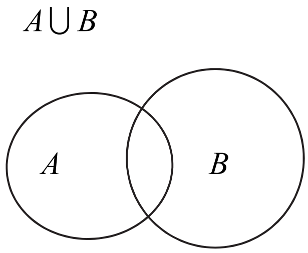
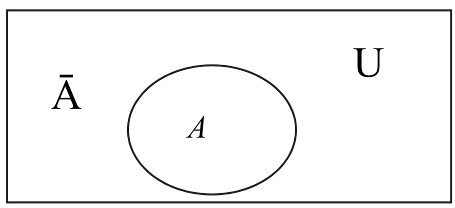
4. Ве́рно ли утвержде́ние, что ра́зность це́лых чи́сел явля́ется це́лым число́м?

5. Ве́рно ли математи́ческое предложе́ние: Ча́стное це́лых чи́сел явля́ется це́лым число́м?

6. Ве́рно ли утвержде́ние, что произведе́ние рациона́льных чи́сел явля́ется це́лым число́м?

7. Ве́рно ли утвержде́ние, что ча́стное це́лых чи́сел явля́ется рациона́льным число́м?

Над множества́ми мо́жно выполня́ть действия, как и над чи́слами. В табли́це приве́дены э́ти опера́ции. В пе́рвой коло́нке – назва́ния опера́ций. Во второ́й коло́нке – их обозначе́ния. В тре́тьей коло́нке табли́цы даны́ диагра́ммы Эйлера – Венна.

Назва́ние операции	Обозначе́ние	Диагра́ммы
Включе́ние	$A \subseteq B$ $A \supseteq B$	
Пересе-че́ние	$A \bigcap B$	
Объедине́-ние	$A \bigcup B$	
Допол-не́ние	$\overline{A} = U \setminus A$	

Определения.

Су́мма мно́жеств и́ли объедине́ние мно́жеств *X* и ***Y*** – это множество, которое состоит из всех элементов множеств X и Y.

Символи́чески э́то определе́ние запи́сывается так:

$X \cup Y = \{ x \mid x \in X \vee x \in Y \}$.

Пересече́нием мно́жеств X и **Y** называ́ется мно́жество, кото́рое состои́т из всех элеме́нтов, принадлежа́щих мно́жеству X и мно́жеству Y.

Символи́чески э́то определе́ние запи́сывается так:

$X \cap Y = \{ x \mid x \in X \wedge x \in Y \}$.

Ра́зностью двух мно́жеств ***X*** и ***Y*** называ́ется мно́жество элеме́нтов, принадлежа́щих X, но не принадлежа́щих Y. Обознача́ется оно $X \setminus Y$.

Символи́чески э́то определе́ние записыва́ется так:

$X \setminus Y = \{ x \mid x \in X \wedge x \notin Y \}$.

Симметри́ческой ра́зностью двух мно́жеств ***X*** и ***Y*** называ́ется мно́жество, кото́рое состои́т из элеме́нтов, принадлежа́щих X, но не принадлежа́щих Y, ли́бо элеме́нтов, принадлежа́щих Y, но не принадлежа́щих X.

Обозначение: $X \Delta Y$.

Символи́чески э́то определе́ние мо́жно записа́ть:

$X \Delta Y = \{ x \mid (x \in X \wedge x \notin Y) \vee (x \notin X \wedge x \in Y) \}$.

Из определе́ния непосре́дственно сле́дует, что

$X \Delta Y = (X \setminus Y) \cup (Y \setminus X)$.

принадлежа́ть (*чему?***)** 1. belong; 2. appartenir; 3. pertenecer; 4.gehören, zukommen; 5. 屬于,（属于）;6.

Числовы́е мно́жества

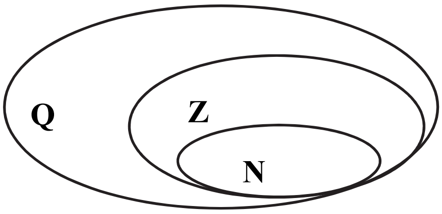
$N \subset Z$ (Z соде́ржит N). Чита́ется мно́жество ***N*** явля́ется подмно́жеством мно́жества ***Z***.

Упражнение 3. Прочита́йте сле́дующие выска́зывания по образцу́.

Образец: $\boldsymbol{N} \subset \boldsymbol{Z}$. Мно́жество $\boldsymbol{N}$ явля́ется подмно́жеством мно́жества $\boldsymbol{Z}$.

$\boldsymbol{N} \subset \boldsymbol{Q}$; $\boldsymbol{Z} \subset \boldsymbol{Q}$.

рациона́льн‖ый, -ая, -ое, -ые
рациона́льное число́
рациона́льные чи́сла



После́довательность расшире́ния числовы́х мно́жеств
$\boldsymbol{N} \subset \boldsymbol{Z} \subset \boldsymbol{Q} \subset \boldsymbol{R} \subset \boldsymbol{C}$

Мно́жество натура́льных чи́сел явля́ется подмно́жеством мно́жества це́лых чи́сел.

Мно́жество це́лых чи́сел явля́ется подмно́жеством мно́жества рациона́льных чи́сел.

Мно́жество рациона́льных чи́сел явля́ется подмно́жеством мно́жества действи́тельных чи́сел.

Мно́жество действи́тельных чи́сел явля́ется подмно́жеством мно́жества комплексных чи́сел.

Пусто́е мно́жество принадлежи́т любо́му мно́жеству.

$\boldsymbol{N}$ – мно́жество натура́льных чи́сел;
$\boldsymbol{Z}$ – множество целых чисел;
$\boldsymbol{Q}$ – мно́жество рациона́льных чи́сел;
$\boldsymbol{R}$ – мно́жество действи́тельных чи́сел;
$\boldsymbol{C}$ – мно́жество комплексных чисе́л.
$\varnothing$ – пусто́е мно́жество.

Классифика́ция числовы́х промежу́тков:

$a \le c \le b$ – **отре́зок**, $\{c \mid c \in [a;b]\}$: Чита́ется: мно́жество чи́сел c, принадлежа́щих отре́зку a b.

$a < c < b$ – **интерва́л,** $\{c \mid c \in (a;b)\}$: Чита́ется: мно́жество чи́сел *c*, принадлежа́щих интерва́лу *a b*.
$a \le c < b$ – **полуинтерва́л** $\{c \mid c \in [a;b)\}$: Чита́ется: мно́жество чи́сел *c*, принадлежа́щих полуинтерва́лу *a b*.
$a < c \le b$ – **полуинтерва́л** $\{c \mid c \in (a;b]\}$: Чита́ется: мно́жество чи́сел *c*, принадлежа́щих полуинтерва́лу *a b*.

интерва́л, –ы 1.interval; 2. intervalle, m; 3. intervalo, m; 4. Intervall, n; 5.區間, 間隔, （区间，间隔）； 6.
отре́зок, –и 1. segment; 2. segment, f; 3. segmento, m; 4. Segment, n; 5. 截斷, 截, 段, 截段, 線段 (截，截断，截段，段，线段)；6.

Упражнение 4. Перепиши́те табли́цу в тетра́дь. Запо́мните значе́ния э́тих зна́ков и вспо́мните определе́ния соотве́тствующих им опера́ций.

Знак	Действие
$X \cup Y$	Объедине́ние (су́мма) мно́жеств X и Y
$X \cap Y$	Пересече́ние (произведе́ние) мно́жеств X и Y
$X \backslash Y$	Ра́зность мно́жеств X и Y
$x \in X$	Элеме́нт x принадлежи́т мно́жеству X
$\{x \mid x \in Y\}$	Мно́жество элеме́нтов x таки́х, что x принадлежа́т множеству Y
$\{x \mid x \in X \vee x \in Y\}$	Элеме́нт x такой, что принадлежи́т множеству X или принадлежит множеству Y
$\{x \mid x \in X \wedge x \in Y\}$	Элемент x такой, что принадлежит мно́жеству X и принадлежи́т мно́жеству Y
$\{x \mid x \in X \wedge x \notin Y\}$	Элеме́нт x такой, что принадлежи́т мно́жеству X и не принадлежи́т мно́жеству Y

Упражнение 5. Прочита́йте сле́дующие математи́ческие предложе́ния:

$A \cup B$, $E \cap F$, $A \backslash C$, $t \in P$, $\{ y | y \in Y \}$, $\{x | x \in P \vee x \in Q\}$, $\{t | t \in X \wedge t \in Y\}$, $\{l | l \in Z \wedge l \notin L\}$.

Упражнение 6. Запиши́те символи́чески сле́дующие предложе́ния:

а) пересече́ние трёх мно́жеств Z, Y и X;
б) объедине́ние мно́жеств P и W;
в) дополне́ние мно́жества A до B;
г) ра́зность мно́жеств T и P.

Упражнение 7. Прочита́йте символи́ческую за́пись.

1. $A \cup B = \{ x | x \in A \vee x \in B \}$;
2. $E \cap F = \{ t | t \in E \wedge t \in F \}$;
3. $A \backslash C = \{ l | l \in A \wedge l \notin C \}$;
4. $\overline{A \cup B} = \{x | x \notin \overline{A} \wedge x \notin \overline{B}\}$.

Занятие 9.
ЧИСЛОВАЯ ПРЯМАЯ

Числова́я пряма́я (координа́тная пряма́я)

M N

(MN). Чита́ется: пряма́я MN

A B

[AB]. Чита́ется: отре́зок AB

На прямо́й вы́берем две то́чки ***O*** и ***E***. Длина́ отре́зка ***OE*** равна **1**. Символи́чески $|OE| = 1$. Та́кже э́тот отре́зок называ́ется масшта́бной едини́цей.

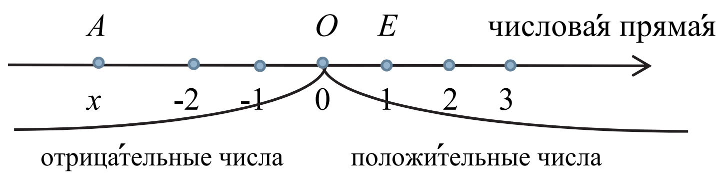


Рис. 1.

Определе́ние. Числово́й прямо́й (и́ли о́сью) называ́ется пряма́я, на кото́рой ука́заны: а) нача́ло координа́т О; б) едини́чный (масшта́бный) отре́зок; в) положи́тельное направле́ние (рис. 1).

чему́? (*дат. п.***) соотве́тствует что?** (*вин. п.*)

соотве́тствовать (*чему?*) 1. correspond;
2. correspondre; 3. corresponder a ; 4. Zuordnen;
5. 符合于，相合，对应于，适合于，(適合于(於),符合于,對應于, 相合); 6.

Утвержде́ние. Ка́ждому действи́тельному числу́ соотве́тствует то́лько одна́ то́чка на числово́й прямо́й.
$\longrightarrow$ знак соответствия О $\longrightarrow$ 0; А $\longrightarrow$ х. Число́ x – это координа́та то́чки А. Символи́чески А(х). Чита́ется: x – координа́та то́чки А на числово́й прямо́й.

Упражнение 1. Прочита́йте символи́ческие выраже́ния.
E(1); O(0); C(-9); F(13); F(-16).

Обозначе́ние расстоя́ния ме́жду двумя́ то́чками на числово́й прямо́й

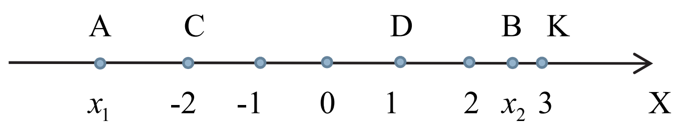


Рис. 2

$\lvert CD \rvert$ Чита́ется: мо́дуль CD

$|CD|$ – расстоя́ние от то́чки C до то́чки D; или расстоя́ние от точки D до точки C. $|CD| = |DC| = 3$.

$|DK|$ – расстояние от точки D до точки K; $|DK| = 2$.

Упражнение 2. Чита́йте (рис. 2).

Что тако́е $|CD|$? Мо́дуль CD – э́то расстоя́ние от то́чки C до то́чки D.

Что тако́е $|CK|$? Мо́дуль CK – это расстоя́ние от то́чки C до то́чки K. Чему́ ра́вен $|CK|$? $|CK|$=5.

Что тако́е $|AB|$? $|AB|$ –это расстоя́ние от то́чки A до то́чки B и́ли от то́чки B до то́чки A. Чему́ ра́вен $|AB|$? $|AB| = |x_2 - x_1|$.

Что тако́е $|3|$? $|3|$ – э́то расстоя́ние от то́чки 0 до то́чки 3. Чему́ ра́вен $|3|$? $|3| = 3$.

Что тако́е $|-5|$? $|-5|$ – э́то расстоя́ние от то́чки 0 до то́чки –5. Чему́ ра́вен $|-5|$? $|-5| = 5$.

Задание 1. Найди́те *x*, е́сли:

а) $|x| = 3$; б) $|x| = 4$; в) $|x| = 0$; г) $|x| = 0{,}5$.

+5 – это положи́тельное число́ (5 > 0).

–3 – это отрица́тельное число́ (–3 < 0).

что? (*им. п.*) **ме́ньше, чем что?** (*им. п.*)

что? (*им. п.*) **бо́льше, чем что?** (*им. п.*)

–3 ме́ньше, чем 0 (–3 < 0); 5 бо́льше, чем 0 (5 > 0).

Если *x* > 0, то *x* – положи́тельное число́.

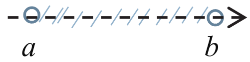
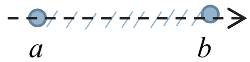
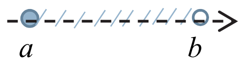
Если *x* < 0, то *x* – отрица́тельное число́.

Упражнение 3. Чита́йте.

x – како́е э́то число́? x – э́то любо́е число́.

Что тако́е $|x|$? $|x|$ – э́то расстоя́ние от то́чки x до то́чки 0.

Графи́ческая интерпрета́ция числовы́х промежу́тков

Назва́ние	**Обозна-че́ние**	**Аналити́-ческая за́пись в форме не-ра́венств**	**Графи́ческая интерпрета́ция**
Интерва́л	$(a;b)$	$a<x<b$	
Отре́зок	$[a;b]$	$a\le x\le b$	
Полуинтерва́л	$(a;b]$	$a<x\le b$	
Полуинтерва́л	$[a;b)$	$a\le x<b$	
Луч	$[a;+\infty)$	$x\ge a$	
Луч	$(-\infty;b]$	$x\le b$	
Откры́тый луч	$(a;+\infty)$	$x>a$	
Откры́тый луч	$(-\infty;b)$	$x<b$	

На пра́ктике «интерва́л», «отре́зок», «полуинтерва́л», «луч» называ́ют промежу́тками. Числова́я ось обознача́ется $R=(-\infty;+\infty)$.

Абсолю́тная величина́ числа́ (и́ли мо́дуль числа́)

Определение мо́дуля действи́тельного числа́:

$$|a|=\begin{cases} a,\ a>0,\\ 0,\ a=0,\\ -a,\ a<0.\end{cases}$$

Это определе́ние чита́ется так: мо́дуль действи́тельного числа́ ***a*** ра́вен числу́ ***a***, е́сли ***a*** – положи́тельное число́; нулю́, е́сли ***a*** равно́ нулю́; противополо́жному числу́ ми́нус ***a***, е́сли ***a*** – отрица́тельное число́.

Упражнение 4. Переведи́те на родно́й язы́к э́то определе́ние.

$$|x| = \begin{cases} x, & \text{если} \quad x > 0, \\ -x, & \text{если} \quad x < 0, \\ 0, & \text{если} \quad x = 0. \end{cases}$$

Сле́дствие: из определе́ния сле́дует, что $|x| \geq 0$.

Задание 2. Найди́те абсолю́тную величину́ числа́ (мо́дуль числа́).

а) $|-0{,}7|$; б) $|0{,}8|$; в) $|-6|$;

г) $|a|$, если $a \geq 0$; д) $|a|$, если $a < 0$; е) $|a|$.

Задание 3. Како́е число́ *a*, е́сли:

а) $a < 0$; б) $-a < 0$; в) $\frac{a^2}{a} > 0$; г) $\frac{a^2}{a} < 0$;

д) $a^3 < 0$; е) $a^3 > 0$; ж) $a \cdot a^2 > 0$.

Задание 4. Отве́тьте на вопро́сы.

+3 и –3 – каки́е э́то чи́сла?

–7 и 7 – каки́е э́то чи́сла?

a и –*a* – каки́е э́то чи́сла?

Иррациона́льные чи́сла

$\sqrt{a}$ Чита́ется: квадра́тный ко́рень из *a*.

Число́ $\sqrt{a}$ – э́то арифмети́ческий квадра́тный ко́рень из числа́ *a*, где $a \geq 0$.

$\sqrt{\ }$ – знак ко́рня. Его при́нято называ́ть радика́лом (*radix*).

$\sqrt{a} = b,\ a = b^2,\ a \geq 0,\ b \geq 0$

Наприме́р, $\sqrt{81} = 9$, так как $9^2 = 81$, 81>0, 9>0.

Упражне́ние 5. Число́ $\sqrt{2}$ (квадра́тный ко́рень из числа́ два) не явля́ется рациона́льным число́м. Число́ $\sqrt{2}$ не це́лое число́, так как 1 < 2 < 4, 1 < $\sqrt{2}$ < 2.

Дока́жем, что $\sqrt{2}$ не рациона́льное число́.

Бу́дем дока́зывать ме́тодом «от проти́вного». Предполо́жим, что $\sqrt{2} = \dfrac{m}{n}$, т.е. $\dfrac{m}{n} \in Q$ и $\dfrac{m}{n}$ несократи́мая дробь.

Тогда́ $\dfrac{m^2}{n^2} = 2$, $m^2 = 2n^2$, m – чётное число́, тогда́ n – та́кже чётное число́, но $\dfrac{m}{n}$ несократи́мая дробь $\Rightarrow \dfrac{m^2}{n^2} \neq 2$.

$\sqrt{2} = 1,41421356...$ – бесконе́чная десяти́чная непериоди́ческая дробь.

Иррациона́льные чи́сла – это бесконе́чные десятичные непериоди́ческие дро́би.

R – мно́жество действи́тельных чи́сел (и́ли числова́я пряма́я).

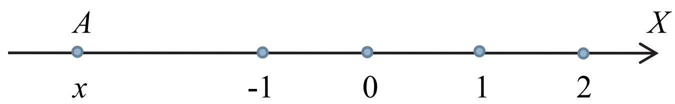


Рис. 3.

Ка́ждой то́чке на числово́й прямо́й соотве́тствует то́лько одно́ число́.

Ка́ждому числу́ соотве́тствует то́лько одна́ то́чка.

$$A \leftrightarrow x$$

Число́ x – э́то координа́та то́чки A. Это предложе́ние запи́сывают так: $A(x)$ (рис. 3).

Упражнение 6. Рассмо́трим определе́ние мо́дуля числа́ x.

$$|x| = \begin{cases} x, & x > 0, \\ 0, & x = 0, \\ -x, & x < 0. \end{cases}$$

На числово́й оси́ $|-0,7|$ выража́ет расстоя́ние от нача́ла координа́т до $x = -0,7$. Чему́ равно́ э́то растоя́ние? Это расстоя́ние равно́ 0,7.

Вы́вод: Геометри́ческий смысл мо́дуля действи́тельного числа́ $\boldsymbol{x}$ – э́то расстоя́ние от нача́ла координа́т (от то́чки O) до то́чки $A(x)$.

Утверждение. Пусть мно́жество иррациона́льных чи́сел **I**, тогда́, $R = Q \bigcup I$, т.е. мно́жество действи́тельных чи́сел – э́то объедине́ние мно́жества рациона́льных чи́сел с мно́жеством иррациона́льных чи́сел.

R ={рациона́льные числа } ∪ {иррациона́льные чи́сла }

Расстоя́ние ме́жду двумя́ то́чками на прямо́й

Рис. 4.

$$|AB| = |x_2 - x_1|$$

Пример. Найди́те расстоя́ние (рис. 4) ме́жду двумя́ то́чками $A(-0,4)$ и $B(7)$.

$$|AB| = |7 - (-0,4)| = 7,4 .$$

Задание. 5. Найди́те расстоя́ние ме́жду то́чками на числово́й прямо́й.

а) A(-5) и B(6); б) C(7) и E(1,5); в) E(-10) и D(11); г) F(0,5) и G(-1,5).

Задание 6. Укажи́те мно́жество то́чек на координа́тной прямо́й, ра́вноудалённых на расстоя́ние 5 от то́чек с координа́тами: $A(-5)$, $B(-3{,}3)$, $C(-0{,}5)$, $D(5)$, $O(0)$, $E(10)$.

Занятие 10.
ОТНОШЕНИЯ И ПРОПОРЦИИ

Отноше́ния

что? (*им.п.*) **бо́льше чем что?** (*им.п.*) **во ско́лько раз?** (*вин. п.*)

Пример. Во ско́лько раз число́ 42 бо́льше, чем число́ 14?

$42 : 14 = 3$

Число́ 42 бо́льше, чем 14 в 3 ра́за.

что? (*им.п.*) **ме́ньше чем что?** (*им.п.*) **во ско́лько раз?** (*вин.п.*)

(во) ско́лько раз?
в 1 раз
в 2, 3, 4 раза
в 5, 6, ... раз

Пример. Во ско́лько раз число́ 72 ме́ньше, чем число́ 144?

$144 : 72 = 2$

Число́ 72 ме́ньше, чем 144 в 2 ра́за.

$\frac{a}{b}$ и́ли $a : b$ – э́то отноше́ние a к b $(b \neq 0)$.

Если $a > b$, то отноше́ние пока́зывает, во ско́лько раз одно́ число́ бо́льше (ме́ньше), чем друго́е. Наприме́р, чи́сла 10 и 5. Отноше́ние $\frac{10}{5} = 2$ пока́зывает, что число́ 5 в 2 ра́за ме́ньше, чем число́ 10 (и́ли число́ 10 в 2 ра́за бо́льше, чем число́ 5).

что? (*им.п.*) **составля́ет от чего́?** (*род.п.*) **каку́ю часть?** (*вин.п.*)

Пример. Число́ 3 составля́ет от числа́ 6 $\frac{1}{2}$ часть.

Число́ 10 составля́ет от числа́ 15 $\frac{10}{15}=\frac{2}{3}$ ча́сти.

Упражнение 1. Каку́ю часть число́ 2,5 составля́ет от числа́ 5?

$\frac{2,5}{5}=\frac{1}{2}$ Число́ 2,5 составля́ет от числа́ 5 $\frac{1}{2}$ часть.

$\frac{1}{2}$ – э́то отноше́ние 2,5 к 5.

Если $a < b$, то отноше́ние пока́зывает, каку́ю часть одно́ число́ составля́ет от друго́го.

Задание 1. Во ско́лько раз одна́ величина́ бо́льше, чем друга́я?

а) 15 см и 2 м; б) 1 мин и 1 час;

в) 36 и 0,5; г) $1\frac{3}{4}$ и 1,4.

во ско́лько раз бо́льше (ме́ньше)?	**на ско́лько бо́льше (ме́ньше)?**
15 : 3 = 5 Число́ 15 бо́льше, чем число́ 3, в 5 раз.	15 – 3 = 12 Число́ 15 бо́льше, чем число́ 3, на 12.

что? составля́ет от чего́ каку́ю часть?	**что бо́льше (ме́ньше) чего́ на ско́лько?**
$3:15=\frac{1}{5}$ Число́ 3 составля́ет от числа́ 15 одну́ пя́тую часть.	15 бо́льше, чем 3 на 12 Число́ 3 ме́ньше, чем число́ 15, на 12.

Пропо́рции

Определение. Пропо́рция – э́то ра́венство двух отноше́ний.

Пропо́рция запи́сывается так: $\frac{a}{b} = \frac{c}{d}$ и́ли $a : b = c : d$.

a, b, c, d – чле́ны пропо́рции. a и d – кра́йние чле́ны. b и c – сре́дние чле́ны.

кра́йний член 1. wing term; 2. terme extreme;

3. termino extremo 4. Randglid, n; 5. 外項(外项); 6.

сре́дний член 1. middle term; 2. terme medio;

3. termino medio; 4. Mittelglied, n; 5. 比例中項,

(比例中项); 6.

Основно́е сво́йство пропо́рции

$\frac{a}{b} = \frac{c}{d} \Rightarrow a \cdot d = b \cdot c$ – сво́йство пропо́рции.

Произведе́ние кра́йних чле́нов равно́ произведе́нию сре́дних чле́нов.

знак $\Rightarrow$ чита́ется: “сле́дует”, “сле́довательно”

сво́йство, –а 1. property; 2. propriété; 3. propiedad;
4. Eigenschaft; 5. 酒店; 6.

Задание 2. Найди́те x.

а) $\frac{20}{x} = \frac{190}{114}$; б) $x : 2\frac{1}{12} = 15 : 4,5$;

в) $0,25x : \frac{1}{8} = 15 : 4,5$; г) $\frac{x-2}{3} = \frac{5}{4}$.

Занятие 11.
ПРОЦЕНТЫ

Проце́нт числа́ a – э́то одна́ со́тая ча́сть числа́ a.

1% числа́ a – это $\frac{a}{100}$. 1% числа́ 1 – это $\frac{1}{100}$.

ско́лько проце́нтов? **1 – проце́нт** **2, 3, 4 – проце́нта** **5, 6, 7, ... – проце́нтов**

найти́ что? *(вин. п.)* **от чего́?** *(род. п.)*

Задача 1. Найди́те p% от числа́ a.

$$\begin{matrix} a - 100\% \\ x - p\% \end{matrix} \qquad x = \frac{a \cdot p}{100}.$$

Пример. Найди́те 3% от числа́ 13,6.

$$\begin{matrix} 13{,}6 - 100\% \\ x - 3\% \end{matrix} \qquad x = \frac{13{,}6 \cdot 3}{100} = 0{,}408.$$

что? *(им. п.)* **составля́ет от чего́?** *(род. п.)* **какой проце́нт?** *(вин. п.)*

5 г составля́ют от 20 г 25%, так как

$$\begin{matrix} 5\ г - 25\% \\ 20\ г - 100\% \end{matrix}.$$

Задача 2. Найди́те числó, éсли p% егó составля́ют b.

$$\begin{matrix} p\% - b \\ 100\% - x \end{matrix} \qquad x = \frac{b \cdot 100}{p}.$$

что? составля́ет от чегó? каку́ю ча́сть?	**что? составля́ет от чегó? какóй проце́нт?**

Упражнение 1. Прочита́йте.

Число́ 6 составля́ет от числа́ 18 $\frac{1}{3}$ часть.

Число́ 5 составля́ет от числа́ 10 $\frac{1}{2}$ часть.

25 см составля́ют от 50 см $\frac{1}{2}$ часть.

1 мину́та составля́ет от 1 ча́са $\frac{1}{60}$ часть.

2 мину́ты составля́ют от 1 ча́са $\frac{1}{30}$ часть.

Упражнение 2. Чита́йте.
2 руб. составля́ют от 20 руб. 10 проце́нтов.
12 м составля́ют от 24 м 50 проце́нтов.
Число́ 3 составля́ет от числа́ 15 20 проце́нтов.

Ско́лько проце́нтов составля́ет число́ 15 от числа́ 20?

$$\begin{array}{l} 20 - 100\% \\ 15 - x\% \end{array} \qquad x\% = \frac{15 \cdot 100\%}{20} = 75\%$$

– число́ 15 составля́ет 75% от числа́ 20.

Ско́лько проце́нтов составля́ет число́ 13 от числа́ 39?

$$\begin{array}{l} 39 - 100\% \\ 13 - x\% \end{array} \qquad x\% = \frac{13 \cdot 100\%}{39} = 33,(3)\%$$

– это проце́нтное отноше́ние числа́ 13 к числу́ 39.

Задача 3. Найди́те проце́нтное отноше́ние числа́ a к числу́ b.

$$\begin{array}{l} b - 100\% \\ a - x\% \end{array} \qquad x\% = \frac{a \cdot 100\%}{b}.$$

Пример. Найди́те проце́нтное отноше́ние 12 кг и 48 кг.

Реше́ние: $\frac{12}{48} \cdot 100\% = \frac{1}{4} \cdot 100\% = 25\%$.

Задание 1. Найди́те.

а) 25% от 3,6 кг; б) 5% от 4,7 г; в) 0,7% от 9,6 м;

г) 1,5% от 2,4 см; д) $33\frac{1}{3}\%$ от 300 т; е) $66\frac{2}{3}\%$ от 3 см.

Задание 2. Найди́те число́, е́сли:

а) 25% его́ равны́ 2,8; б) 4,5% е́го равны́ 9 г;

в) 35% его́ составля́ют 18 м; г) 2,5% е́го составля́ют 18 см

Задание 3. Найди́те проце́нтное отноше́ние чи́сел.

а) а к b; б) 1,5 кг к 20 г; в) 2,5 т к 0,5 т;

г) 14 м к $\frac{3}{5}$ м; д) 1 к 3.

Реше́ние (д). $\frac{1}{3}\cdot 100\% = 33\frac{1}{3}\%$ и́ли $\frac{1}{3}\cdot 100\% = 33{,}333...\%$. Полу́ченное значе́ние мо́жно округли́ть, наприме́р,

33% с то́чностью до 1

приближённо равно́ 33,3% с то́чностью до 0,1

33,33% с то́чностью до 0,01.

Пример: Округли́те число́ 35,4873 с то́чностью до 0,01. *Решение*. $35{,}4873 \approx 35{,}49$.

приближённое значение 1. approximate value ;
2. valčur approximative; 3. valor aproximado;
4. Näherungswert, m; 5.近似值, （近似值）； 6.

с точностью до 1. with the exactness;
2. avec une exactitude ; 3. con exactitud hasta;
4. genau bis auf …; 5. 精確到…, 精确到; 6.

Задание 4. Найди́те проце́нтное отноше́ние чи́сел.

а) 7 к 15 с то́чностью до 0,1;

б) 15 к 20 с то́чностью до 0,01;

в) 24 к 13 с то́чностью до 0,001.

Занятие 12.

УРАВНЕНИЯ

Определение. Уравне́нием называ́ется ра́венство, кото́рое соде́ржит неизве́стную величину́.

$3x-12=2x-5$ – э́то уравне́ние.

x – э́то неизве́стная величина́.

что? (*вин.п.***) называ́ется чем? (***тв.п.***)**
что? (*им.п.*) **соде́ржит что?** (*вин.п.*)

содержа́ть (что?) 1. contain (to bekept); 2. se trouver; contenir; 3. contener; 4. enthalten, einschließen;

5. 包含,含有,（包含，含有）; 6.

Примеры.

1) $5x-8=12$, $5x-8-12=0$, $5x-20=0$, $5(x-4)=0$

$x=4$ – э́то ко́рень уравне́ния.

2) $x^2-2x=0$, $x(x-2)=0$, $x=0$ или $x=2$.

$x=0$; 2 – э́то ко́рни уравне́ния.

Реши́ть уравне́ние – э́то зна́чит найти́ все его́ ко́рни и́ли доказа́ть, что их нет.

$\Leftrightarrow$ знак равноси́льности и́ли эквивале́нтности, чита́ется: равноси́льно и́ли эквивале́нтно.

Сво́йства уравне́ния

1. $f(x)=g(x) \Leftrightarrow f(x)-g(x)=0$.

$f(x)$ – ле́вая часть уравне́ния; $g(x)$ – пра́вая часть уравне́ния. Чле́ны уравне́ния мо́жно переноси́ть из одно́й ча́сти уравне́ния в другу́ю, измени́в знак на противополо́жный.

2. $f(x)=g(x) \Leftrightarrow m\cdot f(x)=m\cdot g(x)$, где $m\neq 0$.

Обе ча́сти уравне́ния мо́жно умно́жить и́ли раздели́ть на одно́ и то же число́, кото́рое не равно́ нулю́.

Ви́ды уравне́ний

$ax + b = 0$– э́то уравне́ние пе́рвой сте́пени.

a – коэффицие́нт, x – э́то неизве́стная величина́, b – э́то свобо́дный член.

$ax^2 + bx + c = 0,\ a \neq 0$– э́то уравне́ние второ́й сте́пени.

a, b, c – коэффицие́нты, x – э́то неизве́стная величина́, c – э́то свобо́дный член.

Упражнение 1. Реши́те уравне́ние $10x - 3 = 3x + 2$.

Реше́ние: $10x - 3 = 3x + 2 \Leftrightarrow 10x - 3 - 3x - 2 = 0 \Leftrightarrow \quad 7x - 5 = 0$
$\Leftrightarrow 7\left(x - \frac{5}{7}\right) = 0 \Leftrightarrow x = \frac{5}{7}$.

Прове́рка: $10 \cdot \frac{5}{7} - 3 = 3 \cdot \frac{5}{7} + 2$; $7\frac{1}{7} - 3 = 2\frac{1}{7} + 2$; $\quad 4\frac{1}{7} = 4\frac{1}{7}$.

Число́ $\frac{5}{7}$– э́то ко́рень уравне́ния. (Уравне́ние име́ет одно́ реше́ние.)

Отве́т: $\frac{5}{7}$.

Упражнение 2. Реши́те уравне́ние $2x + 5 = 2x + 5$.

Реше́ние: $2x + 5 = 2x + 5 \quad \Leftrightarrow 2x + 5 - 2x - 5 = 0 \Leftrightarrow 0 = 0$.

Отве́т: ***R.***

Упражнение 3. Реши́те уравне́ние $3x - 1 = 4 + 3x$.

Реше́ние: $3x - 1 = 4 + 3x$,-5 = 0 (неве́рно). Уравне́ние не име́ет реше́ния.

Отве́т: Ø**.**

Задание 1. Реши́те уравне́ние.

а) $x^2 - 3x = 0$; б) $x^2 - 16 = 0$;

в) $4x^2 + 6x = 9x^2 - 15x$; г) $\frac{x-1}{3} + \frac{2x+1}{5} = \frac{3x-1}{4}$;

д) $\frac{1}{2x-3} - \frac{3}{2x^2-3x} = \frac{5}{x}$; е) $\frac{5x-9}{x} - \frac{7x-1}{x-1} = 2$.

Задание 2. Реши́те уравне́ние.

а) $S = \frac{3t}{2}$ относи́тельно t; б) $Q = \frac{ah^2}{2}$ относи́тельно a;

в) $R = \frac{R_1 R_2}{R_1 + R_2}$ относи́тельно R_1; относи́тельно R_2.

Задание 3. Реши́те уравне́ние.

а) $\frac{13x^2-4}{12} - 3\frac{5}{9} = \frac{20-3x^2}{18}$; б) $\frac{x}{x+4} + \frac{x}{x-4} = 5\frac{5}{9}$;

в) $0{,}15(x-4) = 9{,}9 - 0{,}3(x-1)$.

Задание 4. Реши́те уравне́ние.

а) $|x| - 5 = |x| + 2$; б) $|x| - 5 = |x-2|$; в) $|x-5| = |x-2|$;

г) $\frac{x}{|x-2|} = \frac{x}{|x-5|}$; д) $\frac{x-5}{|x-2|} = \frac{x-2}{|x-5|}$; е) $|x-2| = x-2$;

ж) $x - 5 = |x-5|$.

Занятие 13.

НЕРАВЕНСТВА. МОДУЛЬ

Нера́венства

что? (*вин.п.*) соединя́ется чем? (*тв.п.*)

Нера́венства – два числа́ и́ли два алгебраи́ческих выраже́ния, кото́рые соединя́ются зна́ком > и́ли < (а та́кже ≥ и́ли ≤).

соединя́ть (чем?) 1. to join; 2. joindre; 3. unir; 4. zusammenlegen; 5. 連接, 接合, 聯合（连接，联合，接合）; 6.

$5 > 8$ – числово́е нера́венство.

$2x + 4 > x^2 + 1$ – нера́венство с переме́нной *x*.

$\left.\begin{matrix} f(x) > g(x) \\ \varphi(x) < \psi(x) \end{matrix}\right\}$ – систе́ма нера́венств с переме́нной *x*.

Реше́нием нера́венства называ́ется мно́жество значе́ний переме́нной, при кото́рых нера́венство ве́рно.

Сво́йства нера́венств

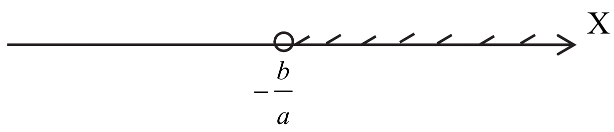
Сво́йства числовы́х нера́венств:

1. Для любо́го ($\forall$) *a*: $a \le a$.
2. Для любы́х ($\forall$) a *и* b: $a \le b$ *или* $a > b$.
3. Для любы́х ($\forall$) a, b *и* c: е́сли $a \le b$ *и* $b \le c$, то $a \le c$.
4. Для любы́х ($\forall$) a, b *и* c: е́сли $a \le b$ то $a + c \le b + c$.
5. Для любы́х ($\forall$) a, b *и* c: е́сли $a \le b$ и $c > 0$, то $ac \le bc$.
6. Для любы́х ($\forall$) a, b *и* c: е́сли $a \le b$ и $c < 0$, то $ac \ge bc$.
7. Для любо́го ($\forall$) *a* существу́ет ($\exists$) $n \in N$ тако́е, что $\vee\,(\textit{или})\; a \le n \vee (\textit{или})\; a < n + 1$.

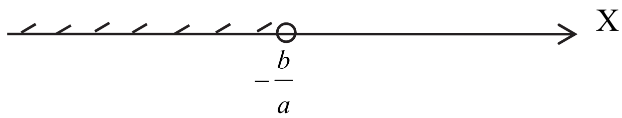
Нера́венства пе́рвой сте́пени

$ax + b > 0 \quad (a \neq 0)$ – нера́венство пе́рвой сте́пени.

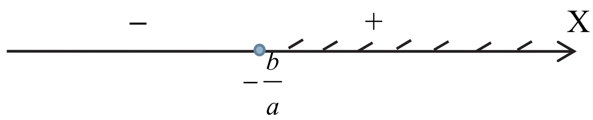
Если $a > 0$, то $a\left(x + \dfrac{b}{a}\right) > 0$ при $x \in \left(-\dfrac{b}{a}; +\infty\right)$.



Если $a < 0$, то $a\left(x + \dfrac{b}{a}\right) > 0$ при $x \in \left(-\infty; -\dfrac{b}{a}\right)$.

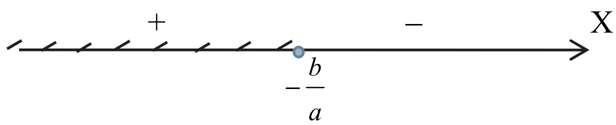


Реше́ние нера́венства $a\left(x + \dfrac{b}{a}\right) \geq 0 \quad (a > 0)$



$x \in \left(-\dfrac{b}{a}; +\infty\right)$

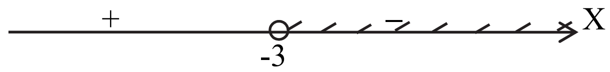
Реше́ние нера́венства $a\left(x + \dfrac{b}{a}\right) \geq 0 \quad (a < 0)$



$x \in \left(-\infty; -\dfrac{b}{a}\right)$

Пример. Реши́те нера́венство $5x - 7 < 8x + 2$.

Решéние : $5x-7<8x+2 \Leftrightarrow 5x-7-8x-2<0 \ \Leftrightarrow -3x-9<0$
$\Leftrightarrow\ -3(x+3)<0\,|:(-3)\ \Leftrightarrow\ x+3>0 \Leftrightarrow x>-3$.



Отвéт: $x\in(-3;+\infty)$.

Задание 1. Реши́те нерáвенство.
а) $1-x\geq 2x+3$; б) $5x-4<3x+4$; в) $0{,}2x+4>1{,}7x-3$;
г) $-1{,}4x\leq 28$; д) $(x-4)(x+3)<0$; е) $(5x-10)(4-x)\geq 0$.

Задание 2. Укажи́те на числовóй прямóй мнóжество тóчек, где:
а) $x\in(2;7]\cap[-8;4]$; б) $x\in(-6;1]\cap[-2;10]$;
в) $x\in(-\infty;2]\cap(1;7]$; г) $x\in(-\infty;2]\cup(1;3)$.

Задание 3. Укажи́те на числовóй прямóй и́ли опиши́те мнóжество таки́х тóчек, что:
а) $|x|=1$; б) $|x|=3$; в) $|x|=0$;
г) $1<|x|<2$; д) $2<|x|<3$ е) $1\leq|x|\leq 3$;
ж) $|x|\leq 2$; з) $|x|\leq 3$; и) $|x|\geq 1$;
к) $|x|\geq -1$; л) $0<|x|\leq 2$; м) $-1<|x|\leq 4$;
н) $\{|x|\leq 2\}\cap\{1\leq|x|<3\}$; о) $\begin{cases}|x|\leq 2\\ x=k\pi,\ k\in Z.\end{cases}$

Задание 4. Докажи́те слéдующие свóйства абсолю́тной величины́ (мóдуля).

1. $|-a|=|a|$; 2. $-|a|\leq a\leq|a|$;
3. $|a|-|b|\leq|a+b|\leq|a|+|b|$; 4. $|a|-|b|\leq|a-b|\leq|a|+|b|$;
5. $|a\cdot b|=|a|\cdot|b|$; 6. $\left|\dfrac{a}{b}\right|=\dfrac{|a|}{|b|},\quad (b\neq 0)\cdot$

Занятие 14.

АРИФМЕТИЧЕСКИЙ КВАДРАТНЫЙ КОРЕНЬ

Число́ $\sqrt{a}$ – э́то арифмети́ческий квадра́тный ко́рень из числа́ a, где $a \geq 0$. $\sqrt{}$ – знак квадра́тного ко́рня (радика́л).

1) Число́ $\sqrt{a} \geq 0$. 2) $\left(\sqrt{a}\right)^2 = a$.

Символи́чески $\sqrt{a} = b \Leftrightarrow b^2 = a, \quad a \geq 0, \; b \geq 0$.

Примеры: $\sqrt{0{,}09} = 0{,}3 \Leftrightarrow 0{,}3^2 = 0{,}09$ и $0{,}3 > 0$.

$\sqrt{289} = 17 \Leftrightarrow 17^2 = 289$ и $17 > 0$.

$\sqrt{f(x)}$, где $f(x)$ – подкоренно́е выраже́ние.

Выраже́ние $\sqrt{f(x)}$ име́ет смысл, е́сли $f(x) \geq 0$. Это зна́чит, что допусти́мы таки́е значе́ния x, при кото́рых $f(x) \geq 0$.

Например, $\sqrt{-25}$ не име́ет смы́сла, сле́довательно, –25 – э́то недопусти́мое выраже́ние.

Упражнение. Прочита́йте.

$\sqrt{2}$ – квадра́тный ко́рень из числа́ 2.

$\sqrt{12}$ – квадра́тный ко́рень из числа́ 12.

$\sqrt{19}$ – квадра́тный ко́рень из числа́ 19.

$\sqrt{x}$ – квадра́тный ко́рень из x.

$\sqrt{x+4}$ – квадра́тный ко́рень из выраже́ния $x + 4$ (и́ли из су́ммы $x + 4$).

Задание 1. Найди́те значе́ние арифмети́ческого ко́рня.

а) $\sqrt{64}$; б) $\sqrt{2500}$; в) $\sqrt{0{,}25}$; г) $\sqrt{\dfrac{4}{81}}$; д) $\sqrt{0{,}04}$; е) $\sqrt{\dfrac{25}{36}}$.

Сво́йства арифмети́ческого ко́рня

1. Если $a \geq 0$, $b \geq 0$, то $\sqrt{ab} = \sqrt{a} \cdot \sqrt{b}$.

2. Если $a \geq 0$, $b > 0$, то $\sqrt{\dfrac{a}{b}} = \dfrac{\sqrt{a}}{\sqrt{b}}$.

3. Если $a > 0$, то $\left(\sqrt{a}\right)^m = \sqrt{a^m}$, $m \in Z$.

Задание 2. Найди́те значе́ние выраже́ния.

а) $\sqrt{64 \cdot 81}$; б) $\sqrt{0{,}25 \cdot 49}$; в) $\sqrt{1\dfrac{11}{25}}$; г) $7\sqrt{25} \cdot \sqrt{16}$;

д) $-2\sqrt{0{,}09} + 5\sqrt{0{,}16}$; е) $0{,}5\sqrt{16} + \sqrt{\dfrac{4}{25}}$; ж) $\sqrt{3\dfrac{1}{16} \cdot 2\dfrac{14}{25}}$;

з) $\sqrt{5\dfrac{1}{16} \cdot 2\dfrac{34}{81}}$; и) $\sqrt{0{,}09 \cdot 16 \cdot 0{,}04}$.

то́ждество, –а 1. identity; 2. identité, f; 3. identidad; 4. Identität, f; 5. 恒等(式), （恒等式） ; 6.
и́стинн‖ый, -ая, -ое, -ые 1. true; 2. vrai, veritable; 3. verdadero; 4. Echt, Wahr; 5. 真實的, 正確的, （真实的，正确的）; 6.
ло́жн‖ый, -ая, –ое, -ые 1. false; 2. faux; 3. falso; 4. unwahr, unrichtig, falsch; 5. 假的; 6.
доказа́тельство, –а 1. proof; 2. demonstration, f; 3. demostración, f; 4. Beweis m; 5. 証明,証法,論証, (证明，证法，论证）; 6.

То́ждество $\sqrt{a^2} = |a|$.

Определение. То́ждеством называ́ется ра́венство (алгебраи́ческое, аналити́ческое), кото́рое явля́ется **и́стинным** при всех допусти́мых значе́ниях букв, входя́щих в э́то ра́венство.

Теорема. Для любо́го числа́ $a \in R$ $\sqrt{a^2} = |a|$.

Доказа́тельство.

1. Если $a \geq 0$, то $\sqrt{a^2} = a = |a|$.

2. Если $a < 0$, то $-a > 0$ и $(-a)^2 = a^2$,

$\sqrt{a^2} = \sqrt{(-a)^2} = -a > 0$, сле́довательно, $\sqrt{a^2} = |a|$.

Задание 3. Преобразу́йте выраже́ние.

а) $\sqrt{x^2}$; б) $\sqrt{x^2}$, если $x \geq 0$;

в) $\sqrt{x^2}$, если $x \leq 0$; г) $\sqrt{(1{,}7)^2} + \sqrt{(-23)^2}$;

д) $\sqrt{(-2)^6} + 0{,}1\sqrt{(-3)^8}$; е) $-\sqrt{16} + 2{,}5\sqrt{(-0{,}1)^4}$.

преобразова́ть (что?) 1.transform; 2. transformer;
3. transformar; 4. transformiren, umbilden, umgestalten;
5. 變換, 換算, 移項,（变换，换算，移项）; 6.

Задание 4. Реши́те уравне́ние.

а) $\sqrt{x^2} = 1$; б) $\sqrt{(x+1)^2} = 2$;

в) $\sqrt{(x-4)^2} = 1$; г) $\sqrt{(3-x)^2} = 4$.

Выраже́ние $\sqrt{f(x)}$ име́ет смысл, е́сли $f(x) \geq 0$;

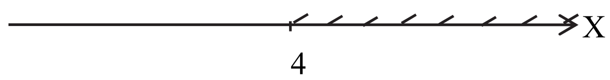
Выраже́ние име́ет смысл, е́сли ...

если $f(x) < 0$, то выраже́ние не име́ет смы́сла, так как не выполня́ется определе́ние арифмети́ческого ко́рня.

Выраже́ние не име́ет смы́сла, так как ...

Например, выраже́ние $\sqrt{-x^2 - 1}$ не име́ет смы́сла, так как при любо́м $x \in R$, $-x^2 - 1 < 0$.

Выраже́ние $\sqrt{x-4}$ име́ет смысл, е́сли $x-4 \ge 0 \Leftrightarrow x \ge 4$, и́ли $x \in [4;+\infty)$.



Мно́жество значе́ний $x \in [4;+\infty)$ называ́ют о́бластью определе́ния (допусти́мых значе́ний переме́нной x) выраже́ния $\sqrt{x-4}$. Область допусти́мых значе́ний x не́которого выраже́ния $f(x)$ запи́сывают **ОДЗ(**$f(x)$**)**.

Задание 5. Найди́те о́бласть определе́ния выраже́ния.

а) $f(x)=\sqrt{x+2}$; б) $f(x)=\sqrt{-x}$;

в) $f(x)=\sqrt{1-x}$; г) $f(x)=\sqrt{2x-3}$.

Задание 6. Найди́те ОДЗ выраже́ния.

1) $\frac{1}{a}\cdot\frac{a^2-a}{a-a^2}:(a+1)$; 2) $\frac{-ab}{b^2+1}\cdot\frac{1}{ab}$; 3) $\frac{a^2b-ab}{b(a+1)}\left(\frac{a+1}{a-1}\right)^{-1}$;

4) $\frac{1}{a}+\frac{1}{c}+\frac{1}{a+c}$; 5) $\frac{x+2}{x^3+x^2+x+1}-\frac{1}{x-1}$.

Упражнение 1. Преобразу́ем выраже́ние $\sqrt{9x}$.

$\sqrt{9x}=\sqrt{9}\cdot\sqrt{x}=3\sqrt{x}$, где $x \ge 0$. $\sqrt{9x}=3\sqrt{x}$. Это преобразова́ние называ́ется вынесе́нием мно́жителя из-под зна́ка ко́рня.

что? *(вин. п.)* **выноси́ть из-под чего́?** *(род. п.)** **вы́нести**

$\sqrt{4\cdot 3}=2\sqrt{3}$. Мно́житель 2 выно́сим из-под зна́ка ко́рня.

выноси́ть (что?) 1. put out; 2. mettre horse de; 3. sacar factor; 4.ausklammern; 5.由括弧内移出的乘数公因子；6.

Задание 7. Вы́несите мно́житель из-под зна́ка ко́рня.

а) $\sqrt{125}$; б) $\sqrt{x^3}$; в) $\sqrt{75}+\sqrt{48}-\sqrt{300}$;

г) $\sqrt{16x}+\sqrt{25x}-\sqrt{9x}$; д) $\dfrac{6-\sqrt{32}}{12}$; е) $\dfrac{-10+\sqrt{40}}{4}$.

Занятие 15.

ПРЕОБРАЗОВАНИЕ КВАДРАТНЫХ КОРНЕЙ

Арифмети́ческий ко́рень

Определение. Арифмети́ческим ко́рнем называ́ется неотрица́тельное значе́ние ко́рня чётной и́ли нечётной сте́пени из неотрица́тельного числа́.

$\sqrt{a}$ Чита́ется: квадра́тный ко́рень из a и́ли ко́рень второ́й сте́пени из a.

Упражнение 1. Прочита́йте приме́ры иррациона́льных выраже́ний.

$\sqrt{43}$ –квадра́тный ко́рень из сорока́ трёх;

$2\sqrt{43}$ – два квадра́тных ко́рня из сорока́ трёх;

$3\sqrt{48}$ – три квадра́тных ко́рня из сорока́ восьми́;

$4\sqrt{50}$ – четы́ре квадратны́х ко́рня из пяти́десяти;

$6\sqrt{34}$ – шесть квадра́тных корне́й из тридцати́ четырёх;

$55\sqrt{32}$ – пятьдеся́т пять квадра́тных корне́й из тридцати́ двух.

Преобразова́ние квадра́тных корне́й

что? (*вин. п.*) **вы́нести из-под чего́?** (*род. п.*)

Задание 1. Упростите.

а) $0{,}2\sqrt{75}-0{,}5\sqrt{12}$; б) $3\sqrt{(x-2)^3}$;

в) $-0{,}5\sqrt{160}+0{,}2\sqrt{250}$; г) $\sqrt{16x^3}-4\sqrt{25x^3}$.

что? (*вин. п.*) **вно́сить куда́?** (*род. п.*) **вно́сим** **внести́**

$2\sqrt{3}=\sqrt{2^2\cdot 3}=\sqrt{12}$. Мно́житель 2 внесём под знак ко́рня.

Задание 2. Внеси́те мно́житель под знак ко́рня.

а) $x\sqrt{3x}$; б) $x\sqrt{\frac{2}{x}}$; в) $x\sqrt{5}$, где $x>0$;

г) $x\sqrt{5}$, где $x<0$; д) $x\sqrt{-\frac{2}{x}}$; е) $x\sqrt{x-4}$.

Задание 3. Разложи́те на мно́жители.

а) x^2-7; б) $5-x^2$; в) $\sqrt{x}-\sqrt{2x}$;

г) x^2-3; д) $x+\sqrt{x}$; е) $x-9$.

Задание 4. Разложите на множители.

а) $\dfrac{x^2-2}{x-\sqrt{2}}$; б) $\dfrac{x-9}{\sqrt{x}-3}$; в) $\dfrac{3+\sqrt{x}}{3\sqrt{x}+9}$;

г) $\dfrac{\sqrt{x}-1}{x-1}$; д) $\dfrac{\sqrt{x}-5}{25-x}$; е) $\dfrac{x-\sqrt{x}}{\sqrt{x}-1}$.

что? (*вин. п.*) **освободи́ть от чего́?** (*род.п.*) **где?** (*пр.п.*)

Упражнение 3. Дробь $\dfrac{x}{\sqrt{2}}$ освободи́те от иррациона́льности в знамена́теле.

Решение. Знамена́тель дро́би $\sqrt{2}$ – иррациона́льное число́.

$\dfrac{x}{\sqrt{2}}=\dfrac{x\sqrt{2}}{\sqrt{2}\cdot\sqrt{2}}=\dfrac{x\sqrt{2}}{2}$. Мы освободи́ли дробь от иррациона́льности в знамена́теле.

Задание 5. Дробь освободи́те от иррациона́льности в знамена́теле.

а) $\dfrac{3}{2\sqrt{x}}$; б) $\dfrac{2}{\sqrt{x}-2}$; в) $\dfrac{x}{\sqrt{x}+1}$; г) $\dfrac{x+1}{\sqrt{x}-2}$;

д) $\dfrac{x-3}{3\sqrt{x}-1}$; е) $\dfrac{1}{\sqrt{x-2}-\sqrt{2x+2}}$.

Задание 6. Дробь освободи́те от иррациона́льности в числи́теле.

а) $\dfrac{\sqrt{x}-\sqrt{x+1}}{x}$; б) $\dfrac{\sqrt{x-4}-\sqrt{x-3}}{4}$; в) $\sqrt{x-1}-\sqrt{x-6}$;

г) $\sqrt{x^2-1}-\sqrt{x^2+3}$.

Задание 7. Упрости́те арифмети́ческое выраже́ние.

а) $15\sqrt{\dfrac{3}{5}}-0{,}5\sqrt{60}+2\sqrt{3\dfrac{3}{4}}$; б) $4\sqrt{10\dfrac{1}{2}}+\sqrt{168}-5\sqrt{1\dfrac{17}{25}}$;

в) $4\sqrt{9\dfrac{1}{2}}-\sqrt{152}+3\sqrt{4\dfrac{2}{9}}$.

Задание 8. Упрости́те алгебраи́ческое выраже́ние и найди́те значе́ние.

а) $\dfrac{\sqrt{x}}{\sqrt{x}+5}+\dfrac{25-15\sqrt{x}}{\left(\sqrt{x}+5\right)^2}$ при $x = 6{,}25$;

б) $\left(\dfrac{\sqrt{a}}{2}-\dfrac{1}{2\sqrt{a}}\right)^2\cdot\left(\dfrac{\sqrt{a}-1}{\sqrt{a}+1}-\dfrac{\sqrt{a}+1}{\sqrt{a}-1}\right)$ при $a = 0{,}64$.

Задание 9. Упрости́те алгебраи́ческое выраже́ние.

а) $\left(\dfrac{1-x}{1+\sqrt{x}}+2\sqrt{x}\right)\cdot\left(1-\sqrt{x}\right)$; б) $\left(\dfrac{1}{\sqrt{x}+3}+\dfrac{4}{x-9}\right)\cdot\dfrac{\sqrt{x}+3}{\sqrt{x}+1}$;

в) $\left(\dfrac{1}{\left(\sqrt{x}-1\right)^2}-\dfrac{\sqrt{x}}{1-x}\right)\cdot\dfrac{1-x}{1+x}$; г) $\dfrac{\sqrt{x}}{\sqrt{x}-6}-\dfrac{3}{\sqrt{x}+6}+\dfrac{x}{36-x}$.

Задание 10. Внеси́те мно́житель под знак ко́рня.

а) $(x-2)\cdot\sqrt{\dfrac{2x}{x-2}},\ x>2$; б) $(x-2)\cdot\sqrt{\dfrac{2x}{x-2}},\ x<0$;

в) $(x-2)\cdot\sqrt{\dfrac{2x}{2-x}},\ 0<x<2$.

Занятие 16.

ПРЯМОУГОЛЬНАЯ СИСТЕМА КООРДИНАТ

Постро́им на пло́скости две взаи́мно перпендикуля́рные числовы́е прямы́е (OX, OY). Горизонта́льная пряма́я OX – э́то ось абсци́сс. Вертикальная прямая OY – э́то ось ордина́т. OX и OY – э́то о́си координа́т. То́чка O – э́то нача́ло координа́т. $(x_1;y_1)$ – э́то координа́ты то́чки *M* (рис.1).

x_1 – абсци́сса то́чки *M*. y_1 – ордина́та то́чки *M*.

пло́скость, –и 1. plane; 2. surface; 3. plano;
4. Ebene, f; 5. 平面 ; 6.
взаи́мно перпендикуля́рные 1. perpendicular reciprocal; 2. perpendicular reciproque ment;
3. reciprocamente perpendicular; 4. senkrechtzueinander;
5. 互相垂直的，(互相垂直的); 6.

О́си координа́т де́лят пло́скость на четы́ре че́тверти (на четы́ре квадра́нта) – I, II, III, IV.

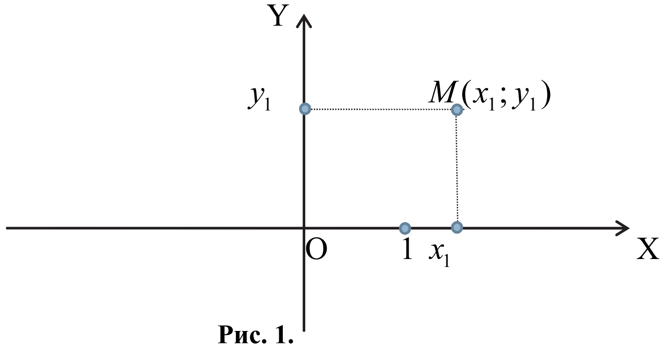


Рис. 1.

что? (перпендикуля́р) из то́чки опусти́ть
на что? (на пряму́ю, на пло́скость)

Задача 1. Найди́те координа́ты то́чки B.

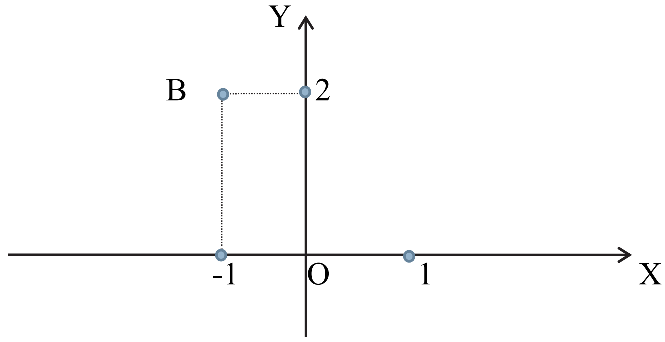


Рис. 2.

Реше́ние. Из то́чки B опу́стим перпендикуля́ры на ось OX и ось OY (рис.2). То́чка B име́ет координа́ты (-1; 2).

Задача 2. На координа́тной пло́скости постро́йте все то́чки с абсци́ссой $x = 3$.

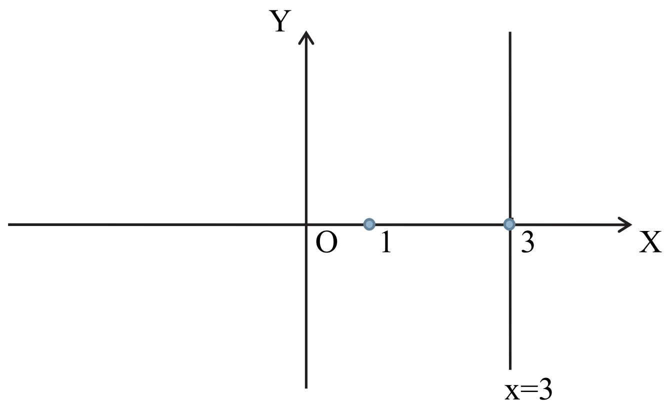


Рис. 3.

Реше́ние. Если постро́ить все то́чки с абсци́ссой $x = 3$, то полу́чим пряму́ю, кото́рая прохо́дит че́рез то́чку с координа́тами (3; 0) паралле́льно оси́ OY (рис. 3).

$x = a$ – э́то уравне́ние прямо́й, паралле́льной оси́ *OY*.

Задача 3. На координа́тной пло́скости постро́йте все то́чки с ордина́той $y = 2$.

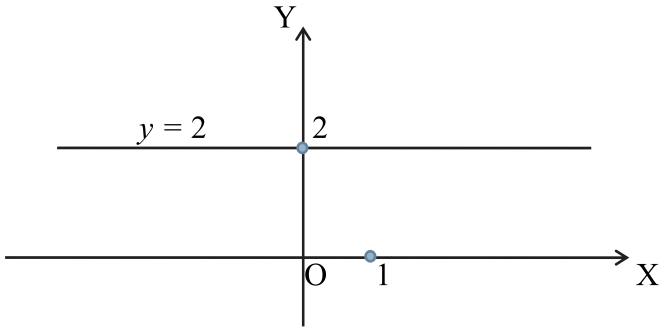


Рис. 4.

Реше́ние. Если постро́ить все то́чки с ордина́той $y = 2$, то полу́чим пряму́ю, кото́рая прохо́дит че́рез то́чку с координа́тами (0; 2) паралле́льно оси́ OX (рис.4). $y = 2$ – это уравне́ние прямо́й, паралле́льной оси́ OX.

Симме́трия то́чек на координа́тной пло́скости

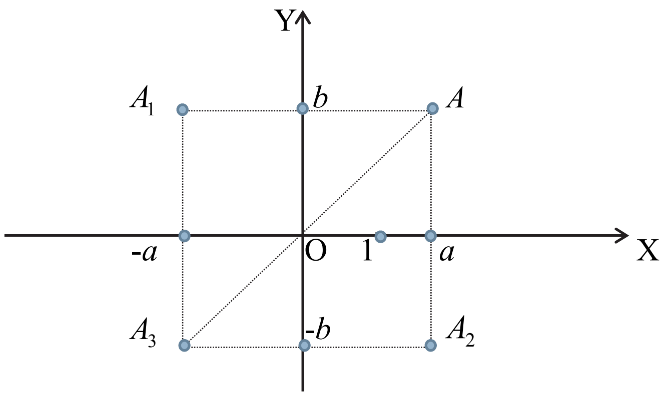


Рис. 5.

То́чки $A(a;b)$ и $A_1(-a;b)$ симметри́чны относи́тельно оси́ OY.

То́чки $A(a;b)$ и $A_2(a;-b)$ симметри́чны относи́тельно оси́ OX.

То́чки $A(a;b)$ и $A_3(-a;-b)$ симметри́чны относи́тельно нача́ла координа́т (то́чки O) (рис.5).

симметри́чн║ый, -ая, -ое, -ые, симметричен, симметрична, -о, -ы 1. to by symmetrical; 2. symetrique ; 3. simétrico; 4. symmetrisch; 5.对称的； 6.
относи́тельно (чегó?) 1. relatively with respect to;
2. relativement; 3. con respecto a; 4.relativ, bedingt, verhältnismäßig; 5. 相對地 （相对地）； 6.

То́чки $A(a;b)$ и $A_4(b;a)$ симметри́чны относи́тельно биссектри́сы пе́рвого и тре́тьего координа́тных угло́в (рис. 6).

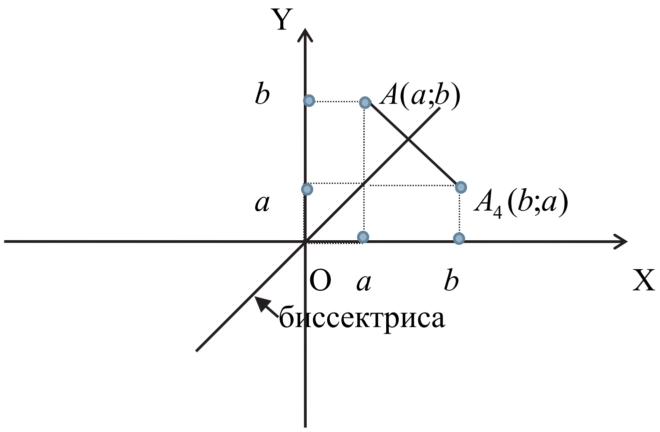


Рис. 6.

Задание 1. Постро́йте то́чки на координа́тной пло́скости.
A(3; -2), B(0; -1), C(4; -2), D(2; 0), E(-2; 3).

Расстоя́ние ме́жду то́чками $A\ (x_1; y_1)$ и $B\ (x_2; y_2)$ на пло́скости

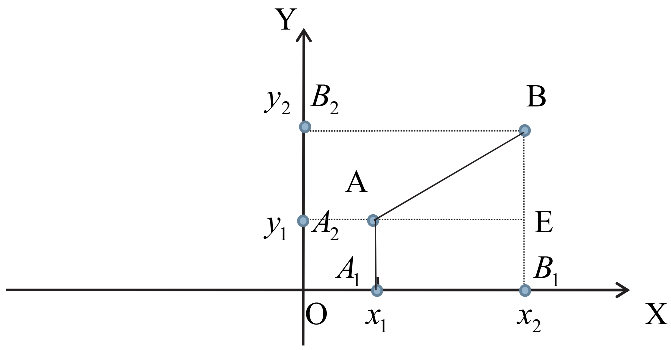


Рис. 7.

$$|A_1B_1| = |AE| = |x_2 - x_1|, \quad |A_2B_2| = |BE| = |y_2 - y_1|.$$

По теоре́ме Пифаго́ра $|AB| = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}$.

Задание 2. Найди́те расстоя́ние ме́жду двумя́ то́чками.
а) A(3; 2) и B(-1; 0); б) C(5; 7) и D(3; 2).

Задание 3. На координа́тной пло́скости постро́йте то́чки.
а) $x = -3$; б) $y = 1$; в) $x = 1$; г) $y = -2$.

Задание 4. Постро́йте на координа́тной пло́скости четырёх-угольник ABCD, если: A(-10; -2), B(-2; -2), C(-2; 6), D(-10; 6).

Задание 5. Постро́йте на координа́тной пло́скости треуго́льник (Δ) OBC, если: O(0; 0), B(4; 6), C(1; 5).

Занятие 17.

УРАВНЕНИЕ ПРЯМОЙ

Определение. Уравне́ние $ax+by+c=0$ – это уравне́ние пе́рвой сте́пени с двумя́ переме́нными. Оно та́кже называ́ется лине́йным уравне́нием.

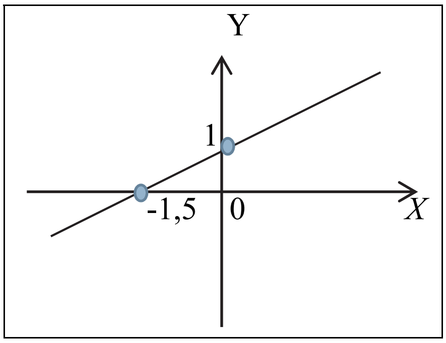
Гра́фик уравне́ния $ax+by+c=0$ – пряма́я.

Теорема. Люба́я пряма́я на пло́скости в прямоуго́льной систе́ме координа́т задаётся лине́йным уравне́нием.

Обратная теорема. Любо́е лине́йное уравне́ние задаёт пряму́ю на пло́скости.

Упражнение 1. Постро́йте гра́фик прямо́й ли́нии, за́данной уравне́нием $2x-3y+3=0$.

Решение. Для построе́ния прямо́й ну́жно взять две то́чки (рис. 1).



x	0	-1,5
y	1	0

Рис. 1.

Задание 1. Постро́йте гра́фик прямо́й.

а) $-x-2y+8=0$; б) $\frac{1}{2}x-y-1=0$; в) $2x+\frac{1}{3}y=0$;

г) $3x+9=0$; д) $\frac{1}{3}y+1=0$; е) $x+y=0$.

Любо́е уравне́ние ви́да $ax+by+c=0$ име́ет бесконе́чное мно́жество реше́ний.

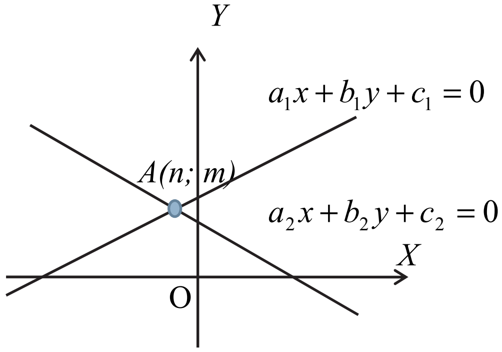
Системы линейных уравнений

$$\begin{cases} a_1x+b_1y+c_1=0, \\ a_2x+b_2y+c_2=0. \end{cases}$$

Это систе́ма двух уравне́ний пе́рвой сте́пени (лине́йных уравне́ний) с двумя́ неизве́стными.

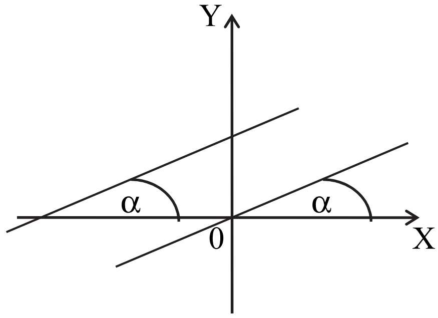
Ка́ждое уравне́ние э́той систе́мы имеет бесконе́чное мно́жество реше́ний и изобража́ется прямо́й ли́нией на пло́скости.

Если две прямы́е на пло́скости пересека́ются в то́чке *A(n; m)*, то соотве́тствующая систе́ма уравне́ний име́ет еди́нственное реше́ние (рис. 2).



$$\boxed{\frac{a_1}{a_2} \neq \frac{b_1}{b_2}}$$

Рис. 2.

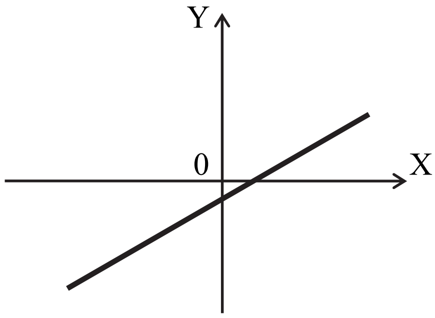


$$\boxed{\frac{a_1}{a_2} = \frac{b_1}{b_2} \neq \frac{c_1}{c_2}}$$

Рис. 3.

Если две прямы́е на пло́скости паралле́льны, то соотве́тствующая систе́ма уравне́ний не име́ет реше́ний (рис. 3).

Если две прямы́е на пло́скости совпада́ют, то систе́ма уравне́ний име́ет бесконе́чно мно́го реше́ний (рис. 4).



$$\boxed{\frac{a_1}{a_2}=\frac{b_1}{b_2}=\frac{c_1}{c_2}}$$

Рис. 4.

пересека́ться 1. to cross; 2. se couper; 3. atravesarse, cruzarse; 4. sich Kreuzen, sich überschneiden. 5. 交叉; 6.
совпада́ть 1. to coincide; 2. cancider; 3. coincidir; 4. sich Deckel, übereinstimmen, zusammenfallen; 5. 相合,相同,全等; 6.

Упражне́ние 2. Реши́те систе́му уравне́ний: $\begin{cases} 2x+3y-7=0, \\ x-y-6=0. \end{cases}$

Реше́ние.

$\begin{cases} 2x+3y-7=0, \\ x-y-6=0. \end{cases}$ $\frac{2}{1}\neq\frac{3}{-1}$ систе́ма уравне́ний име́ет реше́ние.

$$\left\{\begin{array}{l} 2x+3y-7=0, \\ x-y-6=0; \end{array}\right.\left|\begin{array}{l} \\ 3 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{l} 2x+3y-7=0, \\ 3x-3y-18=0; \end{array}\right. +$$

$$5x=25 \Rightarrow x=5, \quad 5-y=6 \Rightarrow y=-1.$$

Ответ: $\{(5;\,-1)\}$.

Зада́ние. 2. Реши́те сле́дующие систе́мы уравне́ний.

а) $\begin{cases}2x+y=11\\3x-2y=-1\end{cases}$; б) $\begin{cases}5x+3y=35\\2x-y=25\end{cases}$; в) $\begin{cases}x+8y=12\\3x-5y=36\end{cases}$;

г) $\begin{cases}3x-4y=7\\2x+3y=16\end{cases}$; д) $\begin{cases}4\text{x}+5\text{y}=5\\2\text{x}+3\text{y}=4\end{cases}$; е) $\begin{cases}x-3y=12\\2x+4y=90\end{cases}$;

ж) $\begin{cases}x+5y=7\\3x-2y=4\end{cases}$; з) $\begin{cases}x+2y=11\\5x-3y=3\end{cases}$; и) $\begin{cases}3x-y=5\\5x+2y=23\end{cases}$;

к) $\begin{cases}2x+y=8\\3x+4y=7\end{cases}$; л) $\begin{cases}7x+9y=8\\9x-8y=69\end{cases}$; м) $\begin{cases}2x+5y=15\\3x+8y=-1\end{cases}$;

н) $\begin{cases}2x+3y=-4\\5x+6y=-7\end{cases}$; о) $\begin{cases}3x-2y=11\\4x-5y=3\end{cases}$; п) $\begin{cases}5x+6y=13\\7x+18y=-1\end{cases}$.

Задание. 3. Реши́те систе́мы уравне́ний ме́тодом алгебра́ического сложе́ния.

а) $\begin{cases}2x+y=11\\3x-y=9\end{cases}$; б) $\begin{cases}x+5y=7\\x-3y=-1\end{cases}$; в) $\begin{cases}x-3y=4\\5x+3y=-1\end{cases}$;

г) $\begin{cases}4x+3y=6\\2x+y=4\end{cases}$; д) $\begin{cases}2x+5y=25\\4x+3y=15\end{cases}$; е) $\begin{cases}4x+3y=-4\\6x+5y=-7\end{cases}$;

ж) $\begin{cases}6x-7y=40\\-2x+5y=-8\end{cases}$; з) $\begin{cases}2x-3y=8\\7x-5y=-5\end{cases}$; и) $\begin{cases}7x-3y=15\\5x+6y=27\end{cases}$;

к $\begin{cases}2x+16y+1=0\\3x+4y+2=0\end{cases}$; л) $\begin{cases}28x+35y+3=0\\12x+15y+25=0\end{cases}$; м) $\begin{cases}7x-3y+1=0\\4x-5y+17=0\end{cases}$;

н) $\begin{cases}15x+23y+10=0\\3x+4y+2=0\end{cases}$; о) $\begin{cases}25x-4y+1=0\\31x-5y+16=0\end{cases}$.

Задание 4. Докажи́те, что систе́ма уравне́ний $\begin{cases}x+3y=7\\2x+6y=20\end{cases}$ не име́ет реше́ний (несовме́стна).

Задание 5. Докажи́те, что систе́мы уравне́ний име́ют реше́ния (совме́стны).

1. $\begin{cases} 4x+3y=11 \\ 8x+6y=22 \end{cases}$; 2. $\begin{cases} 3x-y=4 \\ x-3y=7 \end{cases}$; 3. $\begin{cases} x+y=14 \\ 5x+y=10 \end{cases}$.

Задание 6. Ве́рно ли, что систе́ма уравне́ний $\begin{cases} x+y=9 \\ 5x+5y=45 \end{cases}$ име́ет бесчи́сленное мно́жество реше́ний? Если да, то укажи́те не́сколько из них.

Задание 7. Докажи́те, что ка́ждая из предло́женных систе́м уравне́ний име́ет неопределённое реше́ние.

а) $\begin{cases} 3x-y=8 \\ 6x-2y=16 \end{cases}$; б) $\begin{cases} 7x+2y=12 \\ 21x+6y=36 \end{cases}$; в) $\begin{cases} 5x-y=9 \\ 10x-2y=18 \end{cases}$;

г) $\begin{cases} x+y=4 \\ \dfrac{x}{2}+\dfrac{y}{2}=2 \end{cases}$; д) $\begin{cases} 3x-y=72 \\ x-\dfrac{y}{3}=24 \end{cases}$;

Задание 8. Реши́те систе́мы уравне́ний.

а) $\begin{cases} 3(x-1)=4y+1 \\ 5(y-1)=x+1 \end{cases}$; б) $\begin{cases} 4(x+2)=1-5y \\ 3(y+2)=3-2x \end{cases}$;

в) $\begin{cases} 2(m+n)-3(m-n)=4 \\ 5(m+n)-7(m-n)=2 \end{cases}$; г) $\begin{cases} 5(3x+y)-8(x-6y)=200 \\ 20(2x-3y)-13(x-y)=520 \end{cases}$;

д) $\begin{cases} \dfrac{a}{2}-\dfrac{b}{3}=1 \\ \dfrac{a}{4}+\dfrac{2b}{3}=8 \end{cases}$; е) $\begin{cases} \dfrac{z}{4}+\dfrac{t}{8}=2 \\ \dfrac{z}{8}+\dfrac{t}{4}=2{,}5 \end{cases}$; ж) $\begin{cases} \dfrac{2x}{9}+\dfrac{y}{4}=11 \\ \dfrac{5x}{12}+\dfrac{y}{3}=19 \end{cases}$;

з) $\begin{cases} \dfrac{k}{5}+\dfrac{5t}{2}=-4 \\ \dfrac{k}{6}+\dfrac{t}{3}=\dfrac{1}{6} \end{cases}$; и) $\begin{cases} -\dfrac{2t}{3}+\dfrac{r+t}{2}=2{,}5 \\ 1{,}5r+2t=0 \end{cases}$;

к) $\begin{cases} \dfrac{a+3}{2}-\dfrac{b-2}{3}=2 \\ \dfrac{a-1}{4}+\dfrac{b+1}{3}=4 \end{cases}$; л) $\begin{cases} \dfrac{q+s}{5}+0{,}2s=-2 \\ \dfrac{2q-s}{3}-0{,}75q=1{,}5 \end{cases}$;

м) $\begin{cases} \dfrac{3y-2}{4}+\dfrac{2x-1}{5}=2 \\ \dfrac{3x+1}{5}=\dfrac{3y+2}{4} \end{cases}$; н) $\begin{cases} \dfrac{2x+3}{3y-2}=1 \\ x(2y-5)-2y(x+3)=2x+1 \end{cases}$;

о) $\begin{cases} \dfrac{x+1}{y+2}=5 \\ 3(2x-5)-4(3y+4)=5 \end{cases}$; п) $\begin{cases} \dfrac{x+1}{3}-\dfrac{y+2}{4}=\dfrac{2(x-y)}{5} \\ \dfrac{x-3}{4}-\dfrac{y-3}{3}=2y-x \end{cases}$;

р) $\begin{cases} \dfrac{3x-2y}{5}+\dfrac{5x-3y}{3}=x+1 \\ \dfrac{2x-3y}{3}+\dfrac{4x-3y}{2}=y+1 \end{cases}$; с) $\begin{cases} \dfrac{2x-y+3}{3}-\dfrac{x-2y+3}{4}=4 \\ \dfrac{3x-4y+3}{4}+\dfrac{4x-2y-9}{3}=4 \end{cases}$;

т) $\begin{cases} \dfrac{x-3y}{4}-2x=-7-\dfrac{y+5}{3} \\ \dfrac{10(x-y)-4(1-x)}{3}=y \end{cases}$; у) $\begin{cases} 1-\dfrac{x+1}{5}=0{,}3(y-2) \\ \dfrac{y-3}{4}+1{,}5=\dfrac{4x+9}{20} \end{cases}$;

ф) $\begin{cases} 4(0{,}1x+1)+5=1{,}1y \\ \dfrac{11+0{,}3y-x}{x}-1=\dfrac{4}{x} \end{cases}$; х) $\begin{cases} (x+3)(y+5)=(x+1)(y+8) \\ (2x-3)(5y+7)=2(5x-6)(y+1) \end{cases}$;

ц) $\begin{cases} (x+5)(y-2)=(x+2)(y-1) \\ (x-4)(y+7)=(x-3)(y+4) \end{cases}$; ч) $\begin{cases} x:y=3:4 \\ (x-1):(y+2)=1:2 \end{cases}$;

ш) $\begin{cases}(x+4):(y+1)=2\\(x+2):(y-2)=3\end{cases}$; щ) $\begin{cases}\dfrac{2(a-b)}{3}+1{,}6=\dfrac{8a}{15}-\dfrac{3b-10}{5}\\\dfrac{3a+4}{4}+\dfrac{b}{8}=\dfrac{5a}{6}-\dfrac{b-17}{12}\end{cases}$;

э) $\begin{cases}\dfrac{3(x-y)}{4}+0{,}25=\dfrac{5x}{2}-\dfrac{y+19}{5}\\\dfrac{3x-1}{5}-\dfrac{y+9}{2}=-2x\end{cases}$.

Задание 9. Реши́те сле́дующие систе́мы, испо́льзуя приём введе́ния но́вых (вспомога́тельных) неизве́стных.

а) $\begin{cases}\dfrac{1}{x}+\dfrac{1}{y}=\dfrac{5}{6}\\\dfrac{1}{x}-\dfrac{1}{y}=\dfrac{1}{6}\end{cases}$; б) $\begin{cases}\dfrac{1}{x}-\dfrac{8}{y}=8\\\dfrac{5}{x}+\dfrac{4}{y}=51\end{cases}$; в) $\begin{cases}\dfrac{2}{x}+\dfrac{5}{y}=30\\\dfrac{3}{x}+\dfrac{4}{y}=31\end{cases}$;

г) $\begin{cases}\dfrac{15}{x}-\dfrac{7}{y}=9\\\dfrac{4}{x}+\dfrac{9}{y}=35\end{cases}$; д) $\begin{cases}\dfrac{1}{x+y}+\dfrac{1}{x-y}=\dfrac{5}{8}\\\dfrac{1}{x-y}-\dfrac{1}{x+y}=\dfrac{3}{8}\end{cases}$;

е) $\begin{cases}\dfrac{10}{x-5}+\dfrac{1}{y+2}=1\\\dfrac{25}{x-5}+\dfrac{3}{y+2}=2\end{cases}$; ж) $\begin{cases}\dfrac{2}{x-y}+\dfrac{6}{x+y}=1{,}1\\\dfrac{4}{x-y}-\dfrac{9}{x+y}=0{,}1\end{cases}$;

з) $\begin{cases}\dfrac{11}{2x-3y}+\dfrac{18}{3x-2y}=13\\\dfrac{27}{3x-2y}-\dfrac{2}{2x-3y}=1\end{cases}$; и) $\begin{cases}\dfrac{4}{x+2y}-\dfrac{1}{x-2y}=1\\\dfrac{20}{x+2y}+\dfrac{3}{x-2y}=1\end{cases}$.

Занятие 3. (Дополнительное)

АЛГЕБРАИЧЕСКИЕ ДРОБИ

Определение. Алгебраи́ческой дро́бью называ́ется дро́бное рациона́льное выраже́ние, предста́вленное отноше́нием двух многочле́нов.

Де́йствия с алгебраи́ческими дробя́ми те же, что и де́йствия с числовы́ми дробя́ми; при э́том они́ выполня́ются на **о́бласти допусти́мых значе́ний** переме́нных (ОДЗ). Это зна́чит, пре́жде чем выполня́ть де́йствия с алгебраи́ческими дробя́ми, поле́зно вы́яснить их ОДЗ, т.е. когда́ э́то алгебраи́ческое выраже́ние име́ет смысл.

Приме́ры алгебраи́ческих дробе́й:

$$\frac{3a+b}{a^3-1};\ \frac{ab-b}{c+a};\ \frac{a^2+b^3}{a-b};\ \frac{x+xy+y^2}{x^2-xy+y}.$$

Примеры:

1. Приведи́те к о́бщему знамена́телю сле́дующие алгебраи́ческие дроби:

а) $\frac{m}{n};\ \frac{p}{t}$.

Реше́ние. Знамена́тели дробе́й n и t не име́ют о́бщего дели́теля, кро́ме едини́цы, сле́довательно, о́бщим знамена́телем дробе́й явля́ется произведе́ние $n \cdot t$ (объясни́те почему́, для э́того вспо́мните приведе́ние числовы́х дробе́й к о́бщему знамена́телю). Получа́ем $\frac{m}{n}=\frac{mt}{nt};\ \frac{p}{t}=\frac{pn}{tn}$.

б) $\frac{a}{3b};\ \frac{c}{2a};\ \frac{c}{10a^2}$.

Реше́ние. Сравни́м знамена́тели за́данных дробе́й: $3b$, $2a$, $10a^2$. Аналоги́чно вышеизло́женному в приме́ре а) НОК($3b$,$2a$,$10a^2$) ра́вен произведе́нию $3b\cdot 10a^2$ или $30a^2b$. Поэ́тому да́нные дро́би мо́жно записа́ть так:

$$\frac{a\cdot 10a^2}{3b\cdot 10a^2};\ \frac{c\cdot 15ab}{2a\cdot 15ab};\ \frac{c\cdot 3b}{10a^2\cdot 3b}$$

и́ли ина́че: $\frac{10a^3}{30a^2b};\ \frac{15abc}{30a^2b};\ \frac{3bc}{30a^2b}$

в) $\frac{2a}{3nm};\ \frac{5b}{m^2};\ \frac{c}{a+2}.$

*Реше́ние***.** Наиме́ньшим о́бщим кра́тным (НОК) знамена́телей за́данных дробе́й явля́ется произведе́ние $3(a+2)m^2n$ (объясни́те почему́). Поэ́тому да́нные дро́би мо́жно переписа́ть в ви́де: $\frac{2a(a+2)m}{3(a+2)m^2n};\ \frac{15(a+2)bn}{3(a+2)m^2n};\ \frac{3(a+2)cnm^2}{3(a+2)m^2n}.$

г) $\frac{a}{a^3-b^3};\ \frac{c}{a^2-b^2};\ \frac{d}{a^2+ab+b^2}.$

Реше́ние. Разлага́я знамена́тели ка́ждой дро́би на мно́жители, перепи́шем дро́би так:

$$\frac{a}{(a-b)(a^2+ab+b^2)};\frac{c}{(a-b)(a+b)};\frac{d}{a^2+ab+b^2}.$$

Тепе́рь, умножа́я числи́тель и знамена́тель пе́рвой дро́би на $(a+b)$, второ́й – на (a^2+ab+b^2), тре́тьей – на $(a-b)(a+b)$, получа́ем

$$\frac{a(a+b)}{(a-b)(a+b)(a^2+ab+b^2)};\ \frac{c(a^2+ab+b^2)}{(a-b)(a+b)(a^2+ab+b^2)};$$

$\frac{d(a-b)(a+b)}{(a-b)(a+b)(a^2+ab+b^2)}$. Тепе́рь у э́тих дробе́й одина́ковые знамена́тели, т.е. исхо́дные дро́би *приведены́ к о́бщему знамена́телю.*

В ка́честве упражне́ния сформули́руйте алгори́тм приведе́ния алгебраи́ческих дробе́й к о́бщему знамена́телю.

2. Найди́те о́бласть допусти́мых значе́ний алгебраи́ческого выраже́ния $\frac{a^3-1}{a^2-1}:\frac{a}{b}$.

Реше́ние. Да́нное алгебраи́ческое выраже́ние явля́ется ча́стным двух алгебраи́ческих дробе́й: $\frac{a^3-1}{a^2-1}$ и $\frac{a}{b}$. Пе́рвое зави́сит от одно́й переме́нной a, второ́е – от a и b. Сле́довательно, алгебраи́ческое выраже́ние зави́сит от двух переме́нных. Пе́рвая алгебраи́ческая дробь име́ет смысл при $a \neq \pm 1$, так как в проти́вном слу́чае её знамена́тель ра́вен нулю́; а втора́я – при $b \neq 0$. Но е́сли $a = 0$, тогда́ пришло́сь бы пе́рвую дробь дели́ть на ноль (значе́ние $a = 0$ обраща́ет втору́ю дробь в ноль), что не допусти́мо.

Отве́т: Все па́ры (a; b), при $a \neq \pm 1$, $a \neq 0$, $b \neq 0$.

3. Вы́полните де́йствия:

а) $\frac{a}{a-b}+\frac{b}{a+b}$.

Реше́ние.

$$\frac{a}{a-b}+\frac{b}{a+b}=\frac{a^{\underline{|a+b}}}{a-b}+\frac{b^{\underline{|a-b}}}{a+b}=\frac{a(a+b)+b(a-b)}{(a+b)(a-b)}=$$

$$=\frac{a^2+ab+ab-b^2}{a^2-b^2}=\frac{a^2+2ab-b^2}{a^2-b^2}.$$

б) $\frac{1}{x-y}-\frac{1}{y-x}-\frac{2x}{x^2-y^2}$.

Реше́ние. Вынося́ о́бщий мно́житель -1 в знамена́теле второ́й дро́би за́данного выраже́ния, поменя́ем знак перед второ́й дро́бью.

$$\frac{1}{x-y}+\frac{1}{x-y}-\frac{2x}{x^2-y^2}, \text{ тогда } \frac{2^{|\underline{x+y}}}{x-y}-\frac{2x}{x^2-y^2}=$$

$$=\frac{2x+2y-2x}{x^2-y^2}=\frac{2y}{x^2-y^2};$$

в) $\frac{1-a^2}{1+b}\cdot\frac{1-b^2}{a+a^2}\cdot\left(1+\frac{a}{1-a}\right)$.

Реше́ние.

$$\frac{1-a^2}{1+b}\cdot\frac{1-b^2}{a+a^2}\cdot\left(1+\frac{a}{1-a}\right)=\frac{(1-a)}{1}\cdot\frac{(1-b)}{a}\cdot\frac{1-a+a}{1-a}=\frac{1-b}{a}.$$

г) $\frac{a}{a^3-b^3}:\frac{ab^2}{a^2-b^2}$.

Реше́ние.

$$\frac{a}{a^3-b^3}:\frac{ab^2}{a^2-b^2}=\frac{a}{a^3-b^3}\cdot\frac{a^2-b^2}{ab^2}=$$

$$=\frac{a}{(a-b)\left(a^2+ab+b^2\right)}\cdot\frac{(a-b)(a+b)}{ab^2}=\frac{(a+b)}{b\left(a^2+ab+b^2\right)}.$$

4. Упрости́те $\left[\left(\frac{a^2+b^2}{b}-a\right):\left(\frac{1}{b}-\frac{1}{a}\right)\right]\cdot\frac{a^2-b^2}{a^3+b^3}$.

Реше́ние.

$$\left[\left(\frac{a^2+b^2}{b}-a\right):\left(\frac{1}{b}-\frac{1}{a}\right)\right]\cdot\frac{a^2-b^2}{a^3+b^3}=$$

$$=\left[\left(\frac{a^2+b^2}{b}-a^{|\underline{b}}\right):\left(\frac{1^{|\underline{a}}}{b}-\frac{1^{|\underline{b}}}{a}\right)\right]\cdot\frac{a^2-b^2}{a^3+b^3}=$$

$$= \frac{a^2 + b^2 - ab}{b} : \left(\frac{a-b}{ab} \right) \cdot \frac{(a-b)(a+b)}{a^3 + b^3} =$$

$$= \frac{\left(a^2 + b^2 - ab\right) \cdot ab \cdot (a-b) \cdot (a+b)}{b \cdot (a-b) \cdot \left(a^3 + b^3\right)} =$$

$$= \frac{a(a+b)\left(a^2 - ab + b^2\right)}{a^3 + b^3} = \frac{a\left(a^3 + b^3\right)}{a^3 + b^3} = a.$$

Задание 1. Разложи́те числи́тель дро́би на мно́жители и сократи́те дробь.

а) $\frac{a^2 - b^2}{b + a}$; б) $\frac{8 - a^3}{a^2 + 2a + 4}$; в) $\frac{8 + a^3}{a^2 - 2a + 4}$;

г) $\frac{1 - a^2}{a - 1}$; д) $\frac{a^3 - 1}{1 - a}$; е) $\frac{b^3 - 1}{b^2 - b + 1}$.

Задание 2. Приведи́те к о́бщему знамена́телю алгебраи́ческие дро́би.

а) $\frac{1}{1-a}$, $\frac{1}{1-a^2}$; б) $\frac{1}{b-a}$, $\frac{1}{b-a^2b}$;

в) $\frac{1}{b-a}$, $\frac{1}{b-a^2b}$, $\frac{1}{b^2-a^4b^2}$; г) $\frac{1}{a^3-b^3}$, $\frac{1}{a^2-b^2}$, $\frac{1}{a^2+ab+b^2}$;

д) $\frac{1}{a^3+b^3}$, $\frac{1}{a^2-b^2}$, $\frac{1}{a^2-ab+b^2}$, $\frac{1}{2b+2a}$;

е) $\frac{b}{x-1}$, $\frac{d+1}{x^2-1}$, $\frac{k}{x^3-1}$, $\frac{l}{x^4-1}$;

ж) $\frac{1}{x^2-y^2-z^2-2yz}$, $\frac{1}{x+y+z}$, $\frac{-x+y}{x-y-z}$.

Задание 3. Найди́те о́бласть допусти́мых значе́ний алгебраических выраже́ний.

а) $\frac{1}{bc}-\frac{1}{a-2}$; б) $\frac{a}{b}\cdot\frac{b-1}{a^2-4}$; в) $\frac{b}{a}\cdot\frac{a^2-1}{a^3-4}$;

г) $\frac{a}{b+c}-\frac{d}{b^2c+c^2b}$; д) $\frac{(b+c)(a+c)}{ab+cd+cb+ad}$; е) $\frac{ab}{c-d}:\frac{c+d}{a}$.

Задание 4. Вы́полните де́йствия.

а) $\frac{2p+3}{p+1}+\frac{2-p}{p+1}$; б) $\frac{2-3k}{2b+1}+\frac{2-2k}{2b+1}$; в) $\frac{z}{z+1}-\frac{y}{2z+y}$;

г) $\frac{1}{p+q}+\frac{1}{p-q}$; д) $\frac{a^2-1}{a}\cdot\frac{a^3}{a+1}\cdot\frac{1}{a-1}$; е) $\frac{x^2+xy}{x^2-y^2}\cdot\frac{x^2-xy}{x^3+y^3}$;

ж) $\frac{m^3-n^3}{m^3+n^3}:\frac{(m-n)^2}{m^2-n^2}\cdot\frac{m^2-mn+n^2}{m^2+mn+n^2}$;

з) $\left(\frac{x^2}{x-y}-y\right):\left(x+\frac{y^2}{x+y}\right)$; и) $\left(\frac{p-q}{p+q}+\frac{p+q}{p-q}\right):\left(\frac{p}{q}+\frac{q}{p}\right)$;

к) $\left(\frac{n}{m-n}+\frac{m}{m+n}\right)\left(\frac{m+n}{m^2+n^2}\right)\left(\frac{m-n}{n+m}\right)$.

Задание 5. Упрости́те алгебраи́ческие выраже́ния.

а) $\frac{x^2+xy}{x^2+y^2}\left(\frac{x}{x-y}-\frac{y}{x+y}\right)$;

б) $\left(\frac{x+y}{x}-\frac{2x}{x-y}\right)\left(\frac{y-x}{x^2+y^2}\right)$;

в) $\left(\frac{x^2}{a^2}-\frac{x}{a}+1\right)\left(\frac{x^2}{a^2}+\frac{x}{a}+1\right)\cdot\frac{a}{x^4+x^2a^2+a^4}$;

г) $\frac{a+2x}{3a-3x}-\frac{3c-a}{2a-2c}+\frac{a^2-cx}{a^2-ac+cx-ax}$;

д) $\frac{4xy\left((x+z)^2-y^2\right)}{z^2-x^2-y^2+2xy}\left(1-\frac{2x}{x+y+z}\right)$;

е) $\left(\frac{m-n}{m+n}-\frac{m^3-n^3}{m^3+n^3}\right)\left(\frac{m-n}{m+n}+\frac{m^2+n^2}{m^2-n^2}\right)$;

ж) $\left(\frac{x+y}{x-y}-\frac{x-y}{x+y}\right):\left(\frac{x+y}{x-y}+\frac{x-y}{x+y}\right)$;

з) $\left(\frac{1}{x}+\frac{1}{y}\right)\left[(x-y)^2+xy\right]+\left(\frac{1}{x}-\frac{1}{y}\right)\left[(x+y)^2-xy\right]$;

и) $\frac{x+\frac{1}{y}}{x+\frac{z}{yz+1}}-\frac{1}{y(xyz+x+z)}$;

к) $\frac{1+x}{(x-y)(x-z)}+\frac{1+y}{(y-z)(y-x)}+\frac{1+z}{(z-x)(z-y)}$;

л) $\frac{3xyz}{xy+yz+zx}+\frac{\frac{1-x}{x}+\frac{1-y}{y}+\frac{1-z}{z}}{\frac{1}{x}+\frac{1}{y}+\frac{1}{z}}$;

м) $\left(a^2-b^2-\frac{4a^2b-4ab^2}{a+b}\right):\left(\frac{a}{a+b}+\frac{b}{b-a}-\frac{2ab}{a^2-b^2}\right)$.

Занятие 18.

КВАДРАТНЫЙ ТРЁХЧЛЕН

Выраже́ние $f(x) = ax^2 + bx + c$, где x – переме́нная, a, b, c – чи́сла и $a \neq 0$, называ́ется квадра́тным трёхчле́ном. ОДЗ: $x \in R$.

Значе́ние квадра́тного трёхчле́на $f(x)$ зави́сит от значе́ния переме́нной x.

что? (*им. п.*) **зави́сит от чего?** (*род. п.*)

Значе́ние $f(x)$ зави́сит от значе́ния x.

зави́сеть (от чего́?) 1. to depend; 2. dependre de; 3. depender de; 4. abhängen; 5. 依靠,依籟,（依靠，依赖）; 6.

Наприме́р, значе́ние $f(x) = -2x^2 + 5x – 7$ зави́сит от x.
Если $x = -2$, то $f(-2) = -25$.
Если $x = 0$, то $f(0) = -7$.
Если $x = -1$, то $f(-1) = -14$.

Для вычисле́ния значе́ний квадра́тный трёхчле́н $f(x) = ax^2 + bx + c$ запи́шем в ви́де $f(x) = (ax + \mathrm{b})\mathrm{x} + c$. Значе́ние $f(x)$ нахо́дим по э́той фо́рмуле.

записа́ть в ви́де 1. to write in the form; 2. escrire a la forme; 3. escribir en la forma de; 4. aufgeshreiben werden in Form; 5. 記下來程式; 6.

Упражнение 1. Найди́те значе́ние $f(x) = -2x^2 + 4x + 5$, е́сли $x \in \{-6; 3; 5; -1\}$.

Решение.

$f(x) = (-2x + 4)x + 5$; $f(-6) = (-2(-6) + 4)(-6) + 5 =$
$= (12 + 4)(-6) + 5 = 16(-6) + 5 = -96 + 5 = -91$;

$f(3) = (-2·3 + 4)3 + 5 = (-6 + 4)·3 + 5 = -6 + 5 = -1;$
$f(5) = (-2·5 + 4)5 + 5 = (-10 + 4)5 + 5 = -30 + 5 = -25;$
$f(-1) = (2 + 4) ·(-1) + 5 = -8 + 5 = -3.$

Задание 1. Найди́те значе́ние.
а) $f(x) = 7x^2 – 13x + 2$, е́сли x $\in$ {-4; 5};
б) $f(x) = 4x^2 – 2x - 7$, е́сли x $\in \left\{-\frac{1}{2}; -\frac{3}{4}\right\}$.

Выделе́ние квадрата двучлена

$x – a$ – э́то двучле́н.
$(x – a)^2$ – это́ квадра́т двучле́на.

вы́делить (что?) 1. allocate; 2. distinguez; 3. sacar;
4. auszeichnen; 5. 分離出來, 分出, (分离出来，分出); 6.

что? (*вин. п.*) **вы́делить из чего́?** (*род. п.*)

Упражнение 2. Квадра́т двучле́на вы́делите из квадра́тного трёхчле́на $f(x) = x^2 + 6x + 5$.
Решение. $f(x) = x^2 + 6x + 5 = x^2 + 2x·3 + 5 =$
$= x^2 + 2x·3 + 3^2 – 3^2 + 5 = (x + 3)^2 - 4.$

Пусть дан многочле́н $f(x) = x^2 + 6x + 5$. Сде́лаем не́которые преобразова́ния: $f(x) = x^2 + 6x + 5 = (x + 3)^2 – 4$ – э́то преобразова́ние называ́ется выделе́нием квадра́та двучле́на. Оно же называ́ется выделе́нием по́лного квадра́та из квадра́тного трёхчле́на.

Упражне́ние 3. Квадра́т двучле́на вы́делите из квадра́тного трёхчле́на $ax^2 + bx + c, \quad a \neq 0$.

Реше́ние. $ax^2 + bx + c = a\left(x^2 + \frac{b}{a}x + \frac{c}{a}\right) =$

$$= a\left(x^2 + 2\frac{b}{2a}x + \frac{c}{a}\right) = a\left(x^2 + 2\frac{b}{2a}x + \frac{b^2}{4a^2} - \frac{b^2}{4a^2} + \frac{c}{a}\right) =$$

$$=a\left(\left(x+\frac{b}{2a}\right)^2-\frac{b^2-4ac}{4a^2}\right)=a\left(x+\frac{b}{2a}\right)^2-\frac{b^2-4ac}{4a}.$$

$$\boxed{ax^2+bx+c=a\left(x+\frac{b}{2a}\right)^2-\frac{b^2-4ac}{4a}}$$

Определение. Выраже́ние b^2-4ac называ́ется дискримина́нтом и обознача́ется Δ: $\Delta = b^2-4ac$.

что? (*вин. п.*) **обознача́ется чем?** (*тв. п.*)

дискримина́нт обознача́ется Δ;
мно́жество натура́льных чи́сел обознача́ется ***N***.

$f(x) = ax^2 + bx + c,\ a \neq 0$ – о́бщий вид квадра́тного трёхчле́на.

$f(x) = a\left(x+\frac{b}{2a}\right)^2-\frac{b^2-4ac}{4a}$ – канони́ческий вид квадра́тного трёхчле́на.

Задание 2. Квадра́т двучле́на вы́делите из квадра́тного трёхчле́на.

а) $f(x)=-\frac{1}{3}x^2-4x+4$;   б) $f(x)=0{,}2x^2-2x+3$;

в) $f(x)=-2x^2-5x-2$;   г) $f(x)=-0{,}5x^2-0{,}2x+1$;

д) $f(x)=2x^2-5x+2$;   е) $f(x)=3x^2-4x-1$.

Задание 3. Разложи́те на мно́жители.

а) x^2-9;   б) $(x-3)^2-4$;   в) $6\left((x+1)^2-\frac{4}{25}\right)$;

г) $\left(\left(x+\frac{1}{2}\right)^2-\frac{1}{16}\right)$;   д) $2\left((x+m)^2-\frac{3}{4}\right)$;   е) $\left((x+n)^2-\frac{5}{4m^2}\right)$.

Занятие 19.

РАЗЛОЖЕНИЕ КВАДРАТНОГО ТРЁХЧЛЕНА НА ЛИНЕЙНЫЕ МНОЖИТЕЛИ

$$ax^2 + bx + c = a\left(\left(x+\frac{b}{2a}\right)^2 - \frac{\Delta}{4a^2}\right).$$

Если $\Delta \geq 0$, то выраже́ние $\sqrt{\Delta}$ име́ет смысл и выраже́ние $\left(x+\frac{b}{2a}\right)^2 - \frac{\Delta}{4a^2} = \left(x+\frac{b}{2a}\right)^2 - \left(\frac{\sqrt{\Delta}}{2a}\right)^2$ – ра́зность квадра́тов $x+\frac{b}{2a}$ и $\frac{\sqrt{\Delta}}{2a}$. Тогда́ име́ем: $a\left(\left(x+\frac{b}{2a}\right)^2 - \left(\frac{\sqrt{\Delta}}{2a}\right)^2\right) =$

$$= a\left(x+\frac{b}{2a}-\frac{\sqrt{\Delta}}{2a}\right)\left(x+\frac{b}{2a}+\frac{\sqrt{\Delta}}{2a}\right) = a\left(x+\frac{b-\sqrt{\Delta}}{2a}\right)\left(x+\frac{b+\sqrt{\Delta}}{2a}\right) =$$

$$= a\left(x-\frac{-b+\sqrt{\Delta}}{2a}\right)\left(x-\frac{-b-\sqrt{\Delta}}{2a}\right).$$

Обозна́чим $\frac{-b+\sqrt{\Delta}}{2a} = x_1$ и $\frac{-b-\sqrt{\Delta}}{2a} = x_2$.

Тогда́ $ax^2 + bx + c = a(x-x_1)(x-x_2)$, где $x_{1,2} = \frac{-b\pm\sqrt{\Delta}}{2a}$.

Теорема. Если $\Delta \geq 0$, то квадра́тный трёхчле́н $ax^2 + bx + c$ мо́жно разложи́ть на линейные мно́жители, т.е. $ax^2 + bx + c = a(x-x_1)(x-x_2)$.

Задание 1. Разложи́те на мно́жители.

а) $3x^2 - 7x + 4$; б) $2x^2 - 2x + \frac{1}{2}$; в) $-7x^2 - x + 8$;

г) $3x^2 - 13x - 10$; д) $5x^2 - 9x - 2$; е) $2x^2 - x - 3$.

Задание 2. Сократи́те дробь.

а) $\dfrac{5x^2-9x-2}{5x+1}$; б) $\dfrac{2x^2-x-3}{x+1}$; в) $\dfrac{4x^2-4x-3}{2x+1}$;

г) $\dfrac{3x^2-8x-3}{3x+1}$; д) $\dfrac{3x^2-7x+4}{x-1}$; е) $\dfrac{3x^2-13x+10}{x-1}$.

Задание 3. Вы́полните действия.

а) $\dfrac{x}{2x+1}\left(\dfrac{1}{x+2}+\dfrac{5}{x^2-x-6}+\dfrac{2x}{x-3}\right)$;

б) $\dfrac{3}{x-3}+\dfrac{4}{x^2-5x+6}+\dfrac{2x}{x-2}$; в) $\dfrac{x-3}{x^2+2x-3}-\dfrac{9}{9-x^2}$;

г) $\dfrac{x+4}{x-1}-\dfrac{37x-12}{4x^2-3x-1}$; д) $\dfrac{4x^2-1}{2x+1}\cdot\dfrac{4-13x}{2x^2-7x+3}$.

Задание 4. Найди́те мно́жество значе́ний квадра́тного трёхчле́на.

а) $f(x)=3x^2-14x+16$; б) $f(x)=x^2-4x$;

в) $f(x)=-\dfrac{1}{2}x^2+3x-4{,}5$; г) $f(x)=-\dfrac{2}{3}x^2+x+\dfrac{2}{3}$.

Квадра́тное уравне́ние

$ax^2+bx+c=0$, где $a\neq 0$ – это квадра́тное уравне́ние.

Ле́вая часть квадра́тного уравне́ния ax^2+bx+c – это квадра́тный трёхчле́н.

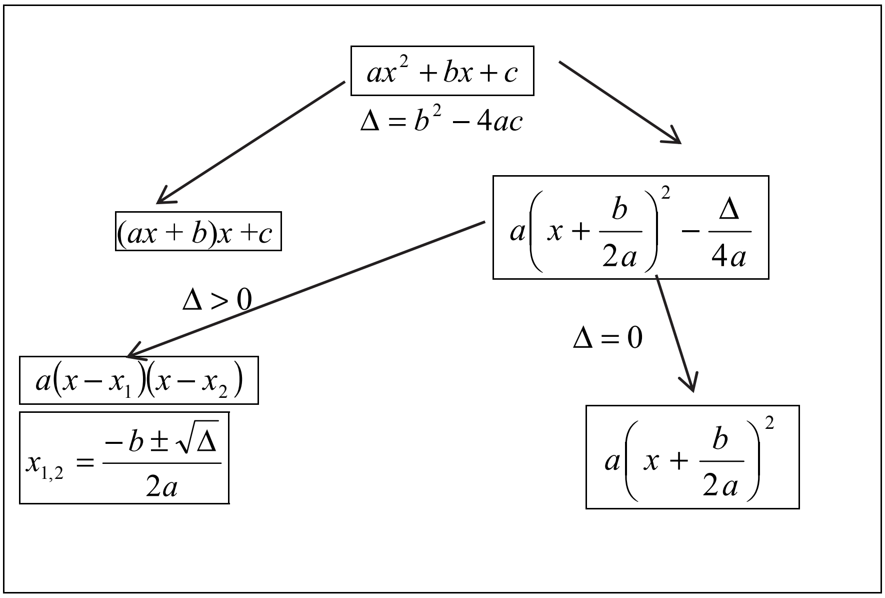
Если $\Delta=b^2-4ac>0$, то $ax^2+bx+c=a(x-x_1)(x-x_2)$. Уравне́ние $ax^2+bx+c=0 \Leftrightarrow a(x-x_1)(x-x_2)=0$, x_1 и x_2 – ко́рни уравне́ния и $x_1=\dfrac{-b-\sqrt{\Delta}}{2a}$, $x_2=\dfrac{-b+\sqrt{\Delta}}{2a}$.

Если $\Delta>0$, то квадра́тное уравне́ние име́ет два разных действи́тельных ко́рня $x_1\neq x_2$ и $x_1\in R$ и $x_2\in R$.

Если $\Delta=0$, то квадра́тное уравне́ние име́ет два кра́тных ко́рня $x_1=x_2\in R$.

Если $\Delta < 0$, то квадра́тное уравне́ние не име́ет действи́тельных корне́й.

ЗАПО́МНИТЕ!



Сво́йства корне́й квадра́тного уравне́ния (теоре́ма Вие́та)

$$ax^2 + bx + c = 0,\ \Delta \geq 0 \ \Rightarrow \begin{cases} x_1 + x_2 = -\dfrac{b}{a}, \\ x_1 \cdot x_2 = \dfrac{c}{a}. \end{cases}$$

Задание 5. Реши́те уравне́ние.

а) $\dfrac{2}{x} + \dfrac{10}{x^2 - 2x} = \dfrac{1 + 2x}{x - 2}$; б) $\dfrac{2}{4 - x} + \dfrac{48}{16 - x^2} = \dfrac{2 - x}{4 + x}$.

Задание 6. Пусть x_1 и x_2 – корни квадратного уравнения $x^2 + px + q = 0$. Выразите через p и q.

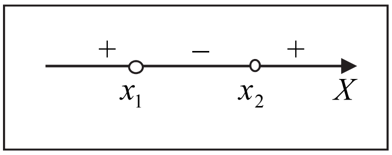
а) $x_1^2 + x_2^2$;   б) $x_1^3 + x_2^3$;   в) $x_1^4 + x_2^4$.

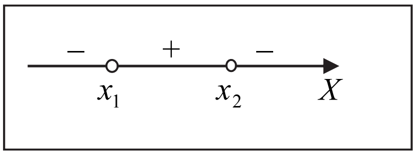
Занятие 20.
РЕШЕНИЕ НЕРАВЕНСТВ

$$ax^2 + bx + c > 0 \text{ и } ax^2 + bx + c < 0\text{, где } a \neq 0$$

1. Если $\Delta = b^2 - 4ac > 0$, тогда́ ле́вую часть нера́венств мо́жно разложи́ть на мно́жители и иска́ть реше́ние ме́тодом интерва́лов: $a(x - x_1)(x - x_2) > 0$ и́ли $a(x - x_1)(x - x_2) < 0$.

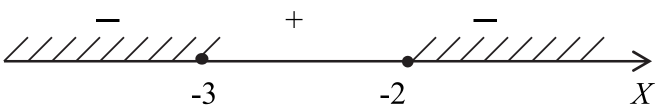
$a > 0, \Delta > 0$ $a < 0, \Delta > 0$





Упражнение 1. Реши́те нера́венство $-x^2 - 5x - 6 \leq 0$.

Реше́ние. $\Delta = 25 - 4\cdot(-1)\cdot(-6) = 1$; $x_1 = \dfrac{5-1}{-2} = -2$ или $x_2 = \dfrac{5+1}{-2} = -3$. Име́ем $-x^2 - 5x - 6 \leq 0 \Leftrightarrow -(x + 2)(x + 3) \leq 0$.



Отве́т: $x \in (-\infty; -3] \cup [-2; +\infty)$.

Упражнение 2. При каки́х значе́ниях x выраже́ние $f(x) = -6x^2 + x + 1$ принимает положи́тельные значе́ния и при каки́х – отрица́тельные?

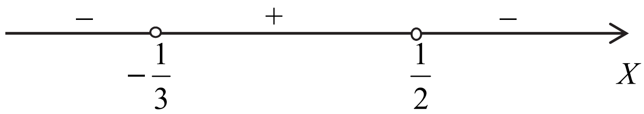
Реше́ние.

1. $D(f) = R$.
2. $\Delta = 1 - 4\cdot(-6)\cdot 1 = 25 = 5^2$.

$x_1 = -\frac{1}{3}$; $x_2 = \frac{1}{2}$;

$$f(x) = -6x^2 + x + 1 = -6\left(x + \frac{1}{3}\right)\left(x - \frac{1}{2}\right);$$

3. $f(x) = 0$, $x = \left\{-\frac{1}{3}; \frac{1}{2}\right\}$; $a = -6 < 0$.



Отве́т: $f(x) > 0$, $x \in \left(-\frac{1}{3}; \frac{1}{2}\right)$, $f(x) < 0$,

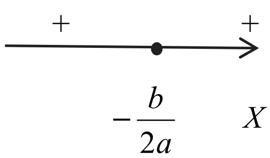
$$x \in \left(-\infty; -\frac{1}{3}\right) \cup \left(\frac{1}{2}; +\infty\right).$$

2. Если $\Delta = b^2 - 4ac = 0$, то $ax^2 + bx + c = a\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2$.

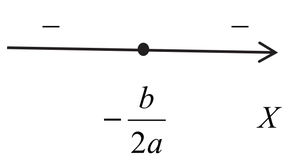
Тогда́ $a\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 \geq 0$ при любо́м $x \in R$, е́сли $a > 0$ и

$a\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 \leq 0$ при любо́м $x \in R$, е́сли $a < 0$.

$a > 0$, $\Delta = 0$



$a < 0$, $\Delta = 0$



Упражнение 3. Реши́те нера́венство $x^2 - 4x + 4 \geq 0$.

Реше́ние. $\Delta = 16 - 16 = 0 \Rightarrow x^2 - 4x + 4 \geq 0 \Leftrightarrow (x-2)^2 \geq 0 \Rightarrow x \in R$.

3. $\Delta = b^2 - 4ac < 0$.

$$ax^2 + bx + c = a\left(\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 - \frac{\Delta}{4a^2}\right).$$

Так как Δ < 0, то $-\frac{\Delta}{4a^2} > 0$ и $\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 - \frac{\Delta}{4a^2} > 0$ при любо́м $x \in R$. Сле́довательно, $ax^2 + bx + c > 0$ при любо́м $x \in R$, е́сли $a > 0$ и $ax^2 + bx + c < 0$ при любо́м $x \in R$, е́сли $a < 0$.

Теорема. Если $\Delta = b^2 - 4ac < 0$ и $a > 0$, то квадра́тный трехчле́н $ax^2 + bx + c > 0$ при любо́м $x \in R$.

Если $\Delta = b^2 - 4ac < 0$ и $a < 0$, то квадра́тный трехчле́н $ax^2 + bx + c < 0$ при любо́м $x \in R$.

Упражнение 4. Реши́те нера́венство $2x^2 - 3x + 5 > 0$.

Реше́ние. $\Delta = 9 - 4 \cdot 2 \cdot 5 = 9 - 40 = -31 < 0$, $a = 2 > 0 \Rightarrow$

$2x^2 - 3x + 5 > 0$ при любо́м $x \in R$.

Отве́т: $x \in R$.

Упражнение 5. Реши́те нера́венство $3x^2 - 3x + 4 < 0$.

Реше́ние. $\Delta = 9 - 4 \cdot 3 \cdot 4 = 9 - 48 = -32 < 0$, $a = 3 > 0 \Rightarrow$

$3x^2 - 3x + 4 > 0$ при любо́м $x \in R$.

Отве́т: Ø.

Задание 1. Реши́те нера́венство.

а) $x^2 + x - 6 \leq 0$; б) $x^2 \leq -x + 2$;

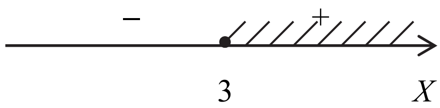
в) $3x^2 + 2x + 4 > 0$; г) $3x - 2x^2 - 7 < 0$.

Выраже́ние $(a+b)\left(a^2-ab+b^2\right)=a^3+b^3$ – су́мма ку́бов чи́сел *a* и *b*.
Выраже́ние $(a-b)\left(a^2+ab+b^2\right)=a^3-b^3$ – ра́зность ку́бов чи́сел *a* и *b*.

Упражнение 6. Реши́те нера́венство $x^3-27\geq 0$.

Решение. $x^3-27\geq 0 \Leftrightarrow (x-3)\left(x^2+3x+9\right)\geq 0$.

Квадра́тный трехчле́н $\left(x^2+3x+9\right)>0$ при любо́м $x\in R$, так как $\Delta = 9 - 4\cdot 9 = -27 < 0$ и $a = 1 > 0$.
$(x-3)\left(x^2+3x+9\right)\geq 0$.



Отве́т: $x\in [3;+\infty)$.

Задание 2. Реши́те нера́венство.

а) $\dfrac{x^2-5x+6}{x+4}\leq 0$; б) $\dfrac{4-x}{3x^2+3x-60}\geq 0$;

в) $x^3+8>0$; г) $\dfrac{x^2-2x+1}{x^3+1}\geq 0$.

Задание 3. Вы́полните действия.

а) $\dfrac{x+1}{8x^3-1}\cdot\dfrac{4x^2+2x+1}{1+2x}+\dfrac{1}{2-4x}$; б) $\dfrac{3-a}{27-a^3}\cdot\left(3+\dfrac{a^2}{3+a}\right)$.

Задание 4.

1. Счита́я, что $A=\left\{x \mid x^2-7x+12\geq 0\right\}$, $B=\left\{x \mid x^2-3x<0\right\}$, чему́ равно́ $A\cap B$?
2. Изве́стно, что мно́жество *M* состои́т из реше́ний уравне́ния $x^2+\frac{1}{2}px+1=0$, а мно́жество *N* из реше́ний уравне́ния

$2x^2 + x - 1 = 0$, а та́кже, что $M \cap N = \left\{\frac{1}{2}\right\}$. Из каки́х эле-ме́нтов состои́т мно́жество $M \cup N$?

Занятие 21.
ПОНЯТИЕ ФУНКЦИИ

еди́нственн‖ый, -ая, -ое 1. unique; 2. unite′; 3. u′nico; 4. einzig, alleinig ; 5. 解的唯一性; 6.
пра́вило, -а 1. rule; 2. régle; 3. regla; 4. Regel, f; 5. 法則,規則; 6.

Даны́ два числовы́х мно́жества $D(f)$ и $E(f)$, где $D(f) \subset R$, $E(f) \subset R$.

Фу́нкция $y = f(x)$ – э́то пра́вило "f", по кото́рому ка́ждому значе́нию $x \in D(f)$ соотве́тствует еди́нственное значе́ние $y \in E(f)$.

x – называ́ется незави́симой переме́нной и́ли аргуме́нтом;

y – называ́ется зави́симой переме́нной и́ли фу́нкцией.

зави́сим‖ый, ая, ое; -ые 1. dependent; 2. de′pendent; 3. dependiente; 4. Abhängig; 5. 相依的,相關, (相关); 6.
незави́сим‖ый, -ая, -ое; -ые 1. independent; 2. inde′pendent; 3. independiente 4. unabhängig; 5. 獨立的, 無關的, （独立的，无关的; 6.

Мно́жество $D(f)$ – о́бласть определе́ния фу́нкции.
Мно́жество $E(f)$ – о́бласть значе́ний фу́нкции.

о́бласть определе́ния функции 1. domain of the function; 2. domaine de de′finition de la fonction; 3. dominio de la funcio′n; 4. Definitionsbereich, m; 5. 定義域 ; 6.

область значе́ния фу́нкции 1. range of the function;
2. gamme de la function; 3. rango de la funcio̗n;

4. uswahlder der Funktion. 5. 值的范围的功能; 6.

чему́? (*дат. п.*) **ста́вить в соотве́тствие что?** (*вин. п.*)

Ка́ждому числу́ ста́вится в соотве́тствие то́чка на координа́тной прямо́й.

Ка́ждой упоря́доченной па́ре чи́сел (x; y) ста́вится в соотве́тствие то́чка на координа́тной пло́скости.

Фу́нкция за́дана, е́сли даны́:

1. Область определе́ния фу́нкции $D(f)$.

2. Пра́вило (спо́соб), по кото́рому ка́ждому значе́нию $x \in D(f)$ соотве́тствует то́лько одно́ значе́ние $y \in E(f)$.

Спо́собы (пра́вила) зада́ния фу́нкции

1. **Аналити́ческий спо́соб** (фо́рмула).

Наприме́р, $f(x) = 2x + 3$.

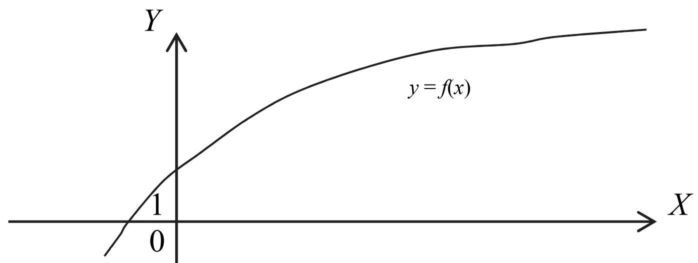
2. **Табли́чный спо́соб** (табли́ца).

Наприме́р,

x	-3	-2	-1	0
$f(x)$	-3	-1	1	3

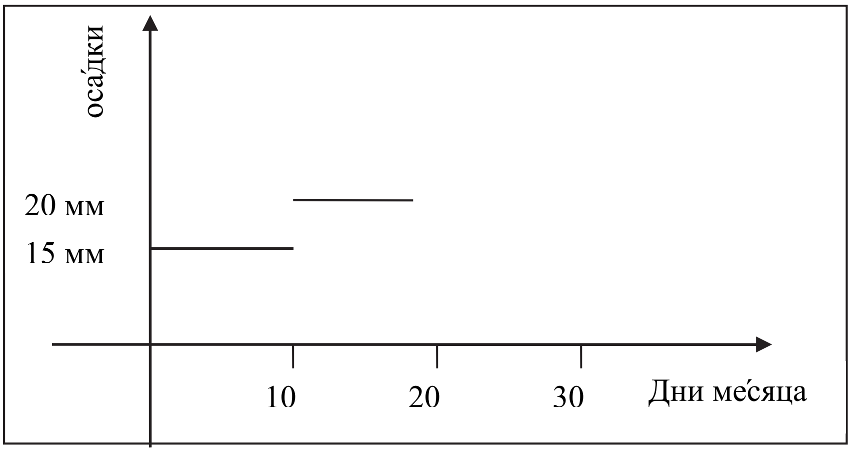
3. **Графи́ческий спо́соб** (гра́фик).

Наприме́р, фу́нкция $y = f(x)$ за́дана графи́чески.



4. **Верба́льный спо́соб** (слове́сный).

Наприме́р, гра́фик фу́нкции мо́жет отража́ть коли́чество вы́павших оса́дков в ме́сяц: в пе́рвой дека́де ме́сяца ка́ждый день их бы́ло по 15 мм, во второ́й дека́де коли́чество вы́павших оса́дков ка́ждый день равня́лось 20 мм, в тре́тьей дека́де оса́дков не было.



Определение 1. Гра́фик фу́нкции $y = f(x)$ – э́то мно́жество то́чек (x, y) пло́скости XOY, координа́ты кото́рых удовлетворя́ют усло́вию $y = f(x)$ (соответствующему способу задания функции). Коротко: $\Gamma(f(x)) = \{(x, y):\ y = f(x)\}$

что? (*вин. п.*) удовлетворя́ет чему́? (*дат .п.*)

удовлетворя́ть (чему?) 1. to satisfy something; 2. satisfaire; 3. satisfacer; 4. erfüllen; 5. 適合,滿足, (适合，满族); 6.

Когда́ фу́нкция за́дана аналити́чески (фо́рмулой), ну́жно найти́ её область определе́ния.

Упражнение 1. Дана́ фу́нкция $y = \dfrac{x-3}{x-2}$. Найди́те её о́бласть определе́ния.

Реше́ние. Выраже́ние $\frac{x-3}{x-2}$ име́ет смысл при всех *x*, кро́ме значе́ния $x = 2$. При $x = 2$ знамена́тель ра́вен 0. Зна́чит, о́бласть определе́ния фу́нкции все чи́сла *R*, где $x \neq 2$.

Отве́т: $D(f) = R \setminus \{2\}$ или $(-\infty; 2) \cup (2; \infty)$.

Определение 2. Область определе́ния фу́нкции $D(f)$ – это мно́жество всех значе́ний аргуме́нта, при кото́рых фу́нкция $f(x)$ име́ет смысл.

име́ть смысл 1. hase sense; 2. a le sens; 3. tener sentido; 4. gelten, es hat Sinn; 5. 有意義（有意义）; 6.

Пример. Найди́те о́бласть определе́ния фу́нкции $y = \sqrt{2-x}$.

Реше́ние. Выраже́ние $\sqrt{2-x}$ име́ет смысл, е́сли $2 - x \geq 0$, т.е. $x \leq 2$. Зна́чит, $D(f) = (-\infty; 2]$.

Отве́т: $D(f) = (-\infty; 2]$.

Задание 1. Найди́те о́бласть определе́ния фу́нкции.

а) $y = \frac{1-x}{2x-3}$; б) $y = \sqrt{x-3}$; в) $f(x) = 9 - x^2$;

г) $f(x) = x^2 - x - 2$; д) $y = 2 - \frac{3}{2x-1}$; е) $y = \frac{x+4}{x-2}$.

Задание 2. Найди́те область определе́ния фу́нкции.

а) $y = \frac{1}{x-4}$; б) $y = \frac{1}{x} + \sqrt{x+2}$;

в) $y = \sqrt{x} - \sqrt{3-x}$; г) $y = \frac{1}{x^2 - 5x + 6}$;

д) $y = \sqrt{x^2 - 6x + 8}$; е) $y = \frac{1}{\sqrt{x^2 - 6x + 5}}$;

ж) $y = x^2 - 13x + 36$; з) $y = \frac{1}{x} - \sqrt[3]{x}$;

и) $y = \dfrac{1}{x} - x^2$; к) $y = \dfrac{1}{\sqrt{x^2 - 3x + 2} - \sqrt{4 - x}}$;

л) $y = \sqrt{x^2(4 - x)}$; м) $y = \dfrac{x^2 + 5x + 6}{x - 1}$

Задание 3. Область определе́ния фу́нкции $y = f(x)$ – отре́зок [-1;2]. Найди́те о́бласть определе́ния фу́нкции.

а) $y = f(x) + 1$; б) $y = f(x + 1)$; в) $y = 2f(x)$;

г) $y = f(2x)$; д) $y = f(-x)$; е) $y = -f(x)$;

ж) $y = |f(x)|$; з) $y = f(|x|)$; и) $y = f(1 - x)$;

к) $y = f(1 - |x|)$; л) $y = f(\sqrt{x})$; м) $y = f(x^2)$.

Задание 4. Явля́ются ли ли́нии, предста́вленные на рис. 1 и 2 гра́фиками числовы́х фу́нкций?

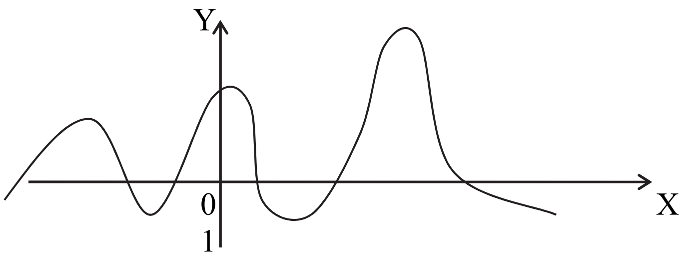


Рис. 1.

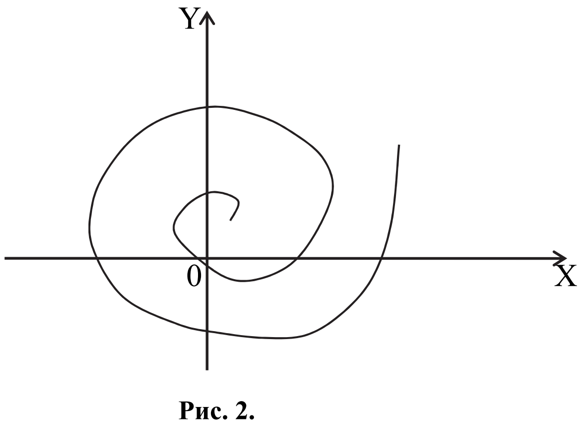


Рис. 2.

Нули́ фу́нкции

Нули́ фу́нкции – э́то значе́ния аргуме́нта, при кото́рых значе́ния фу́нкции равны́ нулю́.

Наприме́р, $x = 2$, $x = -3$ – нули́ фу́нкции
$f(x) = (x–2)(x+3)$, т.к. $f(2) = 0$ и $f(-3) = 0$.

Задание 5. Найди́те о́бласть определе́ния и нули́ фу́нкции.

а) $f(x) = \dfrac{3x-4}{x+1}$; б) $f(x) = \dfrac{x^2+3x-4}{x+2}$;

в) $f(x) = x^3 - 9x$; г) $f(x) = 4 - x^2$.

Занятие 22.

СВОЙСТВА ФУНКЦИИ

Интерва́лы постоя́нного зна́ка (интерва́лы знакопостоя́нства)

Интерва́лы постоя́нного зна́ка – э́то мно́жество значе́ний аргуме́нта, при кото́рых значе́ние фу́нкции сохраня́ет знак.

сохраня́ть (что?) 1. to maintain, to remain; 2. maintenir; 3. conservar, mantener; 4. erhalten,einhalten, wahren; 5. 保持, 保; 6.

Фу́нкция $y = f(x)$ за́дана графи́чески (рис.1).

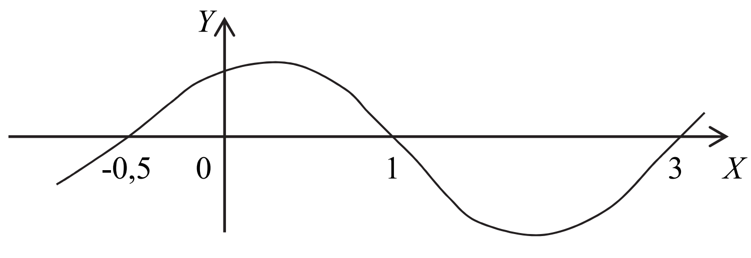


Рис. 1.

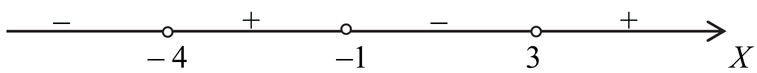
$f(x) = 0,\ \ x \in \{-0{,}5;\, 1;\, 3\};$
$f(x) > 0,\ \ x \in (-0{,}5; 1) \cup (3; +\infty);$
$f(x) < 0,\ \ x \in (-\infty; -0{,}5) \cup (1; 3).$

Упражнение 1. Найди́те интерва́лы знакопостоя́нства фу́нкции $f(x) = \dfrac{(x-3)(x+1)}{x+4}$.

Решение.

1. $D(f) = (-\infty; -4) \cup (-4; \infty)$.
2. Нули́ фу́нкции: {-1; 3}.
3. Интерва́лы знакопостоя́нства.

На координа́тной прямо́й отме́тим то́чки –4; –1; 3.



Координа́тная пряма́я разделена́ на четы́ре интерва́ла. Проверя́ем знак $f(x)$ в ка́ждом интерва́ле.

$f(4) = \dfrac{(4-3)(4+1)}{4+4} = \dfrac{5}{8} > 0, \qquad (\ 4 \in (3; \infty)\ );$

$f(0) = \dfrac{(0-3)(0+1)}{0+4} = -\dfrac{3}{4} < 0, \qquad (\ 0 \in (-1; 3)\ );$

$f(-3) = \dfrac{(-3-3)(-3+1)}{-3+4} = 12 > 0, \quad (\ -3 \in (-4; -1)\ );$

$f(-5) = \dfrac{(-5-3)(-5+1)}{-5+4} = -32 < 0, \ (\ -5 \in (-\infty; -4)\ ).$

Отве́т: $f(x) = 0,\ x \in \{-1; 3\};$
$f(x) < 0,\ x \in (-\infty; -4) \cup (-1; 3);$
$f(x) > 0,\ x \in (-4; -1) \cup (3; \infty).$

Задание 1. Найди́те интерва́лы знакопостоя́нства фу́нкции.

а) $f(x) = 3 - x^2$; б) $f(x) = x^2 - x - 12$;

в) $f(x)=\dfrac{2x^2+9x+7}{x^2-1}$; г) $f(x)=x^2+5x-3$;

д) $f(x)=\dfrac{3}{2-x}-1$; е) $f(x)=\dfrac{1}{x+4}-\dfrac{8}{x^2-16}-\dfrac{x-5}{x-4}$.

Возраста́ние и убыва́ние фу́нкции

Рассмо́трим гра́фик фу́нкции $y = f(x)$ на рис. 2.

В промежу́тке $(-\infty;a]$ $f(x_2)<f(x_1)$.

В промежу́тке $[a;\infty)$ $f(x_4)>f(x_3)$.

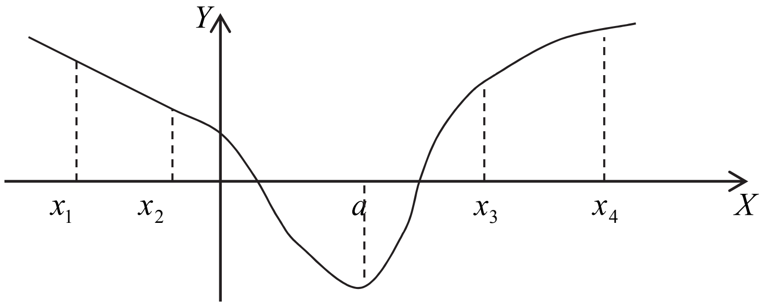


Рис. 2.

В промежу́тке $(-\infty;a]$ фу́нкция убыва́ет.

В промежу́тке $[a;\infty)$ фу́нкция возраста́ет.

Определение 1. Фу́нкция $y = f(x)$ называ́ется возраста́ющей в промежу́тке $(a;b)$, е́сли для любы́х значе́ний $x_1<x_2$ из $(a;b)$ сле́дует $f(x_1)<f(x_2)$.

Символи́чески **возраста́ющую фу́нкцию** в о́бласти определе́ния запи́сываем так:

$\forall x_1, x_2 \in D(f)$, $(x_1<x_2) \Rightarrow (f(x_1)<f(x_2))$

Определение 2. Фу́нкция $y = f(x)$ называ́ется убыва́ющей в промежу́тке $(a;b)$, е́сли для любы́х значе́ний $x_1<x_2$ из $(a;b)$ сле́дует $f(x_1)>f(x_2)$, или кра́тко: $\forall x_1, x_2 \in (a;b)$ $(x_1<x_2) \Rightarrow (f(x_1)>f(x_2))$.

В математике изучаются функции и с другими свойствами, например, две из них: невозрастающая и неубывающая.

Упражнение 2. Запишите в тетради определения этих функций, представленных в символической записи:

невозрастающая: $\forall x_1,\ x_2 \in D(f)\ \ (x_1 < x_2) \Rightarrow (f(x_1) \geq f(x_2))$;

неубывающая: $\forall x_1,\ x_2 \in D(f)\ \ (x_1 < x_2) \Rightarrow (f(x_1) \leq f(x_2))$.

Чётные и нечётные функции

Дана функция $y = x^2$, где для любого $x \in D(f)$ $-x$ также $\in D(f)$ и $f(-x) = f(x)$.

Такая функция называется чётной. Ее график симметричен относительно оси OY (рис. 3).

Дана функция $y = x^3$, где для любого $x \in D(f)$ $-x$ также $\in D(f)$ и $f(-x) = -f(x)$.

Такая функция называется нечётной. Ее график симметричен относительно начала координат (рис. 4).

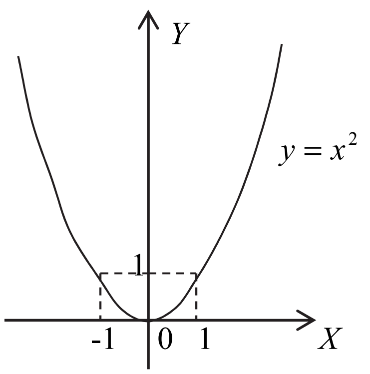


Рис. 3.
Чётная функция

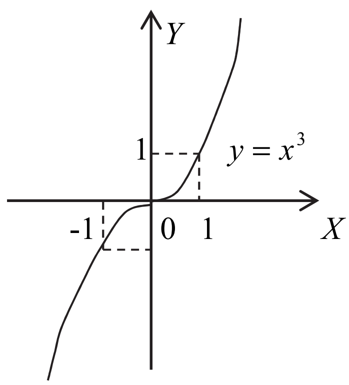


Рис. 4.
Нечётная функция

Определение 3. Фу́нкция называ́ется чётной, е́сли $\forall x \in D(f)$ ве́рно $-x \in D(f)$ и $f(-x) = f(x)$.

Теорема 1. Гра́фик чётной фу́нкции симметри́чен относи́тельно оси́ ордина́т.

Доказа́тельство. Пусть M(x, f(x)) – то́чка гра́фика фу́нкции $f(x)$ ($\Gamma(f(x))$. $y = f(x)$ чётная$\Rightarrow(x\in D(f)) \Rightarrow(-x\in D(f))$; $f(-x) = f(x) \Rightarrow$ M'$(-x, f(x))\in \Gamma(f)$ (рис. 5), а э́то справедли́во для $\forall x\in D(f)$.

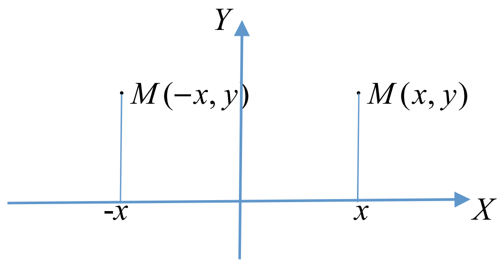
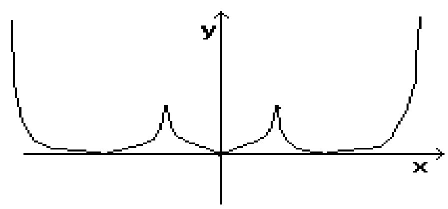


Рис. 5.

Пример графика чётной функции

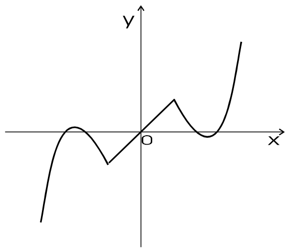


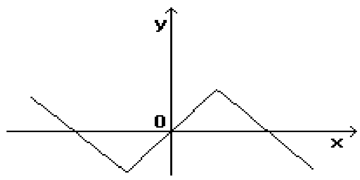
Определение 4. Фу́нкция называ́ется **нечётной**, е́сли $\forall x\in D(f) \wedge -x\in D(f)$ и справедли́во $f(-x)= -f(x)$.

Теорема 2. Гра́фик нечётной фу́нкции симметри́чен относи́тельно нача́ла координа́т.

Доказа́тельство аналоги́чно доказа́тельству теоре́мы 1. Предлага́ется приве́сти его́ в ка́честве *упражне́ния.*

Приме́ры гра́фиков нечётных фу́нкций.





Определе́ние 5. Фу́нкция, не явля́ющаяся ни чётной, ни нечётной, называ́ется **фу́нкцией о́бщего ви́да**.

Задание 2. Определи́те, явля́ется ли да́нная фу́нкция чётной, нечётной или общего вида.

а) $y = x^3 - x$; б) $y = \sqrt{x} - 1$; в) $y = x^5 - 2$;

г) $y = (x + 2)^4$; д) $y = \dfrac{x - x^3}{\sqrt{x}}$; е) $y = t(t-1)^5$;

ж) $y = x\sqrt{1 + x^2}$; з) $y = x^4 + 3$; и) $y = x \cdot 4 + 3$;

к) $y = x^6 + x^2 + 3$; л) $y = x\ \sqrt{1 + x^3}$; м) $y = x^3 + x + 1$;

н) $y = x^3 + x$; о) $y = \dfrac{1 + |x|}{x^2}$.

Функция $y = \sqrt{x}$

Свойства фу́нкции $y = \sqrt{x}$ **.**

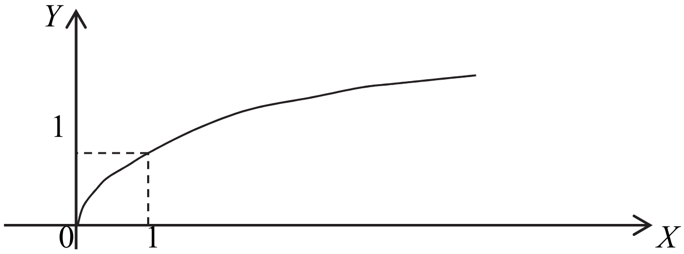
1. Область определе́ния: $D(f) = [0; \infty)$.
2. Фу́нкция ни чётная, ни нечётная.
3. $y \geq 0$.

Табли́ца значе́ний фу́нкции

X	0	1	2	3	4	5
Y	0	1	1,4	1,7	2	2,2

Значе́ния y даны́ с то́чностью до 0,1.

График фу́нкции



Фу́нкция возраста́ющая.

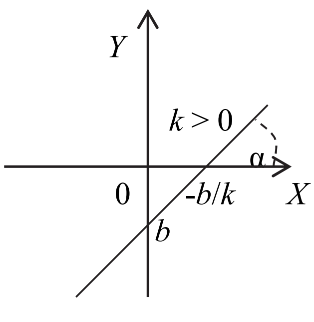
Занятие 23.
ЛИНЕЙНАЯ ФУНКЦИЯ

Определение. Лине́йной фу́нкцией называ́ется фу́нкция ви́да $y = kx + b$, где k и b – чи́сла.

1. Область определе́ния: $D(f) = R$.

2. Фу́нкция $y = kx + b$ ни чётная, ни нечётная, е́сли $k \neq 0$ и $b \neq 0$.

3. При $k > 0$ фу́нкция возраста́ющая. При $k < 0$ фу́нкция убыва́ющая.



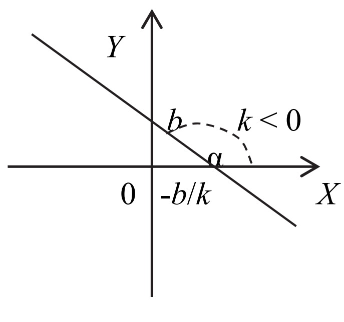


График фу́нкции $y = kx + b$ – пряма́я ли́ния.

Число́ k называ́ется угловы́м коэффицие́нтом прямо́й и $k = \mathrm{tg}\alpha$.

Задание 1. Постро́йте гра́фик фу́нкцию.

а) $y = \frac{1}{2}x + 3$; б) $y = \frac{1}{2} - x$;

в) $y = \begin{cases} x, \text{ если } x \geq 0, \\ -x \text{ если } x < 0 \end{cases}$; г) $y = |x|$.

Задание 2. Иссле́дуйте фу́нкции.

а) $f(x) = -2x + 2$; б) $y = -2{,}5x$;

в) $y = \frac{2}{3}x - 1$; г) $f(x) = \frac{1}{3}x - \frac{2}{3}$.

Пла́н иссле́дования фу́нкции

1. Область определе́ния функции.
2. Область значе́ний функции.
3. Чётная и́ли нечётная функция.
4. Нули́ фу́нкции.
5. Интерва́лы знакопостоя́нства фу́нкции.
6. Возраста́ющая и́ли убыва́ющая фу́нкция.
7. Гра́фик фу́нкции.

Упражнение 1. Иссле́дуем фу́нкцию $f(x) = -\frac{1}{3}x$.

1. Область определе́ния: $D(f) = R$.
2. Область значений функции: $E(f) = R$.
3. Фу́нкция нечётная, так как $f(-x) = -f(x)$.
4. $x = 0$ – нуль фу́нкции.
5. $f(x) > 0,\ x \in (-\infty; 0)$; $f(x) < 0,\ x \in (0; \infty)$.
6. $k = -\frac{1}{3} < 0$ – фу́нкция убыва́ющая.
7. Гра́фик фу́нкции – прямая́ ли́ния.

Упражнение 2. Прочитайте в формате диало́га.

Как называ́ется фу́нкция $y = 3x + 2$?
Фу́нкция $y = 3x + 2$ называ́ется лине́йной.
Фу́нкция $y = 3x + 2$ возраста́ющая и́ли убыва́ющая?
Фу́нкция $y = 3x + 2$ возраста́ющая, так как $k = 3 > 0$.

Как называ́ется число́ 3?
Число́ 3 называ́ется угловы́м коэффицие́нтом.

Как называ́ется гра́фик фу́нкции $y = 3x + 2$?
Гра́фик фу́нкции – это пряма́я ли́ния.

Задание 3. Постро́йте гра́фик фу́нкции.

а) $y = \dfrac{(x-3)(x+4)}{x-3}$; б) $y = \dfrac{4-x^2}{x-2}$;

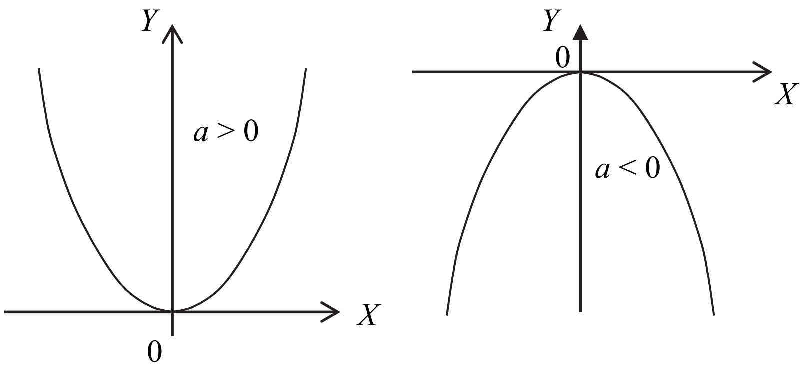
в) $y = x + 1$; г) $y = \dfrac{x^2-2x}{x}$.

Занятие 24.

ИССЛЕДОВАНИЕ ФУНКЦИИ $y = ax^2$, $a \neq 0$

1. Область определе́ния – все действи́тельные числа: $D(f) = R$.
2. При любо́м a, е́сли $x = 0$, то $y = 0$.
3. Фу́нкция чётная, так как $f(-x) = f(x)$. Сле́довательно, гра́фик фу́нкции симметри́чен относи́тельно оси́ ордина́т.
4. При $a > 0$, е́сли $x \neq 0$, то $y > 0$. При $a < 0$, е́сли $x \neq 0$, то $y < 0$.
5. При $a > 0$ фу́нкция убыва́ет в промежу́тке $(-\infty; 0]$ и возраста́ет в промежу́тке $[0; \infty)$. При $a < 0$ фу́нкция возраста́ет в промежу́тке $(-\infty; 0]$ и убыва́ет в промежу́тке $[0; \infty)$.
6. При $a > 0$ то́чка $x = 0$ – э́то то́чка ми́нимума: $y_{\min}(0) = 0$. При $a < 0$ точка $x = 0$ – э́то то́чка ма́ксимума: $y_{\max}(0) = 0$.

7. Гра́фик фу́нкции $y = ax^2$ – пара́бола.



То́чка О(0; 0) – верши́на пара́болы
Ве́тви пара́болы напра́влены вверх, е́сли $a > 0$.
Ве́тви пара́болы напра́влены вниз, е́сли $a < 0$.

что? (*им. п.*) **напра́влено куда?**

Упражнение 1. Чита́йте.

1. Дана́ фу́нкция $y = -0{,}5x^2$. Гра́фик фу́нкции – пара́бола.
Ве́тви пара́болы напра́влены вниз, так как a = -0,5 < 0.

2. Дана́ фу́нкция $y = -0{,}3x^2$. Гра́фик фу́нкции – пара́бола.
Ве́тви пара́болы напра́влены вниз, так как a = -0,3 < 0.

3. Дана́ фу́нкция $y = -3x^2$.
– Как называ́ется гра́фик фу́нкции?
Гра́фик фу́нкции называ́ется пара́болой.

– Как напра́влены ве́тви пара́болы?
Ве́тви пара́болы напра́влены вниз, так как a = -3 < 0.

4. Дана́ фу́нкция $y = 2{,}5x^2$. Гра́фик фу́нкции – пара́бола.
Ве́тви пара́болы напра́влены вверх, так как a = 2,5 > 0.

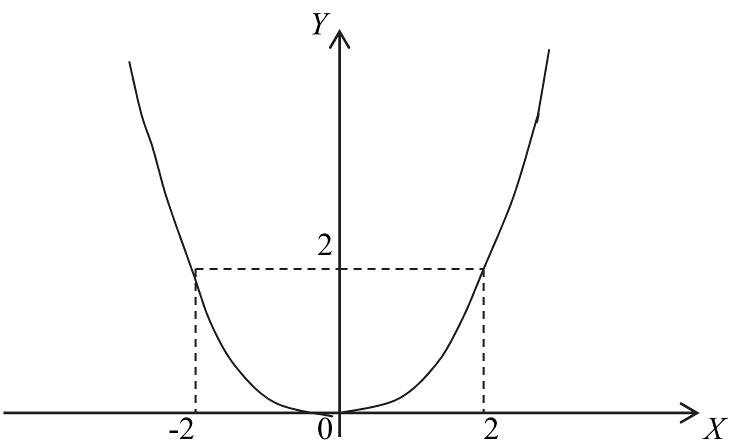
Верши́на пара́болы – то́чка (0; 0). Фу́нкция чётная. *OY* – ось симме́трии.

Упражнение 2. Прочитайте.

Дана́ фу́нкция $y = \frac{1}{2}x^2$.

1. Область определе́ния $D(f) = R$.
2. Гра́фик фу́нкции – пара́бола.
3. Ве́тви пара́болы напра́влены вверх, так как $a = \frac{1}{2} > 0$.
4. Верши́на пара́болы – то́чка (0; 0).
5. Фу́нкция чётная. Сле́довательно, *OY* – ось симме́трии.
6. Постро́им гра́фик фу́нкции.

X	-2	0	2
Y	2	0	2



План иссле́дования фу́нкции $y = ax^2, \ a \neq 0$

1. Область определе́ния.
2. Как напра́влены ве́тви пара́болы?
3. Координа́ты верши́ны.

4. Ось симме́трии.
5. Интерва́лы постоя́нного зна́ка.
6. Интерва́лы, в кото́рых фу́нкция возраста́ет и убыва́ет.
7. Экстре́мумы фу́нкции.
8. Гра́фик.

Задание 1. Иссле́дуйте фу́нкцию и постройте её гра́фик.

а) $y = -\frac{1}{2}x^2$; б) $y = \frac{2}{3}x^2$;

в) $y = -0{,}3x^2$; г) $y = 1{,}5x^2$.

Задание 2. Расскажи́те о сво́йствах фу́нкций, гра́фики которых изображены́ на рис. 1-3.

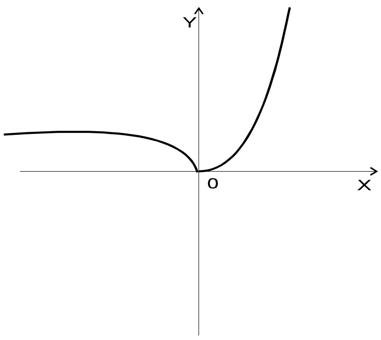


Рис. 1.

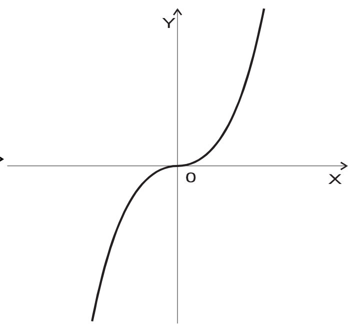


Рис. 2.

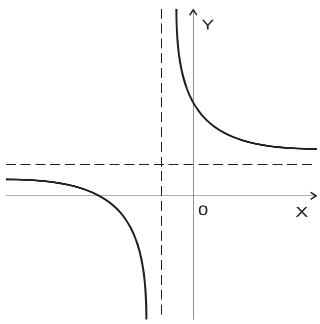


Рис. 3.

Занятие 25.

ИССЛЕДОВАНИЕ ФУНКЦИИ $y = ax^2 + bx + c,\ a \neq 0$

1. Область определе́ния $D(f) = R$.
2. Квадрати́чную фу́нкцию запи́шем в канони́ческом ви́де
$f(x) = ax^2 + bx + c = a\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 - \frac{b^2 - 4ac}{4a}$.

Если $D = b^2 - 4ac > 0$, то квадра́тный трехчле́н запи́шем в ви́де произведе́ния линейных множи́телей:
$f(x) = ax^2 + bx + c = a(x - x_1)(x - x_2)$.

3. Гра́фик фу́нкции – пара́бола.
Если $a > 0$, то ве́тви пара́болы напра́влены вверх.
Если $a < 0$, то ве́тви пара́болы напра́влены вниз.
4. Координа́ты верши́ны $\left(-\frac{b}{2a}; -\frac{b^2 - 4ac}{4a}\right)$.
5. $x = -\frac{b}{2a}$ – ось симме́трии пара́болы.
6. Нули́ фу́нкции ($ax^2 + bx + c = 0$).
7. Интерва́лы знакопостоя́нства ($f(x) > 0$ и́ли $f(x) < 0$).
8. Интерва́лы моното́нности.
9. То́чка ма́ксимума (ми́нимума): $y_{\max}$ ($y_{\min}$).
10. Для построе́ния гра́фика на́до взять ещё хотя́ бы одну́ то́чку, наприме́р: (0; c).

Упражнение 1. Иссле́дуйте фу́нкцию $f(x) = \frac{1}{2}x^2 - 5x + 15\frac{1}{2}$ и постро́йте ее гра́фик.

Иссле́дование.

1. Область определе́ния: $D(f) = R$.
2. Канони́ческий вид: $f(x) = \frac{1}{2}x^2 - 5x + 15\frac{1}{2} = \frac{1}{2}(x - 5)^2 + 3$.

3. Гра́фик фу́нкции – пара́бола. Ве́тви напра́влены вверх, так как $a = \frac{1}{2} > 0$.

4. Координа́ты верши́ны (5; 3).

5. Ось симме́трии: $x = 5$.

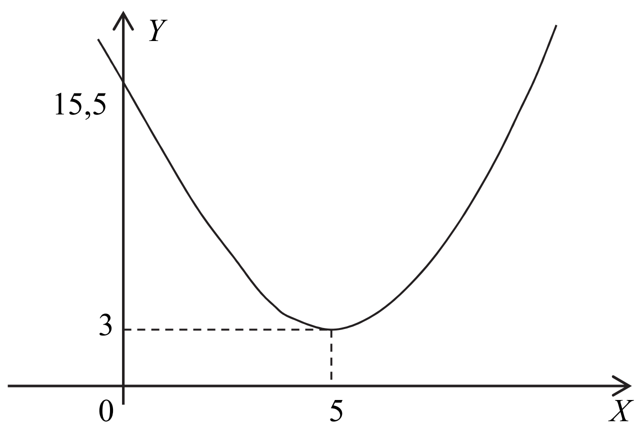
6. Нуле́й нет. При любо́м $x \in R$ $y > 0$.

7. Фу́нкция убыва́ет в интерва́ле $]-\infty; 5]$.

   Фу́нкция возраста́ет в интерва́ле $[5; \infty[$.

8. $x = 5$ – то́чка ми́нимума. $y_{\min}(5) = 3$.

Для построе́ния гра́фика найдём ещё одну́ то́чку, наприме́р, е́сли $x = 0$, то $y = 15\frac{1}{2}$.



Задание 1. Иссле́дуйте фу́нкцию.

а) $y = \frac{1}{3}x^2 - 2x + 1$; б) $y = -0,5x^2 + 2x + 7$;

в) $y = x^2 - 4x$; г) $y = x^2 - 3$.

Задание 2. Иссле́дуйте фу́нкцию и постро́йте её гра́фик.

а) $y = -x(x + 5)$; б) $y = (x - 2)(x + 4)$;

в) $y = (x - 1)(x + 1)$; г) $y = 2x^2 + 0,3$.

Задание 3. Найди́те координа́ты то́чек пересече́ния гра́фиков.

а) $y = 3x^2$ и $y = 4x$; б) $y = 5x^2 - 23$ и $y = 3x^2 + 1$;

в) $y = 2x^2$ и $y = -5x + 3$; г) $y = -3x^2 - 10x + 2$ и $y = 4x - 3$.

Задание 4. При каки́х значе́ниях аргуме́нта фу́нкция $y = 4x^2 + x - 3$ принима́ет положи́тельные значе́ния и при каки́х принима́ет отрица́тельные значе́ния?

что? *(им. п.)* **принима́ет что?** *(вин. п.)*

Фу́нкция $y = x^2 + 4$ принима́ет то́лько положи́тельные значе́ния, т.е. при $\forall x \in R$ $y > 0$.

Фу́нкция $y = 2x - 3$ принима́ет отрица́тельные значе́ния при $x < 1{,}5$ ($y > 0$ при $x > 1{,}5$).

принима́ть значе́ния 1. to take the value;
2. prendre la valeur; 3. tomar el valor de;
4. annehmen den Wer; 5. 接受值,接納, 取; 6.

Задание 5. Изобрази́те гра́фик фу́нкции.

а) $f(x) = 2 - x^2$; б) $f(x) = -x^2 + 11x - 2$;

в) $f(x) = -0{,}04x^2 + 1$; г) $y = -x^2 + 2x$.

Задание 6. Сократи́те дробь.

а) $\dfrac{4 - x}{3x^2 + 3x - 60}$; б) $\dfrac{4x^2 + 30x - 16}{2x - 1}$.

Задание 7. Реши́те нера́венство.

а) $-9x^2 + 12x - 4 > 0$; б) $-x^2 + 5 > 0$; в) $x^2 > 16$;

г) $\dfrac{1}{2}x^2 < 12$; д) $4x < x^2$; е) $-0{,}3x > 0{,}6x^2$.

Задание 8. Найди́те о́бласть определе́ния фу́нкции.

а) $y = 2x - x^2$; б) $y = \dfrac{3}{x^2 + 4x + 4}$;

в) $y = \dfrac{x^2 - x - 42}{x - 11}$; г) $y = \dfrac{x - 3}{x^2 + x + 30}$.

Задание 9. Упрости́те выраже́ние.

а) $\dfrac{x+4}{x-1} - \dfrac{37x - 12}{4x^2 - 3x - 1}$; б) $\dfrac{4x-1}{2x-1} - \dfrac{4 - 13x}{2x^2 - 7x + 3}$;

в) $\dfrac{x-1}{x+2} - \dfrac{1-x}{x^2 + 3x + 2}$; г) $\dfrac{2x}{x-3} + \dfrac{18}{x+3} \cdot \left(\dfrac{4x}{9 - x^2} - \dfrac{x-3}{9+3x} \right)$.

Задание 10. Изве́стна о́бласть определе́ния фу́нкции $y = f(x)$, причём $-a \le x \le a$, $(a > 0)$ найди́те о́бласть определе́ния нижесле́дующих фу́нкций.

1) $y = f(x^2)$; 2) $y = f(2x + a)$.

Занятие 26.

ДЕЛИМОСТЬ МНОГОЧЛЕНА

Даны́ два многочле́на $P_n(x) = a_0 x^n + a_1 x^{n-1} + \ldots + a_n$, $a_0, a_1, \cdots, a_n$ – числа, $a_0 \ne 0$ – многочле́н сте́пени n, $Q_m(x) = b_0 x^m + b_1 x^{m-1} + \ldots + b_m$, $b_0, b_1, \cdots, b_m$ – числа, $b_0 \ne 0$ – многочле́н сте́пени m, где $n \in N$ и $m \in N$.

Если $n \ge m$ и существу́ет тако́й многочле́н $D_{n-m}(x)$, что $P_n(x) = Q_m(x) \cdot D_{n-m}(x)$, то многочле́н $P_n(x)$ де́лится на многочле́н $Q_m(x)$: $\dfrac{P_n(x)}{Q_m(x)} = D_{n-m}(x)$,.

Наприме́р. $P_3(x) = x^3 - 3x^2 + 4$ де́лится на многочле́н $Q_2(x) = x^2 - x - 2$, так как

$$\frac{P_3(x)}{Q_2(x)} = \frac{x^3 - 3x^2 + 4}{x^2 - x - 2} = \frac{\left(x^2 - x - 2\right)(x-2)}{x^2 - x - 2} = x - 2 .$$

Если многочле́н $P_n(x)$ не де́лится на многочле́н $Q_m(x)$, то $P_n(x) = Q_m(x) \cdot D_{n-m}(x) + R(x)$, где многочле́н $R(x)$ име́ет сте́пень ме́ньшую, чем m, и называ́ется оста́тком.

(дели́мое) = (дели́тель) · (ча́стное) + (оста́ток)

Упражнение 1. Вы́полните деле́ние многочленов.
$P_4(x) = x^4 - 3x^3 + 3x^2 + 3x - 4$ на $Q_2(x) = x^2 - 3x + 4$.

Реше́ние.

$$\begin{array}{r|l}
-\;\; x^4 - 3x^3 + 3x^2 + 3x - 4 & x^2 - 3x + 4 \\ \cline{2-2}
x^4 - 3x^3 + 4x^2 \phantom{{}+3x-4} & x^2 - 1 \\ \cline{1-1}
-\;\; -x^2 + 3x - 4 & \\
-x^2 + 3x - 4 & \\ \cline{1-1}
0 \phantom{{}-4} &
\end{array}$$

1. Де́лим ста́рший член $P_4(x)$ на ста́рший член $Q_2(x)$. Нахо́дим ста́рший член ча́стного $x^4 : x^2 = x^2$.
2. Умножа́ем ста́рший член ча́стного на дели́тель $x^2 \cdot \left(x^2 - 3x + 4\right) = x^4 - 3x^3 + 4x^2$ и вычита́ем из дели́мого и т.д.

$x^4 - 3x^3 + 3x^2 + 3x - 4 = \left(x^2 - 3x + 4\right)\left(x^2 - 1\right)$.

Упражнение 2. Вы́полните деле́ние многочле́нов.
$P_3(x) = 2x^3 - 13x^2 + 23x - 5$ на $Q_2(x) = 2x^2 - 5x + 2$.

Реше́ние.

дели́мое *дели́тель*

$$
\begin{array}{rl|l}
- & 2x^3 - 13x^2 + 23x - 5 & 2x^2 - 5x + 2 \\
\cline{3-3}
 & \underline{2x^3 - 5x^2 \;\; + 2x} & x - 4 \\
 & - \;\; -8x^2 \;\; + 21x - 5 & \\
 & \underline{-8x^2 \;\; + 20x - 8} & \\
 & x + 3 &
\end{array}
$$

ча́стное

оста́ток

оста́ток, -ки 1. remainder; 2. reste; 3. resto; 4. Rest;
5. 其余的； 6.

$$\frac{2x^3 - 13x^2 + 23x - 5}{2x^2 - 3x + 2} = x - 4 + \frac{x+3}{2x^2 - 5x + 2} \text{ и́ли}$$

$$2x^3 - 13x^2 + 23x - 5 = (x-4) \cdot \left(2x^2 - 5x + 2\right) + x + 3 .$$

Задание 1. Вы́полните деле́ние $P(x)$ на $Q(x)$.

а) $P(x) = x^3 - 6x^2 + 11x - 6$, $Q(x) = x^2 - 5x + 6$;

б) $P(x) = -x^5 + 1$, $Q(x) = -x + 1$;

в) $P(x) = x^3 - 3x^2 + 4$, $Q(x) = x + 1$.

Деле́ние многочле́на на двучле́н *x – a*

В о́бщем слу́чае $\dfrac{P(x)}{x-a} = Q(x) + \dfrac{R}{x-a} \Rightarrow$
$P(x) = (x - a) \cdot Q(x) + R$, где R – это оста́ток. При $x = a$
$P(a) = (a - a) \cdot Q(a) + R \Rightarrow P(a) = R$. Тем са́мым мы доказа́ли теоре́му.

Теорема Безу́. Оста́ток от деле́ния многочле́на $P(x)$ на двучле́н $x - a$ ра́вен значе́нию многочле́на при $x = a$.

Упражнение 3. Найди́те оста́ток от деле́ния многочле́на $P(x) = 2x^3 - x + 3$ на двучле́н $x + 1$.

Реше́ние. $x + 1 = x - (-1)$

$R = P(-1) = 2 \cdot (-1)^3 - (-1) + 3 = -2 + 1 + 3 = 2$.

Упражнение 4. Найди́те оста́ток от деле́ния многочле́на $P(x) = x^3 + 5x^2 + 7x + 2$ на двучле́н $(x + 2)$.

Реше́ние. $R = P(-2) = -8 + 20 - 14 + 2 = 0$.

Если $P(x)$ де́лится на $x - a$ $(r = 0)$, то a – ко́рень многочле́на.

Задание 2. Найди́те оста́ток от деле́ния.

а) $2x^3 - x + 3$ на $x + 1$;
б) $x^3 + 5x^2 + 7x + 2$ на $x + 2$;
в) $x^4 + x^3 + x^2 + 3x + 2$ на $x + 1$;
г) $x^3 - 8x^2 + 13x - 6$ на $x - 6$.

Схе́ма Го́рнера вычисле́ния коэффицие́нтов ча́стного и оста́тка при деле́нии многочле́на на двучле́н

Схе́ма Го́рнера – э́то алгори́тм вычисле́ния коэффицие́нтов ча́стного b_i и оста́тка R при деле́нии многочле́на $P(x) = a_0x^n + a_1x^{n-1} + \ldots + a_{n-1}x + a_n$ на двучлен $x - a$:

$$a_0x^n + a_1x^{n-1} + \ldots + a_{n-1}x + a_n =$$
$$= (x-a)\left(b_0x^{n-1} + b_1x^{n-2} + \ldots + b_{n-2}x + b_{n-1}\right) + R\,.$$

a_0	a_1	$\ldots$	a_i	$\ldots$
$b_0 = a_0$	$b_1 = ab_0 + a$	$\ldots$	$b_i = ab_{i-1} + a_i$	$\ldots$

$\ldots$	a_{n-1}	a_n
$\ldots$	$b_{n-1} = ab_{n-2} + a_{n-1}$	$R = ab_{n-1} + a_n$

Пример. Найди́те ча́стное и оста́ток от деле́ния многочле́на $x^4 + x^3 + x^2 + 3x + 2$ на двучле́н $x - 1$.

Решение. Соста́вим табли́цу:

	1	1	1	3	2
1	1	2	3	6	8

Отве́т: ча́стное: $x^3 + 2x^2 + 3x + 6$; оста́ток: 8.

Задание 3. Найди́те ча́стное и оста́ток от деле́ния многочле́на $P(x)$ на двучле́н $Q(x)$.

а) $P(x) = x^4 + x^3 + x^2 + 3x + 2$; $Q(x) = x - 2$.

б) $P(x) = x^6 - x^5 - x^4 + 3x^3 - 2x^2 + 5x - 4$; $Q(x) = x + 2$.

в) $P(x) = x^3 + 6x^2 - 2x + 5$; $Q(x) = x - 3$.

г) $P(x) = x^4 - 2x^3 + 3x^2 + x - 3$; $Q(x) = x - 2$.

д) $P(x) = x^5 + 2x^4 - 3x^3 + x^2 - 4x + 1$; $Q(x) = x + 4$.

Занятие 27.

НАХОЖДЕНИЕ РАЦИОНАЛЬНЫХ КОРНЕЙ МНОГОЧЛЕНА

Дан приведённый многочле́н

$$P(x) = x^n + a_1 x^{n-1} + \ldots + a_{n-1} x + a_n,$$

где $a_1, a_2, \ldots, a_n$ – це́лые чи́сла и $a_n \neq 0$.

Пусть $x = a$ – ко́рень многочле́на $P(x)$. Тогда́ значе́ние $P(a) = 0$ и́ли $a^n + a_1 a^{n-1} + \ldots + a_{n-1} a + a_n = 0$.

Отсю́да $a_n = -\left(a^n + a_1 a^{n-1} + \ldots + a_{n-1} a\right)$ и́ли $a_n = -a\left(a^{n-1} + a_1 a^{n-2} + \ldots + a_{n-1}\right)$.

Пра́вая часть ра́венства де́лится на a. Сле́довательно, и ле́вая часть a_n де́лится на a.

Утверждение. Если приведённый многочле́н

$P(x) = x^n + a_1 x^{n-1} + \ldots + a_{n-1}x + a_n$,

где $a_1, a_2, \ldots, a_n$ – це́лые чи́сла и $a_n \neq 0$, име́ет це́лые ко́рни, то их ну́жно иска́ть среди́ дели́телей свобо́дного чле́на.

что? (*вин .п.*) **иска́ть среди́ чего́?** (*род. п.*)

Ко́рни многочле́на иска́ть сре́ди дели́телей свобо́дного чле́на.

иска́ть среди́ 1. to look for something among;
2. choisir entre; 3. buscar entre; 4. suchen;
5. 找,尋找, (寻找); 6.

Упражнение 1. Найди́те ко́рни многочле́на

$$P(x) = x^3 - 5x^2 + 8x - 4.$$

Реше́ние. -4 – свобо́дный член.

Дели́тели свобо́дного чле́на: $\pm 1; \pm 2; \pm 4$.

$P(1) = 1 - 5 + 8 - 4 = 0 \Rightarrow x = 1$ – ко́рень многочле́на.

$P(x)$ де́лится на $x - 1$ (по теоре́ме Безу́):

$$\begin{array}{rl|l}
- & x^3 - 5x^2 + 8x - 4 & x - 1 \\ \cline{3-3}
 & \underline{x^3 - x^2} & x^2 - 4x + 4 \\
 & \quad -4x^2 + 8x - 4 & \\
- & \quad \underline{-4x^2 + 4x} & \\
 & \qquad 4x - 4 & \\
- & \qquad \underline{4x - 4} & \\
 & \qquad\quad 0 &
\end{array}$$

$$x^3 - 5x^2 + 8x - 4 = (x-1)\left(x^2 - 4x + 4\right) = (x-1)(x-2)^2.$$

$P(x) = x^3 - 5x^2 + 8x - 4$ име́ет три ко́рня: $x_1 = 1$ и кра́тный ко́рень $x_2 = x_3 = 2$.

Ответ: $P(x)=0,\ \ x\in\{1;\,2\}$.

кра́тность, –и 1. multiplicity; 2. multiplicité; 3. multiplicidad; 4. multiplizitit; 5. 多样性; 6.

Задание 1. Найди́те ко́рни многочле́на.

а) $P(x)=x^3-8x^2+13x-6$; б) $Q(x)=x^3+4x^2+7x+6$;

в) $F(x)=x^3+x+2$; г) $P(x)=x^4+4x^3-3x^2-14x+12$.

Задание 2. Разложи́те многочле́н на мно́жители.

а) $P(x)=x^4-1$; б) $Q(x)=x^4-x^3+x^2-3x-6$;

в) $f(x)=x^2-2x-8$; г) $f(x)=x^3-x^2-10x-8$.

Задание 3. Найди́те интерва́лы знакопостоя́нства фу́нкций.

а) $f(x)=(x-2)(x+3)(x-1)$; б) $F(x)=(x-3)^3(x+1)$;

в) $f(x)=x^3-x^2+4x-4$; г) $f(x)=x^3-x^2-16x-20$.

Пра́вильные и непра́вильные алгебраи́ческие дро́би

$\frac{5}{7}$ – пра́вильная дробь, $\frac{8}{3}$ – непра́вильная дробь, $\frac{8}{3}=2+\frac{2}{3}$.

Если $n\ge m$, то $\frac{P_n(x)}{Q_m(x)}$ – непра́вильная алгебраи́ческая дробь.

Определение. Рациона́льная дробь называ́ется пра́вильной, е́сли в ней сте́пень числи́теля ме́ньше сте́пени знамена́теля.

Наприме́р, $\frac{2x^3-3x^2+1}{3x^4-2x+1}$ – пра́вильная рациона́льная дробь. $\frac{x^3+2x^2-7}{3x^2-x+1}$ – непра́вильная рациона́льная дробь.

Непра́вильную рациона́льную дробь мо́жно записа́ть в ви́де су́ммы многочле́на и пра́вильной дро́би.

$\dfrac{P_n(x)}{Q_m(x)} = D(x) + \dfrac{R(x)}{Q_m(x)}$, где многочле́н $R(x)$ име́ет сте́пень не бо́лее, чем $m-1$.

Упражнение 2. Запиши́те непра́вильную рациона́льную дробь $\dfrac{x^3 - x^2 - 5}{x^2 + x + 1}$ в ви́де су́ммы многочле́на и пра́вильной рациона́льной дро́би.

Реше́ние. Разде́лим числи́тель на знамена́тель.

$$
\begin{array}{rl|l}
- & x^3 - x^2 + 0x - 5 & x^2 + x + 1 \\ \cline{3-3}
 & \underline{x^3 + x^2 + x} & x - 2 \\
 & \quad - \; -2x^2 - x - 5 & \\
 & \quad \underline{\;\;\; -2x^2 - 2x - 2} & \\
 & \qquad\qquad x - 3 & \leftarrow \textit{оста́ток}
\end{array}
$$

Отве́т: $\dfrac{x^3 - x^2 - 5}{x^2 + x + 1} = x - 2 + \dfrac{x - 3}{x^2 + x + 1}$

Задание 4. Запиши́те непра́вильную дробь в ви́де су́ммы многочле́на и пра́вильной дро́би.

а) $\dfrac{x^3 - 1}{x + 1}$; б) $\dfrac{2x^2 - 3x + 1}{x^2 - x - 2}$;

в) $\dfrac{4x - 3}{x + 1}$; г) $\dfrac{5x^3 - 6x + 1}{x^2 + 1}$.

Занятие 28.

РАЗЛОЖЕНИЕ ПРАВИЛЬНОЙ РАЦИОНАЛЬНОЙ ДРОБИ НА СУММУ ПРОСТЕЙШИХ ДРОБЕЙ

Пра́вильные рациона́льные дро́би называ́ются просте́йшими дробя́ми, е́сли они́ име́ют вид:

I. $\dfrac{A}{x-a}$;

II. $\dfrac{A}{(x-a)^k}$, $k \geq 2$ (k – це́лое положи́тельное число́);

III. $\dfrac{Ax+B}{x^2+px+q}$ (трехчле́н x^2+px+q не име́ет действи́тельных корне́й, т.е. $p^2-4q<0$);

IV. $\dfrac{Ax+B}{\left(x^2+px+q\right)^k}$ $(k \in N, k \geq 2,\ p^2-4q<0)$, где A и B – действи́тельные чи́сла.

Теоре́ма. Пра́вильную рациона́льную дробь $\dfrac{P(x)}{Q(x)}$, где $Q(x)=(x-a)^k(x-b)^m\left(x^2+px+q\right)^n$, мо́жно записа́ть в ви́де су́ммы просте́йших дробе́й:

$$\frac{P(x)}{Q(x)}=\frac{A_1}{x-a}+\frac{A_2}{(x-a)^2}+\ldots+\frac{A_k}{(x-a)^k}+\frac{B_1}{x-b}+\frac{B_2}{(x-b)^2}+\ldots+\frac{B_m}{(x-b)^m}+\frac{M_1x+C_1}{x^2+px+q}+\frac{M_2x+C_2}{\left(x^2+px+q\right)^2}+\ldots+\frac{M_nx+C_n}{\left(x^2+px+q\right)^n}.$$

Наприме́р,

1) $\dfrac{x-3}{x^3-x}=\dfrac{x-3}{x(x-1)(x+1)}=\dfrac{A}{x}+\dfrac{B}{x-1}+\dfrac{C}{x+1}$.

2) $$\frac{x^2+x+13}{(x-1)(x^2+4)}=\frac{A}{x-1}+\frac{Bx+C}{x^2+4}.$$

Не име́ет значе́ния, каки́ми бу́квами обознача́ть конста́нты.

Упражнение 1. Разложи́те дро́би на су́мму просте́йших дробе́й.

1) $$\frac{x-3}{x(x-1)(x+1)}=\frac{A}{x}+\frac{B}{x-1}+\frac{C}{x+1}.$$

Что́бы разложи́ть пра́вильную алгебраи́ческую дробь на су́мму простейших дробе́й, ну́жно найти́ неизве́стные коэффицие́нты A, B и C. В пра́вой ча́сти ра́венства приво́дим дро́би к о́бщему знамена́телю:

$$\frac{x-3}{x(x-1)(x+1)}=\frac{A(x-1)(x+1)+Bx(x+1)+Cx(x-1)}{x(x-1)(x+1)}.$$

Дро́би равны́, равны́ их знамена́тели. Сле́довательно, равны́ их числи́тели $x-3=A(x-1)(x+1)+Bx(x+1)+Cx(x-1)$.

Полу́ченное ра́венство – э́то то́ждество.
Пусть $x = 1$. Тогда́: $-2 = 2\cdot B \Rightarrow B = -1$.
Пусть $x = -1$. Тогда́ $-4 = -C\cdot(-2) \Rightarrow -4 = 2C \Rightarrow C = -2$.
Пусть $x = 0$. Тогда́ $-3 = -A \Rightarrow A = 3$.

Отве́т: $$\frac{x-3}{x(x-1)(x+1)}=\frac{3}{x}+\frac{-1}{x-1}+\frac{-2}{x+1}=\frac{3}{x}-\frac{1}{x-1}-\frac{2}{x+1}.$$

2) $$\frac{x^2+x+13}{(x-1)(x^2+4)}=\frac{A}{x-1}+\frac{Bx+C}{x^2+4}.$$

$$\frac{x^2+x+13}{(x-1)(x^2+4)}=\frac{A\left(x^2+4\right)+(Bx+C)(x-1)}{x-1}$$

$$\Rightarrow x^2+x+13=A(x^2+4)+(Bx+C)(x-1).$$

Пусть $x = 1$. Тогда́ $15 = 5A \Rightarrow A = 3$.
Пусть $x = 0$. Тогда́ $13 = A\cdot 4 + C$ и́ли $13 = 12 - C \Rightarrow C = -1$.

Пусть $x = -1$. Тогда́ $13 = 3\cdot 5 + (-B - 1)\cdot(-2) \Rightarrow 13 = 15 + 2B + 2$
$\Rightarrow 2B = -4 \Rightarrow$
$B = -2$.

Ответ: $\dfrac{x^2 + x + 13}{(x-1)(x^2+4)} = \dfrac{3}{x-1} + \dfrac{-2x-1}{x^2+4} = \dfrac{3}{x-1} - \dfrac{2x+1}{x^2+4}$.

Задание 1. Разложи́те пра́вильную дробь на су́мму просте́йших дробе́й.

а) $\dfrac{5x+4}{x^2+x-2}$; б) $\dfrac{3x-1}{x^2-x}$; в) $\dfrac{x-5}{(x+1)(x-2)^2}$; г) $\dfrac{5x^2-2x+3}{x^3-1}$.

Задание 2. Разложи́те пра́вильную дробь на су́мму просте́йших дробе́й.

а) $\dfrac{12}{x^4+x^3-x-1}$; б) $\dfrac{3x^2+5x+1}{x^3+4x^2+7x+6}$.

Упражнение 2. Запиши́те дробь $\dfrac{x^4-3}{x^2+2x+1}$ в ви́де су́ммы просте́йших дробе́й.

Реше́ние. $\dfrac{x^4-3}{x^2+2x+1}$ – непра́вильная дробь. Запи́шем непра́вильную дробь в ви́де су́ммы многочле́на и пра́вильной дро́би (разде́лим числи́тель на знамена́тель).

$$\frac{x^4-3}{x^2+2x+1} = x^2 - 2x + 3 - \frac{4x+6}{x^2+2x+1}.$$

Пра́вильную дробь $\dfrac{4x+6}{x^2+2x+1}$ запи́шем в ви́де су́ммы просте́йших дробе́й. $\dfrac{4x+6}{x^2+2x+1} = \dfrac{4x+6}{(x+1)^2} = \dfrac{A}{x+1} + \dfrac{B}{(x+1)^2} =$

$$= \frac{A(x+1)+B}{(x+1)^2}.$$

$4x + 6 = A(x+1) + B$.

Пусть x = -1. Тогда́ 2 = $B \Rightarrow B$ = 2.
Пусть x = 0. Тогда́ 6 = A + 2 $\Rightarrow A$ = 4.

$$\frac{4x+6}{(x+1)^2}=\frac{4}{x+1}+\frac{2}{(x+1)^2}.$$

Ответ: $\dfrac{x^4-3}{x^2+2x+1}=x^2-2x+3-\dfrac{4}{x+1}-\dfrac{2}{(x+1)^2}$.

Задание 3. Запишите дробь в ви́де су́ммы просте́йших дробе́й.

а) $\dfrac{x}{(x^2+1)(x-1)}$; б) $\dfrac{x^2+4}{x^2+x}$;

в) $\dfrac{x^3+8x-10}{x^2-1}$; г) $\dfrac{x^4-x^3+6x^2-x+4}{x^3-x^2+2x-2}$.

Занятие 29.
ДРОБНО-ЛИНЕЙНАЯ ФУНКЦИЯ

Фу́нкция $y=\dfrac{ax+b}{cx+d}$ называ́ется дро́бно-лине́йной фу́нкцией, где $a, b, c,$ и d – числа, $\dfrac{a}{c}\neq\dfrac{b}{d}$.

1. Область определе́ния $D(f)=\left(-\infty;-\dfrac{d}{c}\right)\cup\left(-\dfrac{d}{c};\infty\right)$.

2. Запи́шем канони́ческий вид дро́бно-лине́йной фу́нкции $y=\dfrac{ax+b}{cx+d}=\dfrac{a}{c}+\dfrac{b-\frac{ad}{c}}{cx+d}=\dfrac{a}{c}+\dfrac{\frac{b}{c}-\frac{ad}{c^2}}{x+\frac{d}{c}}=y_0+\dfrac{k}{x-x_0}$,

где $y_0=\dfrac{a}{c}$; $x_0=-\dfrac{d}{c}$; $k=\dfrac{b}{c}-\dfrac{ad}{c^2}$.

$x = -\dfrac{d}{c}$ – вертика́льная асимпто́та гра́фика.

$y = \dfrac{a}{c}$ – горизонта́льная асимпто́та гра́фика.

3. $(x_0; y_0)$ – центр симме́трии гра́фика.

Гра́фик фу́нкции – гипе́рбола. Она́ состои́т из двух ветве́й.

Упражнение 1. Иссле́дуйте фу́нкцию $y = \dfrac{1-2x}{x}$ и постро́йте ее гра́фик.

Канони́ческий вид $y = -2 + \dfrac{1}{x}$.

1. $D(f) = R \setminus \{0\}$.
2. $E(f) = R \setminus \{-2\}$.
3. $x = 0$ – вертика́льная асимпто́та гипе́рболы. $y = -2$ – горизонта́льная асимпто́та гипе́рболы.
4. (0; -2) – центр симме́трии гипе́рболы.
5. $x = \dfrac{1}{2}$ – нуль фу́нкции.
6. Ве́тви гипе́рболы располо́жены в I и III четвертя́х относи́тельно це́нтра симме́трии.
7. Фу́нкция убыва́ет в промежу́тке $(-\infty; 0)$ и в промежу́тке $(0; \infty)$ (рис. 1).

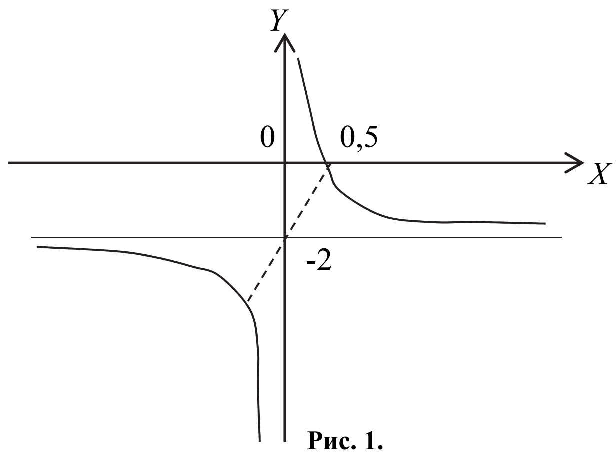


Рис. 1.

Упражнение 2. Исследуйте функцию $y = \frac{x-4}{x+2}$ и постройте ее график.

Канонический вид $y = 1 + \frac{-6}{x+2}$.

1. $D(f) = R \setminus \{-2\}$.
2. $E(f) = R \setminus \{1\}$.
3. x = -2 – вертикальная асимптота гиперболы. y = 1 – горизонтальная асимптота гиперболы.
4. (-2; 1) – центр симметрии гиперболы.
5. x = 4 – нуль функции.
6. Ветви гиперболы расположены во II и IV четвертях относительно центра симметрии.
7. Функция возрастает в промежутке $(-\infty; -2)$ и в промежутке $(-2; \infty)$ (рис. 2).

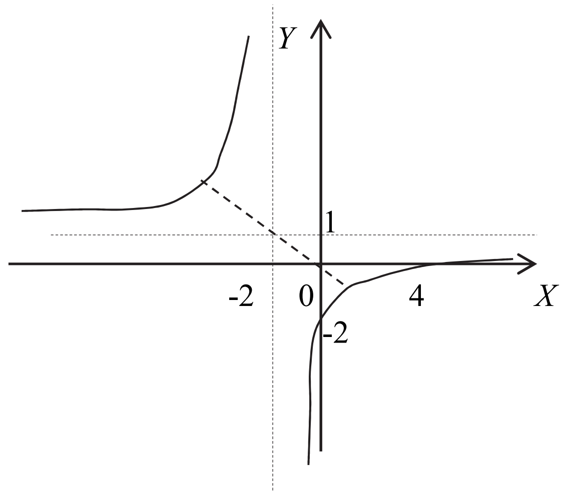


Рис. 2.

Задание 1. Исследуйте функцию и постройте ее график.

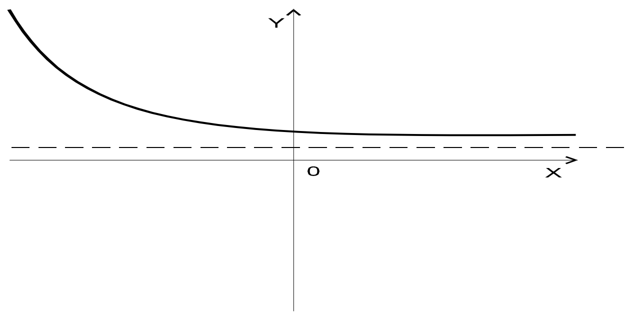
а) $y = \frac{1}{x}$; б) $y = \frac{-2}{x}$; в) $y = \frac{2}{x+3}$;

г) $y = \dfrac{x}{x-2}$; д) $y = \dfrac{2x-4}{x+1}$; е) $y = \dfrac{3-x}{x-1}$.

Ограни́ченные фу́нкции

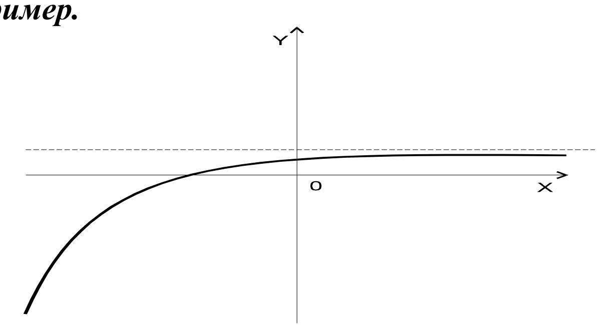
Определе́ние 1. Фу́нкция называ́ется ограни́ченной сни́зу, е́сли $\forall x \in D(f)$, $f(x) \geq m$ (m – const).

Приме́р.



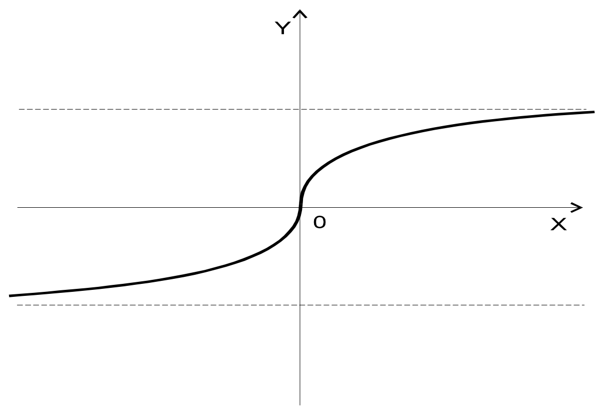
Определе́ние 2. Фу́нкция называ́ется ограни́ченной све́рху, е́сли $\forall x \in D(f), f(x) \leq M < +\infty$ (M– const).

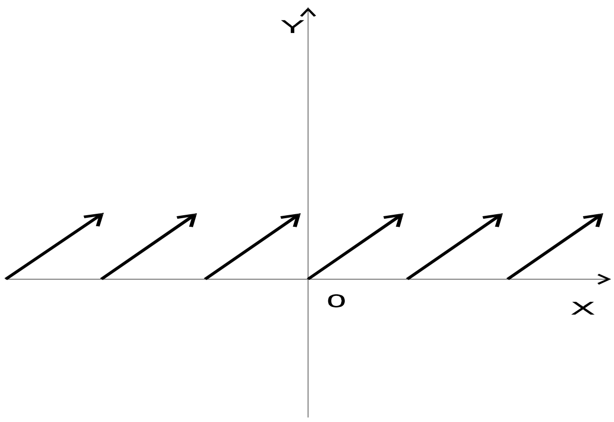
Пример.



Определе́ние 3. Фу́нкция называ́ется ограни́ченной, е́сли $\forall x \in D(f)$ $|f(x)| \leq C$, (C=const), т.е., она́ ограни́чена сни́зу и све́рху.

Приме́ры.





Зада́ние 2. Явля́ются ли ограни́ченными фу́нкции: дробно-линейная фу́нкция, квадрати́чная, $y = x^3$, $y = \sqrt{x}$?

Занятие 30.

КОРЕНЬ *n*-ой СТЕПЕНИ

Прочита́йте приме́ры иррациона́льных выраже́ний:

$\sqrt[3]{a}$ – куби́ческий ко́рень из a и́ли ко́рень тре́тьей сте́пени из a;

$\sqrt[4]{a}$ – ко́рень четвёртой сте́пени из a;

$\sqrt[5]{a}$ – ко́рень пя́той сте́пени из a;

$\sqrt[6]{a}$ – ко́рень ше́стой сте́пени из a;

$\sqrt[3]{13}$ – ко́рень тре́тьей сте́пени из трина́дцати и́ли куби́ческий ко́рень из трина́дцати;

$2\sqrt[4]{5}$ – два ко́рня четвёртой сте́пени из пяти́;

$3\sqrt[5]{6}$ – три ко́рня пя́той сте́пени из шести́;

$4\sqrt[6]{7}$ – четы́ре ко́рня шесто́й сте́пени из семи́;

$5\sqrt[7]{51}$ – пять корне́й седьмо́й сте́пени из пяти́десяти одного́;

$\sqrt[n]{a}$ – ко́рень n-ой сте́пени из a $(n \in N, n \geq 2)$.

Число́ n называ́ется показа́телем сте́пени ко́рня.

Выраже́ние, кото́рое стои́т под зна́ком ко́рня, называ́ется подкоренны́м выраже́нием.

Если n – чётное число́, то $a \geq 0$.

Если n – нечётное число́, то $a \in R$.

Наприме́р, $\sqrt[4]{a}$, $a \geq 0$; $\sqrt[4]{16} = 2$;

$\sqrt[3]{a}$, $a \in R$; $\sqrt[3]{-27} = -3$.

Неотрица́тельное число́ $b = \sqrt[n]{a}$, где $a \geq 0$ называ́ется арифмети́ческим ко́рнем n-ой сте́пени из неотрица́тельного числа́ a.

Ко́рень n-й сте́пени из отрица́тельного числа́ (n – нечётное число́) мо́жно записа́ть че́рез арифмети́ческий ко́рень.

Наприме́р, $\sqrt[3]{-21} = -\sqrt[3]{21}$; $\sqrt[5]{-32} = -\sqrt[5]{32} = -2$;

$\sqrt[7]{-256} = -\sqrt[7]{256} = -\sqrt[7]{128 \cdot 2} = -2\sqrt[7]{2}$.

Определение 1. $\left(\sqrt[n]{a}\right)^n = a$, где $a \geq 0 \Rightarrow$ е́сли $a \geq 0$, то $\sqrt[n]{a^n} = a$ для любого $n \in N$.

Сво́йства арифмети́ческих корне́й

1. Если $a > 0$, $b > 0$, то $\sqrt[n]{ab} = \sqrt[n]{a} \cdot \sqrt[n]{b}$.
2. Если $a > 0$, $b > 0$, то $\sqrt[n]{\dfrac{a}{b}} = \dfrac{\sqrt[n]{a}}{\sqrt[n]{b}}$.
3. $\sqrt[n]{a} = \sqrt[nk]{a^k}$.
4. $\sqrt[n]{\sqrt[k]{a}} = \sqrt[nk]{a}$.
5. $\left(\sqrt[n]{a}\right)^k = \sqrt[n]{a^k}$ $(a > 0)$.
6. Внесе́ние мно́жителя под знак ко́рня.

Если $a > 0$, то $a\sqrt{b} = \sqrt{a^2 b}$.

Если $a < 0$, то $a\sqrt{b} = -\sqrt{a^2 b}$.

Приме́ры. Внеси́те мно́житель под знак ко́рня.

а) $-3\sqrt{2} = -\sqrt{9 \cdot 2} = -\sqrt{18}$;

б) $x\sqrt{3x} = \sqrt{3x^3}$;

в) $x\sqrt{3} = \left[\begin{array}{l} \sqrt{3x^2}, \ x > 0, \\ -\sqrt{3x^2}, \ x < 0. \end{array}\right.$

Упражнение 1. Внеси́те мно́житель под знак ко́рня.

а) $-2\sqrt{3} = -\sqrt{4 \cdot 3} = -\sqrt{12}$;

б) $x\sqrt[4]{x} = \sqrt[4]{x^5}$;

в) $x\sqrt{2} = \sqrt{2x^2}$, $x \geq 0$;

г) $b\sqrt{2} = -\sqrt{2b^2}$, $b < 0$.

Упражнение 2. Упрости́те выраже́ние $\sqrt[3]{x\sqrt{x}}$.

$\sqrt[3]{x\sqrt{x}} = \sqrt[3]{\sqrt{x^2 \cdot x}} = \sqrt[3]{\sqrt{x^3}} = \sqrt[6]{x^3} = \sqrt{x}$.

Ита́к, $\sqrt[3]{x\sqrt{x}} = \sqrt{x}$.

Упражнение 3. Прочита́йте и запиши́те.

1. $\sqrt[5]{5}$ – 2. $2\sqrt[5]{6}$ – 3. $3\sqrt[7]{11}$ – 4. $4\sqrt[4]{4}$ –
5. $5\sqrt[5]{43}$ – 6. $7\sqrt[11]{243}$ – 7. $13\sqrt[12]{19}$

Задание 1. Найди́те значе́ние ко́рня.

а) $\sqrt[3]{125 \cdot 27}$; б) $\sqrt[4]{10000 \cdot \frac{1}{81}}$;

в) $\sqrt[5]{3^2 \cdot 5^3} \cdot \sqrt[5]{3^3 \cdot 5^2}$; г) $\sqrt[3]{9+\sqrt{17}} \cdot \sqrt[3]{9-\sqrt{17}}$.

Задание 2. Упрости́те выраже́ние.

а) $\sqrt[3]{b\sqrt[3]{b}}$; б) $\sqrt[5]{x\sqrt[4]{x}}$;

в) $\sqrt[3]{2} \cdot \sqrt{3}$; г) $\sqrt{x^2 - 6x + 9} + \sqrt{2-x} + x - 3$.

Задание 3. Внеси́те мно́житель под знак ко́рня.

а) $x\sqrt{3}$, где $x \ge 0$; б) $a\sqrt[3]{2a}$;

в) $2c\sqrt[4]{3c}$; г) $x\sqrt[6]{7x^2}$, где $x < 0$.

Определение 2. Если да́нное выраже́ние S соде́ржит знак ко́рня, а произведе́ние $S{\cdot}P$ не соде́ржит знака ко́рня, то мно́житель P называ́ется сопряжённым мно́жителем относи́тельно S, и наоборо́т.

Приме́ры.

1. $S = \sqrt{x} - 1$. Сопряжённый мно́житель $P = \sqrt{x} + 1$, так как $(\sqrt{x} - 1)(\sqrt{x} + 1) = x - 1$.

2. $2\sqrt{3x} - x$. Сопряжённый мно́житель $2\sqrt{3x} + x$, так как $(2\sqrt{3x} - x)(2\sqrt{3x} + x) = 4 \cdot 3x - x^2 = 12x - x^2$.

Упражнение 3. Дро́би освободи́те от иррациона́льности в знамена́теле.

а) $\dfrac{2}{\sqrt[3]{x^2}}=\dfrac{2\cdot\sqrt[3]{x}}{\sqrt[3]{x^2}\cdot\sqrt[3]{x}}=\dfrac{2\sqrt[3]{x}}{x}$;

б) $\dfrac{2}{\sqrt{3}-1}=\dfrac{2\left(\sqrt{3}+1\right)}{\left(\sqrt{3}-1\right)\left(\sqrt{3}+1\right)}=\dfrac{2\left(\sqrt{3}+1\right)}{3-1}=\dfrac{2\left(\sqrt{3}+1\right)}{2}=\sqrt{3}+1$;

в) $\dfrac{4}{\sqrt{2x+3}-1}=\dfrac{4\left(\sqrt{2x+3}+1\right)}{\left(\sqrt{2x+3}-1\right)\left(\sqrt{2x+3}+1\right)}=\dfrac{4\left(\sqrt{2x+3}+1\right)}{2x+2}=\dfrac{2\left(\sqrt{2x+3}+1\right)}{x+1}$;

г) $\dfrac{1}{\sqrt[3]{x}-2}=\dfrac{\sqrt[3]{x^2}+2\sqrt[3]{x}+4}{\left(\sqrt[3]{x}-2\right)\left(\sqrt[3]{x^2}+2\sqrt[3]{x}+4\right)}=\dfrac{\sqrt[3]{x^2}+2\sqrt[3]{x}+4}{x-8}$.

Запо́мните сопряжённые мно́жители для не́которых выраже́ний:

$\sqrt{f}-\sqrt{g}$ сопряжённый мно́житель $\sqrt{f}+\sqrt{g}$,

$\sqrt[3]{f}-\sqrt[3]{g}$ сопряжённый мно́житель $\sqrt[3]{f^2}+\sqrt[3]{fg}+\sqrt[3]{g^2}$,

$\sqrt[3]{f}+\sqrt[3]{g}$ сопряжённый множитель $\sqrt[3]{f^2}-\sqrt[3]{fg}+\sqrt[3]{g^2}$, и наоборо́т.

Задание 4. Освободи́те дробь от иррациона́льности в знамена́теле.

а) $\dfrac{3x}{\sqrt{x+5}-\sqrt{7-x}}$; б) $\dfrac{x-2}{\sqrt{x-1}-1}$;

в) $\dfrac{\sqrt{a+3}-2}{\sqrt{a}+1}$; г) $\dfrac{x}{\sqrt{1+x}-\sqrt{1-x}}$.

Задание 5. Освободи́те дробь от иррациона́льности в числи́теле.

а) $\dfrac{\sqrt{2+x}-\sqrt{2-x}}{x}$; б) $\dfrac{\sqrt{x+4}-\sqrt{x}}{\sqrt{x}}$;

в) $\sqrt{x-1}-\sqrt{x+3}$; г) $\dfrac{5-\sqrt{5+x^2}}{4-x}$.

Задание 6. Вы́числите значе́ния выраже́ний, освободи́в слага́емые от иррациона́льности в знамена́теле.

а) $\left(\dfrac{12}{\sqrt{15}-3}-\dfrac{28}{\sqrt{15}-1}+\dfrac{1}{2-\sqrt{3}}\right)\left(6-\sqrt{3}\right)$;

б) $\left(\dfrac{15}{\sqrt{6}+1}+\dfrac{4}{\sqrt{6}-2}-\dfrac{12}{3-\sqrt{6}}\right)\left(\sqrt{6}+11\right)$;

в) $\left(\dfrac{16}{\sqrt{5}-1}-\dfrac{5}{\sqrt{3}+2}-\dfrac{8}{\sqrt{5}-\sqrt{3}}\right)\left(\sqrt{3}+6\right)$;

г) $\left(\dfrac{2}{\sqrt{3}-1}+\dfrac{3}{\sqrt{3}-2}+\dfrac{15}{3-\sqrt{3}}\right)\left(\sqrt{3}-5\right)$.

Занятие 31.
СТЕПЕНЬ С РАЦИОНАЛЬНЫМ ПОКАЗАТЕЛЕМ

Сте́пень с натура́льным показа́телем

Определение 1. $a^n = \underbrace{a \cdot a \cdot a \cdot \ldots \cdot a}_{n \text{ раз}}$, где $a \in R$, $n \in N$.

Сте́пень с нулевы́м показа́телем

Определение 2. Если $a \in R$, $a \neq 0$, то $a^0 = 1$.

Сте́пень с отрица́тельным показа́телем

Определение 3. Если $a \in R$, $a \neq 0$, $n \in Z$ и n – отрица́тельное число, то

$$a^n = \frac{1}{a^{-n}} \Leftrightarrow \frac{1}{a^n} = a^{-n}.$$

Приме́ры.

а) $3^0 = 1$; $\left(\sqrt{2}\right)^0 = 1$; $(0,7)^0 = 1$; $-0,3^0 = -1$.

б) $5^{-1} = \frac{1}{5}$; $\left(\frac{2}{3}\right)^{-1} = \frac{3}{2}$; $3^{-2} = \frac{1}{3^2} = \frac{1}{9}$.

в) $\frac{1}{8} = \frac{1}{2^3} = 2^{-3}$; $\frac{2}{x^2} = 2 \cdot x^{-2}$, $x \neq 0$.

Де́йствия над степеня́ми (сво́йства).

1. $a^n \cdot a^m = a^{n+m} \quad \Leftrightarrow \quad a^{n+m} = a^n \cdot a^m$.
2. $a^n : a^m = a^{n-m} \quad \Leftrightarrow \quad a^{n-m} = a^n : a^m \ (a \neq 0)$.
3. $(ab)^n = a^n \cdot b^n \quad \Leftrightarrow \quad a^n \cdot b^n = (ab)^n$.

4. $\left(\dfrac{a}{b}\right)^n = \dfrac{a^n}{b^n} \qquad \Leftrightarrow \qquad \dfrac{a^n}{b^n} = \left(\dfrac{a}{b}\right)^n \ (b \neq 0).$

5. $\left(a^n\right)^m = a^{nm} \qquad \Leftrightarrow \qquad a^{nm} = \left(a^n\right)^m = \left(a^m\right)^n.$

Сте́пень с дро́бным показа́телем

Определение 4. Если $a \geq 0$ и $n \in N$, то $a^{\frac{1}{n}} = \sqrt[n]{a}$.

Сле́довательно: $\left(a^{\frac{1}{n}}\right)^n = \sqrt[n]{a^n} = a$.

Если $a < 0$, то выраже́ние $a^{\frac{1}{n}} = \sqrt[n]{a}$ име́ет смысл, е́сли n – нечётное натура́льное число́.

Приме́ры.

$$x^{\frac{1}{3}} = \sqrt[3]{x}; \quad x^{\frac{1}{5}} = \sqrt[5]{x}; \quad x^{-\frac{1}{3}} = \frac{1}{x^{\frac{1}{3}}} = \frac{1}{\sqrt[3]{x}}, x \neq 0.$$

Определение 5. Если $a \in R$, $a \geq 0$ и $m \in Z$, $n \in N$, то $a^{\frac{m}{n}} = \sqrt[n]{a^m}$.

Если $a < 0$, то дробная сте́пень $a^{\frac{m}{n}} = \sqrt[n]{a^m}$ суще-ству́ет, е́сли знамена́тель n – нечётное натура́льное число́ ($n = 2k + 1,\ k \in N$).

Примеры.

$$2^{\frac{2}{3}} = \sqrt[3]{2^2} = \sqrt[3]{4}; \quad 5^{-\frac{2}{3}} = \frac{1}{5^{\frac{2}{3}}} = \frac{1}{\sqrt[3]{25}}.$$

Обрати́те внима́ние: $\sqrt[2n]{a^{2m}} = a^{\frac{2m}{2n}} = |a|^{\frac{m}{n}}$.

Примеры.

$$\sqrt[3]{x^2}=x^{\frac{2}{3}};\quad x^{-\frac{2}{5}}=\frac{1}{\sqrt[5]{x^2}},\ x\neq 0;\quad \sqrt[4]{x^3}=x^{\frac{3}{4}},\ x\geq 0.$$

$$\sqrt{x^2}=|x|;\quad \sqrt[4]{x^4}=|x|;\quad \sqrt[4]{x^2}=\sqrt{|x|};\quad \sqrt{x^{-6}}=|x|^{-3}=\frac{1}{|x|^3}.$$

Упражнение 1. Найди́те значе́ние выраже́ния.

а) $5^{-2}=\frac{1}{5^2}=\frac{1}{25}$; б) $(-3)^{-4}=\frac{1}{(-3)^4}=\frac{1}{81}$;

в) $\left(\frac{2}{3}\right)^{-1}=\frac{3}{2}$; г) $a^{-1}=\frac{1}{a},\ a\neq 0$.

Упражнение 2. Прочита́йте чи́сла в ви́де сте́пени с основа́нием 2.

а) $8=2^3$; б) $\frac{1}{8}=2^{-3}$; в) $\frac{1}{32}=2^{-5}$; г) $\frac{1}{128}=2^{-7}$.

Упражнение 3. Найди́те значе́ние выраже́ния.

а) $125^{-1}\cdot 25^2=5^{-3}\cdot 5^2=5^{-1}=\frac{1}{5}$;

б) $\frac{9^{-6}\cdot 27^6}{81^2}$

$=(3^2)^{-6}\cdot(3^3)^6\cdot(3^4)^{-2}=3^{-12}\cdot 3^{18}\cdot 3^{-8}=3^{-2}=\frac{1}{3^2}=\frac{1}{9}$.

Упражнение 4. Прочита́йте и запиши́те сте́пени с дро́бными показа́телями в ви́де ко́рня из числа́.

а) $7^{\frac{3}{5}}=\sqrt[5]{7^3}=\sqrt[5]{343}$; б) $3^{-0,5}=3^{-\frac{1}{2}}=\sqrt{3^{-1}}=\sqrt{\frac{1}{3}}$;

в) $\left(\frac{1}{9}\right)^{-\frac{1}{5}}=9^{\frac{1}{5}}=\sqrt[5]{9}$; г) $x^{-1,5}=x^{-\frac{3}{2}}=\sqrt{x^{-3}}=\sqrt{\frac{1}{x^3}}$.

Упражнение 5. Запишите выраже́ние в ви́де сте́пени.

а) $5\sqrt{5} = 5 \cdot 5^{\frac{1}{2}} = 5^{\frac{3}{2}}$; б) $4\sqrt[3]{2} = 2^2 \cdot 2^{\frac{1}{3}} = 2^{\frac{7}{3}}$;

в) $x\sqrt{x} = x \cdot x^{\frac{1}{2}} = x^{\frac{3}{2}}$; г) $\dfrac{x^2\sqrt{x}}{\sqrt[3]{x}} = x \cdot x^{\frac{1}{2}} \cdot x^{-\frac{1}{3}} = x^{\frac{7}{6}}$.

Задание 1. Запишите выраже́ние в ви́де сте́пени.

а) 0,0081; б) 0,0001; в) $\dfrac{1}{x^4}$; г) $\dfrac{1}{81a^2}$.

Задание 2. Запишите выраже́ние в ви́де сте́пени.

а) $\sqrt[10]{x} \cdot \sqrt[15]{x}$; б) $\sqrt[10]{y\sqrt[3]{y^2}}$; в) $\dfrac{\sqrt[6]{x\sqrt[3]{x}}}{x^{-2}}$; г) $\sqrt{8^{x-1}} \cdot \sqrt[3]{4^{2-x}}$.

Задание 3. Упрости́те выраже́ние.

а) $\left(16a^{-4}\right)^{-\frac{3}{4}}$; б) $\left(64x^{-6}\right)^{-\frac{5}{4}}$; в) $\dfrac{\sqrt[5]{x^2\sqrt{x}}}{x^{-1,5}}$; г) $\left(\dfrac{2}{3}\right)^x \cdot \left(\dfrac{9}{8}\right)^x$;

д) $2^x \cdot 5^x \cdot 0{,}1 \cdot \left(10^{x-1}\right)^5$; е) $\sqrt{2^x} \cdot \sqrt{3^x} \cdot 36$.

Задание 4. Упрости́те выраже́ние.

а) $\dfrac{x^{0,5}}{x^{0,5}-1} - \dfrac{x^{0,5}}{x-1}$; б) $\left(\dfrac{x^{1,5}-1}{x^{0,5}-1} + x^{0,5}\right) \cdot \dfrac{x^{0,5}-1}{x-1}$;

в) $\left(\dfrac{1-x}{1-x^{0,5}} + x\right) \cdot \left(1-x^{0,5}\right)$; г) $\left(\dfrac{1-x^{1,5}}{1+x^{0,5}+x} + x^{0,5}\right) \cdot \dfrac{x-1}{1+x^{0,5}}$.

Задание 5. Найди́те значе́ние выраже́ния.

а) $(-1{,}5)^{-3} - \left(\dfrac{2}{3}\right)^{-4} \cdot \left(\dfrac{2}{3}\right)^3 - \left(-\dfrac{4}{9}\right)^0 + 16 \cdot 0{,}5$;

б) $\left(\dfrac{3}{5}\right)^{-3} \cdot \left(\dfrac{3}{5}\right)^4 - \left(\dfrac{9}{25}\right)^0 - (-0{,}5)^{-3} - 25^{1,5} \cdot 0{,}2$;

в) $\left(\dfrac{1}{27} \cdot 125^{-1}\right)^{-\frac{1}{3}}$; г) $25^{0,3} \cdot 5^{1,4}$.

Задание 6. Вы́полните де́йствия.

а) $\left(1+a^{\frac{1}{2}}\right)^2-2a^{\frac{1}{2}}$; б) $\left(a^{\frac{2}{3}}+3a^{\frac{1}{5}}\right)^2-6a^{\frac{13}{15}}$;

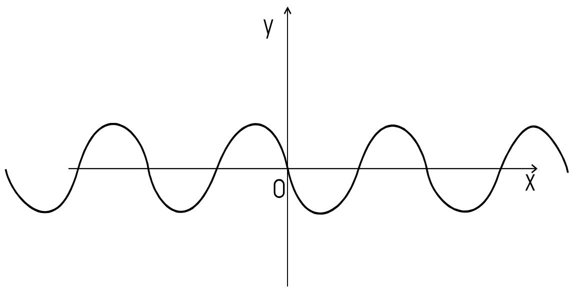
в) $\left(x^{\frac{1}{3}}+1\right)\left(x^{\frac{2}{3}}-x^{\frac{1}{3}}+1\right)$; г) $\left(a^{\frac{1}{3}}-1\right)\left(a^{\frac{2}{3}}+a^{\frac{1}{3}}+1\right)$.

Сво́йства фу́нкций (*продолже́ние*)

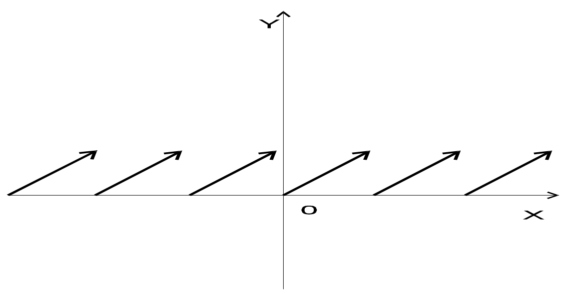
Определение 6. Фу́нкция называ́ется периоди́ческой, е́сли $\exists T>0$, $\forall x\in D(f)$, $(T+x)\in D(f)$ и выполня́ется усло́вие $f(T+x)=f(x)$.

Примеры.

1.



2.



Замеча́ние. Обы́чно под T понима́ют наиме́ньшее положи́тельное число́.

Теоре́ма 1. Пусть $y = f(x)$ периоди́ческая фу́нкция с пери́одом T. Тогда́ число́ kT ($k \in Z$) та́кже пери́од.

Доказа́тельство провёдем ме́тодом математи́ческой инду́кции.

1) $2T$ – пери́од фу́нкции $y = f(x)$, $x \in D(f)$: $f(x+2T) = f((x+T)+T) = f(x+T) = f(x)$;

2) nT – пери́од $\Rightarrow$ $(n+1)\ T$ – пери́од, $x \in D(f)$, $n \in \boldsymbol{N}$:

$f(x+(n+1)T) = ((x+nT)+T) = f(x+nT) = f(x)$

3) для $T = -nT$ – аналоги́чно.

Теоре́ма 2. Моното́нная фу́нкция не мо́жет быть периоди́ческой (без доказа́тельства).

Упражнение 6. Приведи́те приме́ры фу́нкций, облада́ющих перечи́сленными в теоре́мах 1 и 2 сво́йствами.

Упражнение 7. Сформули́руйте необходи́мое и доста́точное усло́вие, при кото́ром гра́фиком на координа́тной пло́скости задаётся фу́нкция.

Рассмо́трим гра́фик не́которого соотве́тствия (рис. 1). При перехо́де к обра́тному соотве́тствию переме́нные x и y меня́ются места́ми. На координа́тной пло́скости при перехо́де к обра́тному соотве́тствию то́чки с координа́тами (x; y), $y = f(x)$ и (y; x) меня́ются места́ми, что означа́ет зерка́льное отображе́ние исхо́дного гра́фика относи́тельно диагона́ли дека́ртова квадра́та $\mathbf{R}^2$, т.е. биссектри́сы I и III координа́тных угло́в.

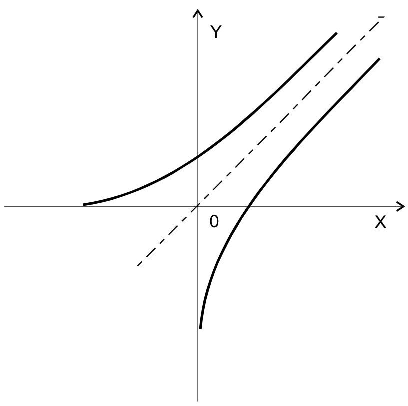


Рис. 1.

Замечание. Уравне́ние ука́занной биссектри́сы: $y = x$ или $x - y = 0$.

$\Gamma(f(x))$ и $\Gamma(f^{-1}(y))$ – одна́ и та же ли́ния.

Если вме́сто $x = f^{-1}(y)$ пи́шем $y = f^{-1}(x)$, то $\Gamma(f^{-1}(x))$ получа́ем из $\Gamma(f(x))$ с по́мощью преобразова́ний пло́скости $(x; y) \to (y; x)$.

Алгори́тм обраще́ния фу́нкции

1) прове́рка обрати́мости;
2) из уравне́ния $y = f(x)$ вы́разите x че́рез y:

$$y = f(x) \Rightarrow x = \varphi(y)$$

3) поменя́йте места́ми x и y.

Задание 7. Обрати́те сле́дующие фу́нкции, постро́йте гра́фики обра́тных фу́нкций.

а) $y = \dfrac{1}{x}$; б) $y = \dfrac{x}{x+1}$; в) $y = \dfrac{x+1}{x-1}$; г) $y = \dfrac{x^2-1}{x+1}$.

Задание 8. Обрати́мы ли фу́нкции?

1) $y = x^2$; 2) $y = 2x^3$; 3) $y = x^2 + 3x$;
4) $y = \sqrt{x}$; 5) $y = \sqrt{x-1}$; 6) $y = \sqrt{x} - 1$.

Задание 9. Обрати́те нижесле́дующие фу́нкции и определи́те их о́бласти определе́ния и значе́ния.

1. $y = 3x - 1$; 2. $y = x^2 - 2x + 1, \quad (x \le 1)$;
3. $y = \log_2(x-1)$; 4. $y = 2^x - 1$;
5. $y = \dfrac{1}{x-1}$; 6. $y = \sqrt[23]{x-1}$.

Задание 10. Иссле́дуйте обра́тные фу́нкции для сле́дующих фу́нкций, а зате́м постро́йте эски́зы их гра́фиков.

1. $y = \sqrt{x-1}$; 2. $y = \sqrt{x+1}$; 3 $y = |x|\sqrt{-x}$.

Занятие 32.

ИРРАЦИОНАЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ

Определе́ние. Иррациона́льными уравне́ниями называ́ются уравне́ния, кото́рые соде́ржат переме́нную под зна́ком ко́рня (радика́ла).

Наприме́р, уравне́ние $\sqrt{6+x}=x$ соде́ржит переме́нную под зна́ком ко́рня. Уравне́ние $\sqrt{6+x}=x$ – иррациона́льное уравне́ние.

Реше́ние иррациона́льных уравне́ний ви́да $\sqrt{f(x)}=g(x)$

Это уравне́ние равноси́льно систе́ме $\begin{cases} f(x)=(g(x))^2, \\ g(x)\geq 0. \end{cases}$

Пример 1. Реши́те уравне́ние $\sqrt{3+x}=x+1$.

Реше́ние. Да́нное уравне́ние равноси́льно систе́ме $\begin{cases} 3+x=(x+1)^2, \\ x+1\geq 0. \end{cases}$

Реша́ем уравне́ние систе́мы

$$3+x=x^2+2x+1 \Leftrightarrow x^2+x-2=0 \Leftrightarrow x_1=-2,\ x_2=1.$$

Из нера́венства име́ем, что $x\geq -1$. Сле́довательно, $x=-2$ – посторо́нний ко́рень. Поэ́тому уравне́ние име́ет оди́н ко́рень $x=1$.

Прове́рка: $\sqrt{3+1}=1+1,\ 2=2$ (ве́рно).

Ответ: $x=1$.

Пример 2. Реши́те уравне́ние $\sqrt{22-x}=x-2$.

Реше́ние. $\begin{cases} 22-x=(x-2)^2, \\ x-2\geq 0. \end{cases}$ $22-x=x^2-4x+4 \Leftrightarrow$

$x^2-3x-18=0 \Leftrightarrow x=6$ и́ли $x=-3$. $\begin{cases} x=6;\ x=-3, \\ x-2\geq 0 \end{cases} \Rightarrow x=6.$

Прове́рка: $\sqrt{22-6}=6-2$, 4 = 4 (ве́рно).

Отве́т: $x = 6$.

Пример 3. Реши́те уравне́ние $\sqrt{6-4x-x^2}=x+4$.

Реше́ние. $\begin{cases} 6-4x-x^2=(x+4)^2, \\ x+4\ge 0. \end{cases}$ Реша́ем уравне́ние систе́мы. $6-4x-x^2=x^2+8x+16$, $2x^2+12x+10=0$, $x^2+6x+5=0$, $x_1=-5, x_2=-1$, $\begin{cases} x_1=-5, x_2=-1, \\ x+4\ge 0. \end{cases} \Rightarrow x=-1.$

Проверка: $\sqrt{6+4-1}=-1+4$, 3 = 3 (верно).

Ответ: -1.

Пример 4. Реши́те уравне́ние $\sqrt{x-5}+\sqrt{10-x}=3$.

Реше́ние. Да́нное уравне́ние эквивале́нтно систе́ме

$$\begin{cases} \left(\sqrt{x-5}+\sqrt{10-x}\right)^2=9, \\ x-5\ge 0, \\ 10-x\ge 0. \end{cases}$$

Реша́ем уравне́ние систе́мы

$x-5+10-x+2\sqrt{(x-5)(10-x)}=9$, $2\sqrt{(x-5)(10-x)}=4$, $\sqrt{(x-5)(10-x)}=2$, $(x-5)(10-x)=4$, $10x-50-x^2+5x=4$, $x^2-15x+54=0$, $x_1=6, x_2=9$,

$$\begin{cases} x=6; x=9, \\ x-5\ge 0, \\ 10-x\ge 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=6; x=9, \\ 5\le x\le 10. \end{cases} \Rightarrow x=6,\ x=9.$$

Прове́рка: При $x = 6$, $\sqrt{1}+\sqrt{4}=3$, 3 = 3 (ве́рно).

При $x = 9$, $\sqrt{4}+\sqrt{1}=3$, 3 = 3 (ве́рно).

Отве́т: 6; 9.

Пример 5. Реши́те уравне́ние $\sqrt{3x-5}-\sqrt{4-x}=1$.

Реше́ние. $\begin{cases} \left(\sqrt{3x-5}-\sqrt{4-x}\right)^2=1, \\ 3x-5\ge 0, \\ 4-x\ge 0, \\ 3x-5>4-x. \end{cases}$

$3x-5+4-x-2\sqrt{(3x-5)(4-x)}=1$,

$-2\sqrt{(3x-5)(4-x)}=-2x+2$, $\sqrt{(3x-5)(4-x)}=x-1$,

$(3x-5)(4-x)=x^2-2x+1$, $4x^2-19x+21=0$, $x=3$, $x=\dfrac{7}{4}$,

$$\begin{cases} x=3;\ x=\dfrac{7}{4}, \\ 3x-5\ge 0, \\ 4-x\ge 0, \\ 3x-5>4-x \end{cases} \Rightarrow x=3.$$

Прове́рка: $\sqrt{3\cdot 3-5}-\sqrt{4-3}=1$, 2 – 1 = 1, 1 = 1 (верно).

Отве́т: 3.

Уравне́ния ви́да: $\sqrt[3]{f(x)}\pm\sqrt[3]{g(x)}=h(x)$

Возво́дим в куб ле́вую и пра́вую ча́сти уравне́ния по фо́рмуле: $(a\pm b)^3=a^3\pm b^3\pm 3ab(a\pm b)$.

Пример. Реши́те уравне́ние $\sqrt[3]{5x+7}-\sqrt[3]{5x-12}=1$.

Реше́ние. Возво́дим о́бе ча́сти уравне́ния в куб:

$5x+7-(5x-12)-3\sqrt[3]{(5x+7)(5x-12)}\underbrace{\left(\sqrt[3]{5x+7}-\sqrt[3]{5x-12}\right)}_{1}=1$,

$-3\sqrt[3]{(5x+7)(5x-12)}=-18$, $\sqrt[3]{(5x+7)(5x-12)}=6$,

$(5x+7)(5x-12)=6^3$. По́сле упроще́ний получим уравне́ние $x^2-x-12=0 \Rightarrow x = 4$; $x = -3$. Оба ко́рня удовлетворя́ют уравне́нию.

Отве́т: –3; 4.

Зада́ние. Реши́те уравне́ния.

а) $\sqrt{4+x}=8-x$;
б) $\sqrt{12-x}=x$;
в) $\sqrt{5x+12}=3-x$;
г) $\sqrt{x+7}+\sqrt{x-1}=4$;
д) $\sqrt{2-x}=x$;
е) $x=1-\sqrt{x+5}$;
ж) $\sqrt{x-1}-\sqrt{5x-1}-\sqrt{3x-2}=0$;
з) $(x^2-4)\sqrt{x-1}=0$;
и) $(x^2+3x)\sqrt{2+x}=0$;
к) $\sqrt[3]{15+2x}+\sqrt[3]{13-2x}=4$;
л) $\sqrt[3]{x+34}-\sqrt[3]{x-3}=1$;
м) $\sqrt[3]{1+\sqrt{x}}+\sqrt[3]{1-\sqrt{x}}=2$

Заня́тие 33.

ИРРАЦИОНА́ЛЬНЫЕ ФУ́НКЦИИ. ИРРАЦИОНА́ЛЬНЫЕ НЕРАВЕ́НСТВА

Определе́ние. Фу́нкции, кото́рые соде́ржат переме́нную (аргуме́нт) под зна́ком ко́рня, называ́ются иррациона́льными.

Приме́р 1. Иссле́дуйте фу́нкцию $y=\sqrt{x-4}$ и постро́йте эскиз её гра́фика.

Фу́нкция $y=\sqrt{x-4}$ – иррациона́льная.

Область определе́ния нахо́дим из усло́вия $x-4\geq 0$.
$D(f)=[4;\infty)$.

Фу́нкция возраста́ет в э́том промежу́тке от 0 до ∞, так как $x-4$ возраста́ет от 0 до ∞ (рис. 1).

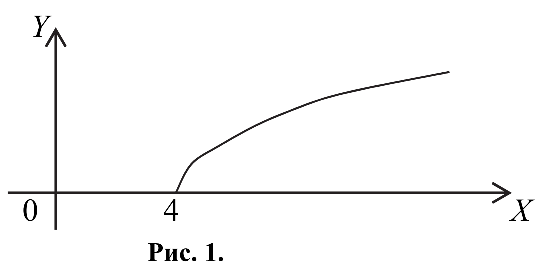


Рис. 1.

Мно́жество значе́ний да́нной фу́нкции $E(f) = [0; \infty)$.

Пример 2. Исследуйте функцию $y = \sqrt{x+1} - \sqrt{1-x}$.

Фу́нкция $y = \sqrt{x+1} - \sqrt{1-x}$ – иррациона́льная.

Область определе́ния нахо́дим из систе́мы

$$\begin{cases} x+1 \ge 0, \\ 1-x \ge 0 \end{cases} \Rightarrow D(f) = [-1; 1].$$

Фу́нкция нечётная. $x = 0$ – нуль фу́нкции.

Фу́нкция возраста́ет в своей о́бласти определе́ния от $-\sqrt{2}$ до $\sqrt{2}$. Схе́ма гра́фика (рис. 2).

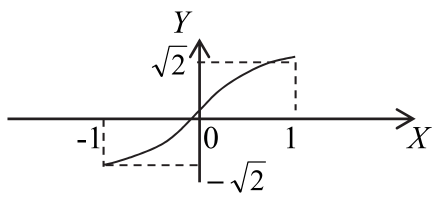


Рис. 2.

Пример 3. Дана́ фу́нкция $y = (x^2 + 4x)\sqrt{x-3}$. Найди́те о́бласть определе́ния и нули́ фу́нкции.

Реше́ние.

1. $D(f) = [3; \infty)$.

2. Нуль фу́нкции $x = 3$. (Уравне́ние $x^2 + 4x = 0$ име́ет ко́рни $x = 0$ и $x = -4$, но они́ не принадлежа́т $D(f)$.)

Пример 4. Найди́те интерва́лы знакопостоя́нства фу́нкции $y = x + 1 - \sqrt{x+3}$.

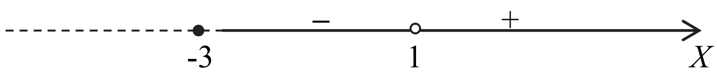
1. Область определе́ния фу́нкции $D(f) = [-3; \infty)$.

2. Найдём нули́ фу́нкции $y = x + 1 - \sqrt{x+3}$, $y = 0$, т.е. реша́ем иррациона́льное уравне́ние $x + 1 = \sqrt{x+3}$. Оно́ экви-вале́нтно систе́ме $\begin{cases} (x+1)^2 = x+3, \\ x+1 \ge 0, \end{cases}$ $\begin{cases} x^2 + x - 2 = 0, \\ x \ge -1, \end{cases}$

$$\begin{cases} x_1 = -2,\ x_2 = 1, \\ x \ge -1, \end{cases} \Rightarrow x = 1 \text{ – нуль фу́нкции.}$$

3. Найдём интерва́лы постоя́нного зна́ка (интерва́лы знакопостоя́нства).

На числово́й прямо́й отме́тим о́бласть определе́ния фу́нкции и на о́бласти определе́ния то́чку 1 – нуль фу́нкции. Проверя́ем знак значе́ния фу́нкции в ка́ждом интерва́ле.



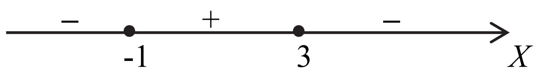
$x \in [-3; 1)$. Возьмём, наприме́р, x = -3. $f(-3) = -3 + 1 - 0 < 0$.
$x \in (1; \infty)$. Возьмём, наприме́р, x = 2. $f(2) = 2 + 1 - \sqrt{5} > 0$.

Отве́т: $y < 0$, при $x \in [-3; 1)$;
$y > 0$, при $x \in (1; \infty)$.

Пример 5. Найди́те интерва́лы знакопостоя́нства фу́нкции $y = (x-4)\sqrt{3+2x-x^2}$.

Реше́ние.

1. Область определе́ния фу́нкции $D(f)$:
$-x^2 + 2x + 3 \ge 0$, $-\left(x^2 - 2x - 3\right) \ge 0$, $-(x-3)(x+1) \ge 0$,



$D(f)$ = [-1; 3].

2. Нули́ фу́нкции $y = (x-4)\sqrt{3+2x-x^2}$, y = 0, т.е. реша́ем иррациона́льное уравне́ние $(x-4)\sqrt{3+2x-x^2} = 0$. Оно́ име́ет два́ реше́ния –1 и 3.

3. Интерва́лы постоя́нного зна́ка фу́нкции $y=(x-4)\sqrt{3+2x-x^2}$.

Ответ: $y<0$, при $x\in$ (-1; 3).

Задание 1. Найди́те нули́ и интерва́лы постоя́нного зна́ка функции.

а) $y=\sqrt{x^2+2}-x-2$; б) $y=\left(x^2-4\right)\sqrt{x-1}$;

в) $y=\sqrt{x+2}-\sqrt{x-6}-2$; г) $y=\sqrt{5x+21}-x-3$.

Иррациона́льные нера́венства

Рассмо́трим реше́ние иррациона́льных нера́венств на приме́рах.

Пример 1. Реши́те нера́венство $\sqrt{3x-10}>\sqrt{6-x}$.

Реше́ние. Перено́сим все чле́ны нера́венства в ле́вую часть $\sqrt{3x-10}-\sqrt{6-x}>0$ и рассмо́трим фу́нкцию $y=\sqrt{3x-10}-\sqrt{6-x}$. Отве́тим на вопро́с, при каки́х значе́ниях x значе́ния $y>0$.

1. Область определе́ния

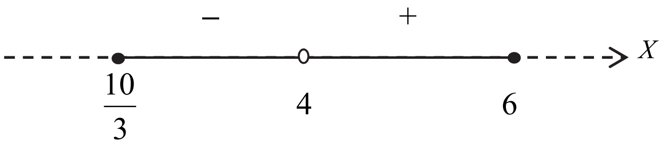
$$D(f):\begin{cases}3x-10\geq 0,\\ 6-x\geq 0\end{cases}\Rightarrow x\in\left[\frac{10}{3};6\right].\ D(f)=\left[\frac{10}{3};6\right].$$

2. Нули́ фу́нкции.

Реша́ем систе́му $\begin{cases}\sqrt{3x-10}=\sqrt{6-x},\\ 3x-10\geq 0,\\ 6-x\geq 0.\end{cases}$ $\sqrt{3x-10}=\sqrt{6-x}$

$\Rightarrow 3x-10=6-x\Rightarrow x=4$.

3. Интерва́лы постоя́нного зна́ка.



$f\left(\frac{10}{3}\right)=0-\sqrt{\frac{8}{3}}<0$; $f(6)=\sqrt{18-10}-0=\sqrt{8}>0$.

Отве́т: $(4;\,6]$.

Пример 2. Реши́те нера́венство $(3-x)\sqrt{1-x}<0$.

Реше́ние. Рассмо́трим фу́нкцию $y=(3-x)\sqrt{1-x}$.

1. $D(f)=(-\infty;\,1]$.

2. Нуль фу́нкции $x = 1$.

3.

$f(0) = 3 > 0$.

Отве́т: $\varnothing$.

Задание 2. Реши́те нера́венства.

а) $\sqrt{2+x}<x$; б) $\sqrt{2x+3}\ge x$;

в) $\sqrt{1-x}-\sqrt{2x-3}<5$; г) $\sqrt{x^2-5x+4}>x-3$;

д) $\sqrt{2x}<4-x$; е) $\sqrt{12+x}<x$;

ж) $\sqrt{x+1}>x-1$; з) $\sqrt{5x+11}>x+3$.

Занятие 34.

СТЕПЕННАЯ ФУНКЦИЯ

Определение. Фу́нкция ви́да $y = x^{\alpha}$ называ́ется степенно́й фу́нкцией.

Степенна́я фу́нкция с це́лым положи́тельным показа́телем $y = x^n$, где $n \in N$, $n \geq 2$

***n* – чётное число.**

Фу́нкция чётная

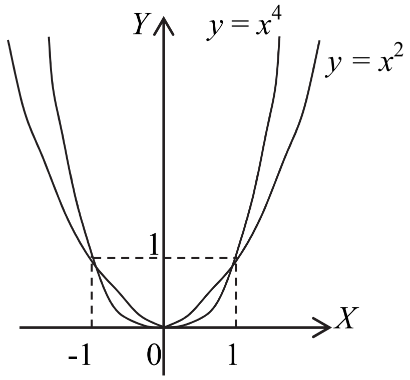
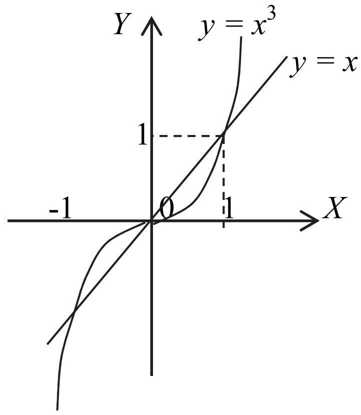


График фу́нкции $y = x^2$ – пара́бола.
То́чка (0; 0) – верши́на пара́болы.
Гра́фики фу́нкций $y = x^4$, $y = x^6, \ldots$ – пара́болы четвёртого, шесто́го и т.д. поря́дка.

***n* – нечётное число.**

Фу́нкция нечётная



Гра́фик фу́нкции $y = x^3$ – куби́ческая пара́бола.
То́чка (0; 0) – центр симме́трии пара́болы.
Гра́фики фу́нкций $y = x^5$, $y = x^7, \ldots$ – пара́болы пя́того, седьмо́го и т.д. поря́дка.

При любо́м *n* гра́фик фу́нкции прохо́дит че́рез то́чку (1; 1).

Обрати́те внима́ние. Фу́нкция $y = x^n$, где $n \in N$, $n \geq 2$, возраста́ет в промежу́тке $(0;\ 1)$ ме́дленнее при бо́льшем n и быстре́е в промежу́тке $(1; \infty)$.

Например, $x^5 < x^3$, е́сли $x \in (0; 1)$ и $x^5 > x^3$, е́сли $x \in (1; \infty)$.

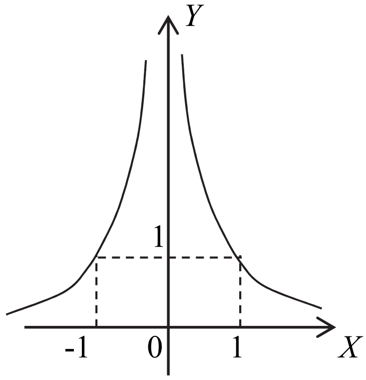
возраста́ет ме́дленнее 1. increases slower;
2. augmenter plus lentement; 3. crece mas lentamente;
4.schneller wachsen; 5. 最慢的增長; 6.
возраста́ет быстре́е 1. increases guicklier;
2. progresse plus vite; 3. crece mas rápido;
4. langsamer wachsen; 5.最快的增長; 6.

Задание 1. Опиши́те фу́нкцию и изобрази́те её гра́фик.
а) $y = (x-1)^2 + 1$; б) $y = (x-1)^3 + 1$; в) $y = -(x-1)^2 + 1$.

Степенна́я фу́нкция с це́лым отрица́тельным показа́телем $y = x^{-n}$, $n \in N$

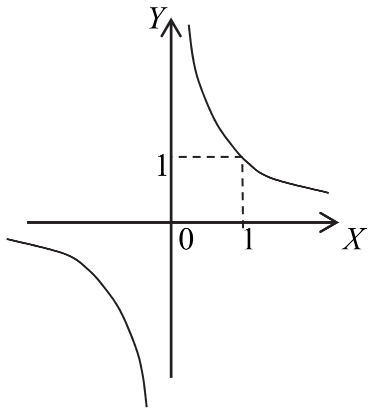
***n* – чётное число**.
Фу́нкция чётная.

$x \neq 0$.



***n* – нечётное число**.
Фу́нкция нечётная.

$x \neq 0$.



Гра́фик фу́нкции – гипе́рбола чётного поря́дка.
Возраста́ет в $(-\infty; 0)$ и убыва́ет в $(0; \infty)$.
Пряма́я $x = 0$ – ось симме́трии.

Гра́фик фу́нкции – гипе́рбола нечётного поря́дка.
Убыва́ет в $(-\infty; 0)$ и убыва́ет в $(0; \infty)$.
То́чка (0; 0) – центр симме́трии.

Этими сво́йствами облада́ют фу́нкции

$y = x^{-4}$, $y = x^{-6}$, …

$y = x^{-3}$, $y = x^{-5}$, …

Гра́фик фу́нкции при любо́м n прохо́дит че́рез то́чку (1; 1).

облада́ть 1. to have; 2. posseder; 3. tener, poseer;
4. besitzen, haben; 5. 具有,有; 6.

Задание 2. Опиши́те фу́нкцию и изобрази́те её гра́фик.

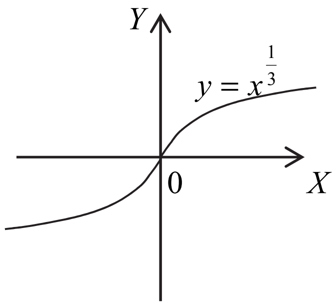
а) $y = (x-1)^{-2} + 1$;
б) $y = (x-1)^{-3} + 1$;
в) $y = -(x-1)^{-2} + 1$;
г) $y = -(x-1)^{-3} + 1$;
д) $y = (-x+1)^{-3} + 1$.

Степенна́я фу́нкция с дробным положи́тельным показа́телем $y = x^{\frac{p}{q}}$, где $\frac{p}{q}$ – несократи́мая дробь, $\frac{p}{q} > 0$

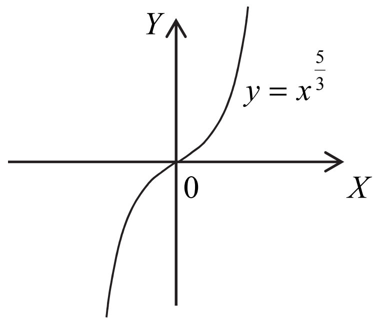
p и *q* – нечётные числа

Гра́фик фу́нкции – пара́бола нечётного поря́дка.
То́чка (0; 0) – центр симме́трии.
Фу́нкция возраста́ет во всей о́бласти определе́ния.
Фу́нкция нечётная.
Гра́фик фу́нкции прохо́дит че́рез то́чку (1; 1).

$0 < \frac{p}{q} < 1$



$\frac{p}{q} > 1$



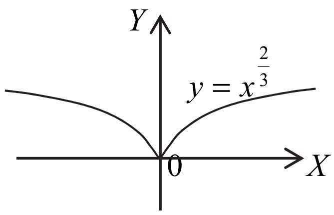
Задание 3. Опиши́те фу́нкцию и изобрази́те её гра́фик.

а) $y = (x-1)^{\frac{1}{3}} + 1$;   б) $y = (x-1)^{\frac{5}{3}} + 1$;

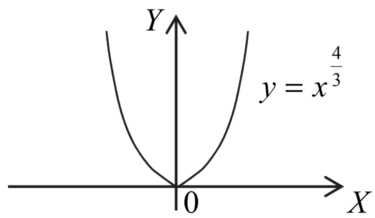
в) $y = -(x-1)^{\frac{3}{5}} + 1$;   г) $y = -(x-1)^{\frac{7}{5}} + 1$.

***p* – чётное число, *q* – нечётное число**

$0 < \frac{p}{q} < 1$



$\frac{p}{q} > 1$



Гра́фик фу́нкции – пара́бола чётного поря́дка.
То́чка (0; 0) – верши́на.
Прямая́ $x = 0$ – ось симме́трии.
Фу́нкция убыва́ет в $(-\infty; 0]$ и возраста́ет в $[0; \infty)$.

Фу́нкция чётная.
Гра́фик фу́нкции прохо́дит че́рез то́чку (1; 1).

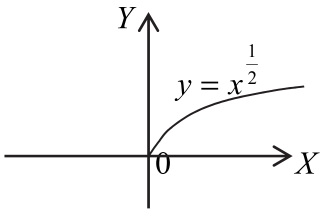
Задание 4. Опиши́те фу́нкцию и изобрази́те её гра́фик.

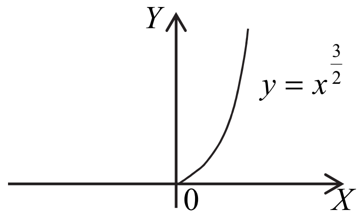
а) $y = (x-1)^{\frac{2}{3}} + 1$; б) $y = (x-1)^{\frac{4}{3}} + 1$;

в) $y = -(x-1)^{\frac{4}{5}} + 1$; г) $y = -(x-1)^{\frac{6}{5}} + 1$.

***p* – нечётное число,** ***q* – чётное число**

$0 < \dfrac{p}{q} < 1$ $\dfrac{p}{q} > 1$





Область определе́ния $D(f) = [0; \infty)$.
Гра́фик фу́нкции – ветвь пара́болы.
То́чка (0; 0) – верши́на пара́болы.
Фу́нкция возраста́ет во всей о́бласти определе́ния.
Гра́фик фу́нкции прохо́дит че́рез то́чку (1; 1).

Задание 5. Опиши́те фу́нкцию и изобрази́те её гра́фик.

а) $y = (x-1)^{\frac{1}{2}} + 1$; б) $y = (x-1)^{\frac{3}{2}} + 1$;

в) $y = -(x-1)^{\frac{3}{4}} + 1$; г) $y = -(x-1)^{\frac{5}{4}} + 1$;

д) $y = (-x+1)^{\frac{1}{2}} + 1$; е) $y = (-x+1)^{\frac{3}{2}} + 1$.

Степенна́я фу́нкция с дро́бным отрица́тельным показа́телем $y = x^{\frac{p}{q}}$, где $\frac{p}{q}$ – несократи́мая дробь, $\frac{p}{q} < 0$

***p* и *q* – нечётные числа**

Область определе́ния $D(f) = (-\infty;\, 0) \cup (0;\, \infty)$.

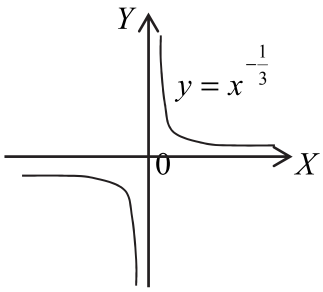
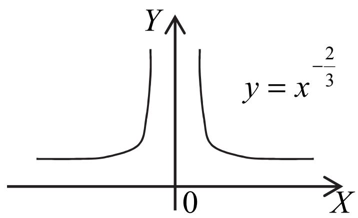


График фу́нкции – гипе́рбола нечётного поря́дка.
То́чка (0; 0) – центр симме́трии.
Фу́нкция убывает во всей о́бласти определе́ния.

***p* – чётное число, *q* – нечётное число**



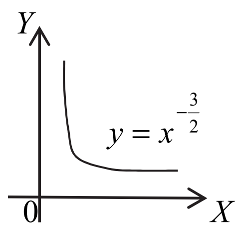
Гра́фик фу́нкции – гипе́рбола чётного поря́дка.
Пряма́я $x = 0$ – ось симме́трии.
Фу́нкция возраста́ет в $(-\infty;\, 0)$ и убыва́ет в $(0;\, \infty)$

Гра́фик фу́нкции прохо́дит че́рез то́чку (1;1).

***p* – нечётное число, *q* – чётное число**

Область определе́ния $D(f) = (0;\, \infty)$.
Гра́фик фу́нкции – ветвь гипе́рболы.

Фу́нкция убыва́ет во всей о́бласти определе́ния.
Гра́фик фу́нкции прохо́дит че́рез то́чку (1;1).



Задание 6. Опиши́те фу́нкцию и изобрази́те её гра́фик.

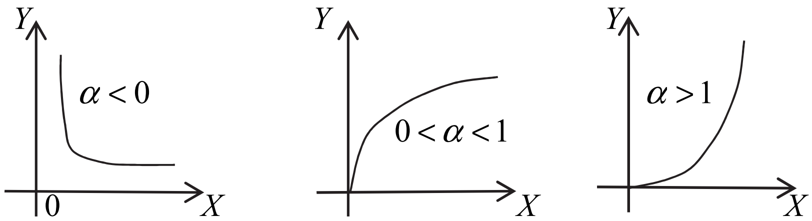
а) $y=(x-1)^{-\frac{1}{3}}+1$; б) $y=(x-1)^{-\frac{2}{3}}+1$;

в) $y=(x-1)^{-\frac{3}{4}}+1$; г) $y=-(x-1)^{-\frac{5}{3}}+1$;

д) $y=-(x-1)^{-\frac{4}{3}}+1$; е) $y=-(x-1)^{-\frac{3}{2}}+1$.

Степенна́я фу́нкция с действи́тельным показа́телем

Если $x > 0$, то степенна́я фу́нкция $y=x^{\alpha}$, где $\alpha \in R$, име́ет вид:



Фу́нкция ни чётная, ни нечётная.
Гра́фик фу́нкции прохо́дит че́рез то́чку (1; 1).

Задание 7. Опиши́те фу́нкцию и изобрази́те её гра́фик.

а) $y=(x-1)^{\sqrt{2}}+1$; б) $y=(x-1)^{\frac{\sqrt{2}}{2}}+1$;

в) $y=(x-1)^{-\sqrt{2}}+1$.

Занятие 35.

ПОКАЗАТЕЛЬНАЯ ФУНКЦИЯ

Определе́ние. Фу́нкция ви́да $y = a^x$, $a > 0$, $a \neq 1$ называ́ется показа́тельной фу́нкцией.

Сво́йства показа́тельной фу́нкции $y = a^x$ при $a > 1$

1. Область определе́ния $D(f) = R$ – все действи́тельные чи́сла.

2. Мно́жество значе́ний $E(f) = R^+$ – все положи́тельные чи́сла.

3. Если $x = 0$, то $y = 1$.

4. Если $x > 0$, то $y > 1$, если $x < 0$, то $0 < y < 1$.

Доказа́тельство Пусть $x = \dfrac{m}{n} > 0$, тогда́ $a^{\frac{m}{n}} = \sqrt[n]{a^m}$. Так как $a > 1$, то $a^m > 1$ и $\sqrt[m]{a^n} > 1$. Ита́к, е́сли $x > 0$, то $a^x > 1$. Если $x = \dfrac{m}{n} < 0$, то $a^{\frac{m}{n}} = \dfrac{1}{a^{-\frac{m}{n}}} < 1$.

5. Фу́нкция возраста́ет во всей о́бласти определе́ния.

Доказа́тельство. Рассмо́трим ра́зность $\Delta y = y_2 - y_1 = a^{x_2} - a^{x_1}$, где $x_2 > x_1$. Выно́сим a^{x_1} за ско́бки, получим $\Delta y = a^{x_1}\left(a^{x_2 - x_1} - 1\right)$. Так как $x_2 - x_1 > 0$, то $a^{x_2 - x_1} > 1 \Rightarrow$ $\Delta y = y_2 - y_1 > 0$. Фу́нкция возраста́ющая.
(Δ – чита́ется «де́льта» (бу́ква гре́ческого алфави́та). $\Delta y = y_2 - y_1$ - приращéние фу́нкции).

6. Если $x \to -\infty$, то $a^x \to 0$. Если $x \to \infty$, то $a^x \to \infty$.
Ось OX – ле́вая горизонта́льная асимпто́та.

Гра́фик фу́нкции – показа́тельная крива́я и́ли экспоне́нта (рис. 1).

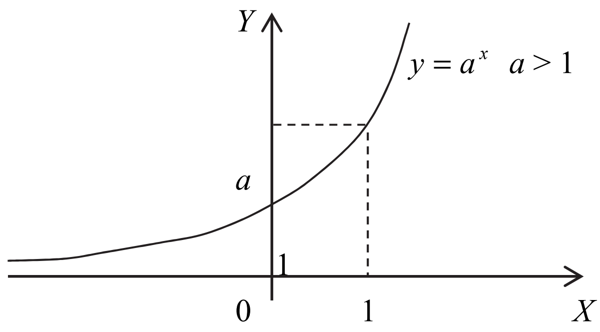


Рис. 1.

Сво́йства показа́тельной фу́нкции $y = a^x$ при $0 < a < 1$

1. Область определе́ния $D(f) = R$ – все действи́тельные чи́сла.

2. Мно́жество значе́ний $E(f) = R^+$.

3. Если $x = 0$, то $y = 1$.

4. Если $x > 0$, то $0 < y < 1$, если $x < 0$, то $y > 1$.

Доказа́тельство. Пусть $x = \dfrac{m}{n} > 0$, тогда́ $a^{\frac{m}{n}} = \sqrt[n]{a^m}$. Так как $0 < a < 1$, то $a^m < 1$ и $\sqrt[m]{a^n} < 1$. Ита́к, е́сли $x > 0$, то $a^x < 1$. Если $x = \dfrac{m}{n} < 0$, то $a^{\frac{m}{n}} = \dfrac{1}{a^{-\frac{m}{n}}} > 1$.

5. Фу́нкция убыва́ет во всей о́бласти определе́ния.

Доказа́тельство. Рассмо́трим ра́зность $\Delta y = y_2 - y_1 = = a^{x_2} - a^{x_1}$, где $x_2 > x_1$. Выно́сим a^{x_1} за ско́бки, полу́чим $\Delta y = a^{x_1}\left(a^{x_2 - x_1} - 1\right)$. Так как $x_2 - x_1 > 0$, то $a^{x_2 - x_1} < 1 \Rightarrow$ $\Delta y = y_2 - y_1 < 0$. Фу́нкция убыва́ющая.

6. Если $x \to \infty$, то $a^x \to 0$. Если $x \to -\infty$, то $a^x \to \infty$. Ось OX – пра́вая горизонта́льная асимпто́та.

График функции – показательная кривая или экспонента (рис. 2).

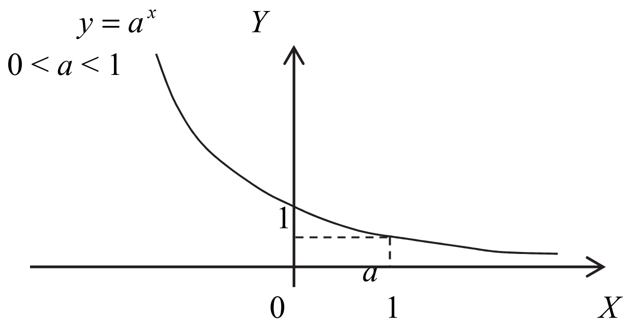


Рис. 2.

Упражнение 1. Изобразите график функции $y = e^x$ ($e \approx 2{,}7$).

Это показательная функция с основанием большим, чем 1. Следовательно, функция возрастает. График функции – экспонента.
Если $x = 0$, то $y = 1$.
Если $x = 1$, то $y = e$ (рис. 3).

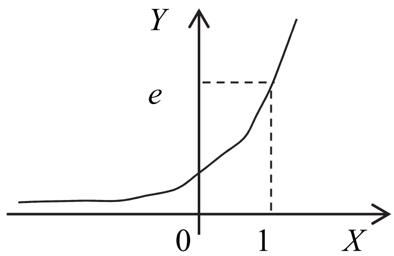


Рис. 3.

Упражнение 2. Изобразите график функции $y = 2^x$.

Это показательная функция с основанием большим, чем 1. Следовательно, функция возрастающая.
График функции – экспонента.
Если $x = 0$, то $y = 1$.
Если $x = 1$, то $y = 2$ (рис. 4).

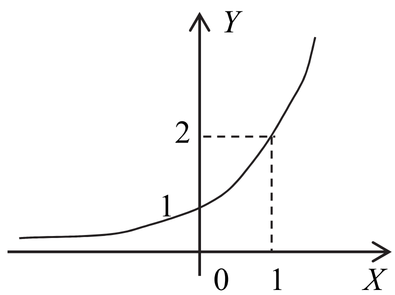


Рис. 4.

Упражнение 3. Изобрази́те гра́фик фу́нкции $y = \left(\frac{1}{2}\right)^x$.

Это показа́тельная фу́нкция
с основа́нием ме́ньшим, чем 1
Сле́довательно, фу́нкция
убыва́ющая.
Гра́фик фу́нкции – экспоне́нта.
Если $x = 0$, то $y = 1$.
Если $x = 1$, то $y = 1/2$ (рис. 5).

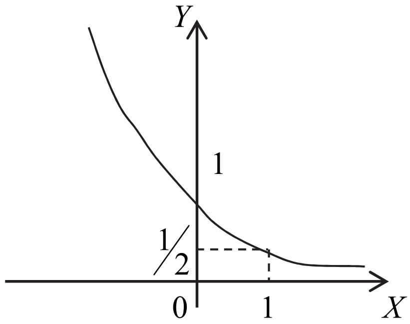


Рис. 5.

Задание 1. Изобрази́те гра́фик фу́нкции.

а) $y = 3^{-x}$; б) $y = 2^{x-1}$; в) $y = \left(\frac{1}{3}\right)^x$;

г) $y = \left(\frac{1}{3}\right)^{-x+1}$; д) $y = 0,2^{|x|}$; е) $y = 2^{|1-x|}$.

Занятие 36.

ПОКАЗАТЕЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ

При реше́нии показа́тельных уравне́ний и нера́венств испо́льзуются сле́дующие то́ждества ($a > 0$, $a \neq 1$):

1. $a^{x_1} = a^{x_2} \iff x_1 = x_2$;
2. $a^{x_1} \cdot a^{x_2} = a^{x_1 + x_2}$;
3. $\dfrac{a^{x_1}}{a^{x_2}} = a^{x_1 - x_2}$;
4. $a^0 = 1$;
5. $a^x \cdot b^x = (ab)^x$, $(b > 0)$;
6. $\left(a^{x_1}\right)^{x_2} = a^{x_1 x_2}$.

Реше́ние уравне́ний ви́да $a^{f(x)} = b \ (a > 0)$

1. Если $b \le 0$, то $\varnothing$ (нет реше́ний).
2. Если $b > 0$, $a \ne 1$, то $f(x) = \log_a b$.
3. Если $b > 0$, $a = 1$, то $a^{f(x)} \equiv 1$. Сле́довательно, е́сли $b = 1$, то $x \in D(f)$; е́сли $b \ne 1$, то $\varnothing$.

Рассмо́трим приме́ры реше́ния показа́тельных уравне́ний аналоги́чного ти́па.

Пример 1. Реши́те уравне́ние $2^{x^2-5x+6} = 1$.

Реше́ние. Испо́льзуем то́ждество 4. Так как $1 = 2^0$, то $x^2 - 5x + 6 = 0$. Отсю́да $x_1 = 2$, $x_2 = 3$.

Отве́т: 2; 3.

Пример 2. Реши́те уравне́ние $\left(\frac{5}{9}\right)^{3x-7} = \left(\frac{9}{5}\right)^{7x-3}$.

Реше́ние. Так как $\frac{5}{9} = \left(\frac{9}{5}\right)^{-1}$, то уравне́ние перепишем в виде $\left(\frac{9}{5}\right)^{-3x+7} = \left(\frac{9}{5}\right)^{7x-3}$. Испо́льзуя то́ждество 1, полу́чим $-3x + 7 = 7x - 3$. Отсю́да $x = 1$.

Отве́т: 1.

Пример 3. Реши́те уравне́ние $0{,}125 \cdot 4^{2x-8} = \left(\frac{0{,}25}{\sqrt{2}}\right)^{-x}$.

Реше́ние. Перехо́дим к основа́нию 2. Полу́чим $\frac{1}{8} \cdot 2^{2(2x-8)} = \left(\frac{1}{4} \cdot 2^{-\frac{1}{2}}\right)^{-x}$.

Испо́льзуя то́ждества 2, 5, полу́чим $2^{-3+4x-16} = 2^{2,5x}$. Отсю́да полу́чим –3 + 4x – 16 = 2,5x $\Rightarrow$ $x = \dfrac{38}{3}$.

Отве́т: $\dfrac{38}{3}$.

Реше́ние показа́тельных уравне́ний с по́мощью вынесе́ния общего мно́жителя за скобку

Пример 4. Реши́те уравне́ние

$$7^{x+2} - \frac{1}{7}\cdot 7^{x+1} - 14\cdot 7^{x-1} + 2\cdot 7^{x} = 48.$$

Реше́ние. В ле́вой ча́сти уравне́ния выно́сим за ско́бку о́бщий мно́житель 7^{x-1}. Получаем

$$7^{x-1}\left(7^3 - \frac{1}{7}\cdot 7^2 - 14 + 2\cdot 7\right) = 48 \;\Leftrightarrow\; 7^{x-1}\left(7^3 - 7 - 14 + 14\right) = 48$$

$$\Leftrightarrow\; 7^{x-1}\left(7^3 - 7\right) = 48 \;\Leftrightarrow\; 7^{x-1}\cdot 48 = 48 \;\Leftrightarrow\; 7^{x-1} = 1 \Leftrightarrow x - 1 = 0$$

$\Rightarrow x = 1$.

Отве́т: 1.

Реше́ние показа́тельных уравне́ний, сводя́щихся к квадра́тным

Пример 5. Реши́те уравне́ние $4^x - 10\cdot 2^x\cdot 2^{-1} = 24$.

Реше́ние. Пусть $2^x = t, t > 0$, тогда́ $4^x = t^2$, и показа́тельное уравне́ние запи́шется в ви́де $t^2 - 5t - 24 = 0$ $\Rightarrow$ $t_1 = -3$ или $t_2 = 8$. Значе́ние $t_1 = -3$ не удовлетворя́ет усло́вию $t > 0$. Зна́чит $2^x = 8$ $\Leftrightarrow$ $2^x = 2^3$ $\Rightarrow x = 3$.

Отве́т: 3.

Пример 6. Решите уравнение $9^x + 6^x = 2\cdot 4^x$.

Решение. Разделим обе части уравнения на 4^x. Получим $\left(\frac{9}{4}\right)^x + \left(\frac{6}{4}\right)^x - 2 = 0 \;\Leftrightarrow\; \left(\frac{3}{2}\right)^{2x} + \left(\frac{3}{2}\right)^x - 2 = 0$. Обозначим $\left(\frac{3}{2}\right)^x = t, t > 0$. Имеем: $t^2 + t - 2 = 0$. Отсюда $t_1 = -2$ или $t_2 = 1$. Значение $t_1 = -2$ не удовлетворяет условию $t > 0$. $\left(\frac{3}{2}\right)^x = 1 \;\Leftrightarrow\; \left(\frac{3}{2}\right)^x = \left(\frac{3}{2}\right)^0 \;\Rightarrow\; x = 0.$

Ответ: 0.

Задание 1. Решите уравнение.

а) $27^{-1}\cdot 3^{2x} = 81$; б) $\sqrt{3}\cdot 3^{2x} = \frac{1}{9}$;

в) $4\cdot 2^x = 0{,}5^2$; г) $49\cdot 7^x = \frac{1}{7}$;

д) $\sqrt{5}\cdot 5^{3x} = \frac{1}{5}$; е) $2^{2x-1}\cdot 4^{x+1} = 64\cdot 8^{x-1}$.

Задание 2. Решите уравнение.

а) $4^{x-1} + 11\cdot 4^{x-2} = \frac{15}{16}$; б) $3^{x+3} + 8\cdot 3^{x+2} = 33$;

в) $7^x + 5\cdot 7^{x-2} = 378$; г) $5^x - 7\cdot 5^{x-2} = 90$;

д) $5^{x+1} - 12\cdot 5^{x-1} = 65$; *е)* $3^x - 2\cdot 3^{x-2} - 7^{x-2} - 2\cdot 7^{x-3} = 0$.

Задание 3. Решите уравнение.

а) $4^x + 3\cdot 2^{x+2} = 64$; б) $9^x - 75\cdot 3^{x-1} - 54 = 0$;

в) $4^x - 10\cdot 2^{x-1} - 24 = 0$; г) $3\cdot 5^{2x-1} - 2\cdot 5^{x-1} = 0{,}2$;

д) $7^x - 14\cdot 7^{-x} = 5$; е) $9^{x^2-1} - 36\cdot 3^{x^2-3} + 3 = 0$.

Задание 4. Решите уравнение.

а) $4\cdot 2^{2x} - 6^x = 18\cdot 3^{2x}$; б) $3\cdot 16^x + 2\cdot 81^x = 5\cdot 36^x$;

в) $64\cdot 9^x - 84\cdot 12^x + 27\cdot 16^x = 0$; г) $4\cdot 25^x - 9\cdot 20^x + 5\cdot 16^x = 0$;
д) $9^x + 6^x = 2^{2x+1}$; е) $3^{2x+4} + 45\cdot 6^x = 9\cdot 2^{2x+2}$.

Задание 5. Реши́те уравне́ние графи́чески.
а) $2^{-x} = 0,5x$; б) $(0,1)^x = x^2$; в) $2^{|x|} = x + 1$;
г) $2^{|1-x|} = \frac{1}{2^{-3}}$.

Занятие 37.

ПОКАЗАТЕЛЬНЫЕ НЕРАВЕНСТВА

При реше́нии показа́тельных нера́венств $a^{f(x)} > a^{g(x)}$, $a^{f(x)} < a^{g(x)}$ и $a^{f(x)} > b$, $a^{f(x)} < b$, где $b > 0$, испо́льзуем сво́йства степене́й, сво́йство моното́нности показа́тельной фу́нкции, а та́кже допусти́мые значе́ния для переме́нной x.

1. Если $a > 1$, то $a^{f(x)} > a^{g(x)} \Leftrightarrow f(x) > g(x)$, соответственно $a^{f(x)} < a^{g(x)} \Leftrightarrow f(x) < g(x)$. (Если основа́ние степене́й бо́льше 1, то при сравне́нии показа́телей знак нера́венства не изменя́ется.)

2. Если $0 < a < 1$, то $a^{f(x)} > a^{g(x)} \Leftrightarrow f(x) < g(x)$, соответственно $a^{f(x)} < a^{g(x)} \Leftrightarrow f(x) > g(x)$. (Если основа́ние степеней положительное число ме́ньше 1, то при сравне́нии показа́телей знак нера́венства изменя́ется на противополо́жный.)

Рассмо́трим приме́ры реше́ния показа́тельных нера́венств.

Пример 1. Реши́те нера́венство $5^{x-1} < 5^{2x}$.

Решение. Так как основа́ние сте́пени $a = 5 > 1$, то при сравне́нии показа́телей знак нера́венства сохраня́ется, т.е.
$x - 1 < 2x \Leftrightarrow x > -1$.

Отве́т: $(-1; \infty)$.

Пример 2. Реши́те нера́венство $\left(\frac{1}{5}\right)^{\frac{2x+1}{1-x}} > \left(\frac{1}{5}\right)^{-3}$.

Реше́ние. Так как основа́ние степени $a = \frac{1}{5} < 1$, то при сравне́нии показа́телей знак нера́венства изменяе́тся на противоположный, т.е $\frac{2x+1}{1-x} < -3 \Leftrightarrow \frac{2x+1}{1-x} + 3 < 0 \Leftrightarrow \frac{x-4}{x-1} < 0$ $\Rightarrow x \in (1; 4)$.

Отве́т: $(1; 4)$.

Пример 3. Реши́те нера́венство $5^{2x+1} > 5^x + 4$.

Реше́ние. Да́нное нера́венство запи́шем в ви́де $5 \cdot 5^{2x} > 5^x + 4$. Обозна́чим $5^x = t, t > 0$. Сде́лаем заме́ну переме́нной и полу́чим систе́му нера́венств $\begin{cases} 5t^2 - t - 4 > 0, \\ t > 0 \end{cases} \Leftrightarrow$

$\begin{cases} 5(t-1)\left(t + \frac{4}{5}\right) > 0, \\ t > 0. \end{cases} \Leftrightarrow t > 1$. Выполнив обратную замену, получим $5^x > 1 \Leftrightarrow 5^x > 5^0 \Rightarrow x > 0$.

Отве́т: $(0; \infty)$.

Задание 1. Реши́те нера́венство.

а) $2^{3-6x} > 1$; б) $16^x > 0{,}125$; в) $\left(\frac{1}{3}\right)^{\sqrt{x+2}} > \left(\frac{1}{3}\right)^x$;

г) $2^{x+2} - 2^{x+1} + 2^{x-1} - 2^{x-2} \le 9$; д) $(0{,}2)^{\frac{2x-3}{x-2}} > 5$;

е) $\left(\frac{1}{3}\right)^{\sqrt{x+2}} > 3^{-x}$; ж) $2^x + 2^{-x} - \frac{5}{2} < 0$; з) $2^{1-2^{\frac{1}{x}}} < 0{,}125$;

и) $5^{2\sqrt{x}} + 5 > 5^{\sqrt{x}+1} + 5^{\sqrt{x}}$; к) $(0{,}5)^x \le (0{,}25)^{x^2}$.

Задание 2. Реши́те нера́венство.

а) $5^{25x+1} \le 25^{5x-1}$; б) $2\cdot 3^{x+3}+7\cdot 3^{x-2}\ge 493$;

в) $3\cdot 4^x+2\cdot 9^x\le 5\cdot 6^x$; г) $\left(\sqrt[3]{3-\sqrt{8}}\right)^x+\left(\sqrt[3]{3+\sqrt{8}}\right)^x\ge 6$;

д) $5^{3x}+5^{3(1-x)}+15\left(5^x+5^{1-x}\right)\ge 216$;

е) $\left(\dfrac{1}{27}\right)^{x^2+1}\le\left(\dfrac{1}{9}\right)^{8x-x^2}$.

Задание 3. Реши́те нера́венство графи́чески.

а) $\left|2^{|x|}-1\right|\le 1-|x|$; б) $\left(\dfrac{1}{2}\right)^{x^2}>2^{-2}$; в) $\left(\dfrac{1}{2}\right)^{\frac{1}{x^2}}\le 2^{-2}$;

г) $2^{x-|x|}\le (x-1)^2$; д) $2^{1-x^2}>1$; е) $2^{1/x}\le x+1$;

ж) $2^{x^2-1}\le\dfrac{1}{2}$.

Заня́тие 38.

ЛОГАРИФМЫ И ИХ СВОЙСТВА

Определе́ние. Если $a^x=N,\ 0<a\ne 1,\ N>0$, то показа́тель сте́пени x называ́ется логари́фмом числа́ N по основа́нию a и обознача́ется $x=\log_a N \Leftrightarrow a^x=N$.

$\log_a N$ чита́ется логари́фм “эн” по основа́нию “a”.

В выраже́нии $\log_a N$ всегда́ $a>0,\ a\ne 1,\ N>0$.

Примеры.

1. $\log_3 9=2 \Leftrightarrow 3^2=9$.
2. $\log_2 16=4 \Leftrightarrow 2^4=16$.

Утвержде́ние. Из определе́ния логари́фма $x = \log_a N$ $\Leftrightarrow$ $a^x = N$ сле́дует основно́е логарифми́ческое то́ждество $a^{\log_a N} = N$.

Примеры.
1) $7^{\log_7 49} = 49$; 2) $3^{\log_3 5} = 5$; 3) $2^{\log_2 x} = x, x > 0$.

Сво́йства логари́фмов

1. $\log_a 1 = 0 \Leftrightarrow a^0 = 1$.

2. $\log_a a = 1 \Leftrightarrow a^1 = a$.

3. Если $x_1 > 0, x_2 > 0$**,** то $\log_a (x_1 x_2) = \log_a x_1 + \log_a x_2$**.**

Доказательство. $x_1 = a^{\log_a x_1}$, $x_2 = a^{\log_a x_2}$. По сво́йству степе́ни $x_1 x_2 = a^{\log_a x_1} \cdot a^{\log_a x_2} = a^{\log_a x_1 + \log_a x_2}$. По определе́нию логари́фма $\log_a (x_1 x_2) = \log_a x_1 + \log_a x_2$. Что и тре́бовалось доказа́ть.

Примеча́ние. Если $x_1 < 0, x_2 < 0$, то $x_1 x_2 > 0 \Rightarrow$ $\log_a (x_1 x_2)$ существу́ет и $\log_a (x_1 x_2) = \log_a |x_1| + \log_a |x_2|$.

4. Если $x_1 > 0, x_2 > 0$**,** то $\log_a \dfrac{x_1}{x_2} = \log_a x_1 - \log_a x_2$.

Доказа́тельство. $x_1 = a^{\log_a x_1}$, $x_2 = a^{\log_a x_2}$. По сво́йству сте́пени $\dfrac{x_1}{x_2} = a^{\log_a x_1 - \log_a x_2}$. По определе́нию логари́фма $\log_a \dfrac{x_1}{x_2} = \log_a x_1 - \log_a x_2$. Что и тре́бовалось доказа́ть.

5. Если $x > 0$, то $\log_a x^\alpha = \alpha \log_a x$.

*Доказа́тельство***.** $x = a^{\log_a x}$, $x^\alpha = a^{\alpha \log_a x}$. По определе́нию логари́фма $\log_a x^\alpha = \alpha \log_a x$. Ч.т.д.

Примеча́ние. Если $\alpha = 2k$ – чётное число́ и $x \neq 0$, то $\log_a x^{\alpha} = \alpha \log_a |x|$. Если $\alpha = 2k+1$ – нечётное число́ и $x > 0$, то $\log_a x^{\alpha} = \alpha \log_a x$.

6. Перехо́д к друго́му основа́нию логари́фма.

$$\log_a N = \frac{\log_b N}{\log_b a},\ b > 0,\ b \neq 1,\ a > 0,\ a \neq 1.$$

Доказа́тельство. Име́ем $N = a^{\log_a N}$ – основно́е логарифми́ческое то́ждество. Нахо́дим логари́фм от обе́их часте́й ра́венства по основа́нию *b*. Име́ем $\log_b N = \log_b a^{\log_a N}$, и́ли (по сво́йству 5) $\log_b N = \log_a N \cdot \log_b a$, отсю́да $\log_a N = \dfrac{\log_b N}{\log_b a}$.

Логари́фмы по основа́нию 10 называ́ются десяти́чными логари́фмами и обознача́ются $\log_{10} N = \lg N$. Чита́ется: десяти́чный логари́фм “эн”.

Логари́фмы по основа́нию *e* (*e* = 2,718… – иррациона́льное число́) называ́ются натура́льными логари́фмами и обознача́ются $\log_e N = \ln N$. Чита́ется: натура́льный логари́фм “эн”.

Логарифми́рование и потенци́рование

Нахожде́ние логари́фма числа́ называ́ется логарифми́рованием.

Пример. Прологарифми́руйте выраже́ние $x = a^2 b^{-\frac{1}{2}}$ по основа́нию *e*.

Реше́ние.

$$\ln x = \ln\left(a^2 b^{-\frac{1}{2}}\right) = \ln a^2 + \ln b^{-\frac{1}{2}} = 2\ln a - \frac{1}{2}\ln b.$$

Де́йствие нахожде́ния числа́ по да́нному логари́фму называ́ется потенци́рованием.

Логарифми́рование	Потенци́рование
$\log_a(x_1x_2)=\log_a\lvert x_1\rvert+\log_a\lvert x_2\rvert$ $x_1\cdot x_2>0$	$\log_a x_1+\log_a x_2=\log_a(x_1x_2)$ $x_1>0,\ x_2>0$
$\log_a\dfrac{x_1}{x_2}=\log_a\lvert x_1\rvert-\log_a\lvert x_2\rvert$ $\dfrac{x_1}{x_2}>0$	$\log_a x_1-\log_a x_2=\log\dfrac{x_1}{x_2}$ $x_1>0,\ x_2>0$
$\log_a x^\alpha=\alpha\log_a\lvert x\rvert$ е́сли $\alpha=2k$ – чётное число́ и $x\neq 0$ е́сли $\alpha=2k+1$ – нечётное число́, тогда $\log_a x^\alpha=\alpha\log_a x$, $x>0$, $k\in N$.	$\alpha\log_a x=\log_a x^\alpha$, $x>0$.

Пример. Найди́те *N*, е́сли $\ln N=2\ln 3+\ln 2-\dfrac{1}{2}\ln 4$.

Реше́ние. $\ln N=\ln 3^2+\ln 2-\ln 4^{\frac{1}{2}}=\ln\dfrac{9\cdot 2}{\sqrt{4}}=\ln 9\Rightarrow N=9.$

Задание 1. Прологарифми́руйте выраже́ние по основа́нию *e*.

а) $y=e^2\cdot x$; б) $y=\sqrt{\dfrac{x\sqrt{x}}{\sqrt[3]{x}}}$; в) $y=a^2b^3$;

г) $x=\dfrac{5a^2}{b^3}$; д) $y=\sqrt[3]{a\sqrt{a}}$; е) $y=x^{1+\ln x}$;

ж) $y=\dfrac{x}{e^3}$; з) $y=\dfrac{e^{3\ln x}}{x}$.

Задание 2. Пропотенци́руйте выраже́ние.

а) $\ln y=2\ln x+\ln(x-3)$; б) $\ln y=\ln x+2$;

в) $\ln y=0{,}5\ln x$; г) $\ln y=\dfrac{1}{2}\ln x-\dfrac{1}{3}\ln(x+2)$;

д) $\ln y = \frac{3}{4}(\ln x - \ln 4)$; е) $\ln y = \frac{1}{2}(\ln 5 + \ln x - 2\ln 3)$;

ж) $\ln y = \ln x \cdot \ln x$; з) $\ln y = (\ln x + 1) \cdot \ln x$.

Задание 3. Найди́те x.

а) $\lg x = \lg 3 + \lg 4$; б) $\lg x = 2\lg 2 - \lg 3$;

в) $\lg x = \frac{1}{2}\lg 9 + \lg 7 - \lg 21$; г) $\log_2 x = \log_2 5 - \log_2 7$;

д) $\lg x = \frac{1}{3}(\lg 8 - \lg 27 - \lg 125)$; е) $\lg x = 2\lg 9 - \frac{2}{3}\lg 81 + \frac{1}{2}\lg 36$;

ж) $\log_3 x = 2\log_3 5 + 1$; з) $\log_2 x = \log_2 6 - 2$;

и) $\log_3 x = \log_3 5 - \log_{\frac{1}{3}} 7$; к) $\log_2 x = 2\log_2 3 + \log_{\frac{1}{2}} 9$.

Задание 4. Вы́числите.

а) $\log_{\sqrt{3}} 18 - \log_3 4$; б) $9^{\log_3 2}$; в) $7^{\log_7 3}$;

г) $\left(\frac{1}{10}\right)^{\lg 15}$; д) $4^{\log_2 \sqrt{7}}$; е) $2^{\log_4 36 - 1}$.

Занятие 39.

ЛОГАРИФМИЧЕСКАЯ ФУНКЦИЯ

Определение. Фу́нкция $y = \log_a x$, где $a > 0$, $a \neq 1$ называ́ется логарифми́ческой фу́нкцией.

1. Область определе́ния $D(f) = (0; \infty)$.
2. Мно́жество значе́ний $E(f) = R$.
3. Нуль фу́нкции: $y(1) = \log_a 1 = 0 \iff x = 1$.
4. При $a > 1$, фу́нкция возраста́ющая; при $0 < a < 1$, фу́нкция убыва́ющая.

5. Если $a > 1$ и $0 < x < 1$, то $\log_a x < 0$; е́сли $a > 1$ и $x > 1$, то $\log_a x > 0$; е́сли $0 < a < 1$ и $0 < x < 1$, то $\log_a x > 0$; е́сли $0 < a < 1$ и $x > 1$, то $\log_a x < 0$;

6. $\log_a a = 1$.

7. Ось OY – вертика́льная асимпто́та.

Построи́м гра́фики фу́нкций $y = \log_2 x$ $(a = 2 > 1)$ (рис. 1) и $y = \log_{\frac{1}{2}} x$ $(a = \frac{1}{2} < 1)$ (рис. 2).

Предвари́тельно соста́вим табли́цу:

x	$\frac{1}{8}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{2}$	1	2	4	8	16	32
$\log_2 x$	-3	-2	-1	0	1	2	3	4	5
$\log_{\frac{1}{2}} x$	3	2	1	0	-1	-2	-3	-4	-5

$y = \log_2 x$

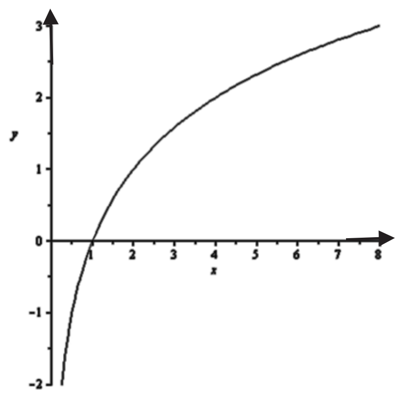


Рис. 1.

$y = \log_{\frac{1}{2}} x$

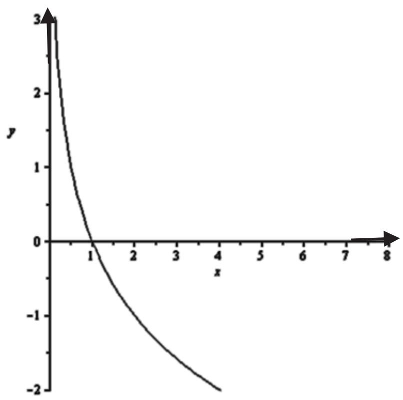


Рис. 2.

Иссле́дование фу́нкции $y = \log_a (kx + b)$

1. Область определе́ния фу́нкции определя́ется реше́нием нера́венства $kx + b > 0$.

$$D(f) = \begin{cases} \left(-\dfrac{b}{k};\, \infty\right), \text{ если } k > 0, \\ \left(-\infty;\, -\dfrac{b}{k}\right), \text{ если } k < 0. \end{cases}$$

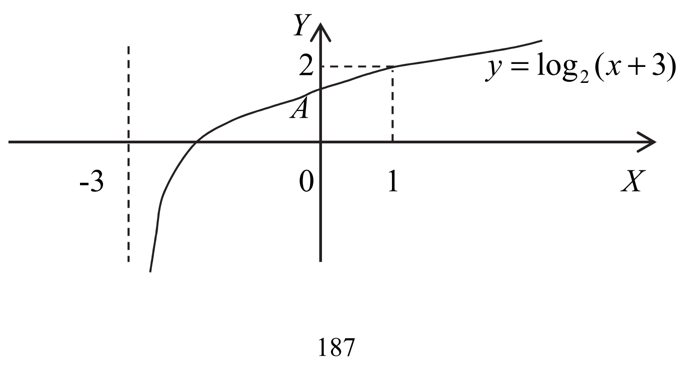
2. Нуль фу́нкции определя́ется реше́нием уравне́ния $kx + b = 1$. Нуль фу́нкции $x = \dfrac{1-b}{k}$.

3. $x = -\dfrac{b}{k}$ – вертика́льная асимпто́та.

4. Найдём ещё одну точку. Например, $kx + b = a$, $y = \log_a a = 1$.

Пример. Изобрази́те эски́з гра́фика фу́нкции $y = \log_2 (x + 3)$.

1. $D(f) = (-3;\, \infty)$.
2. $x = -3$ – вертика́льная асимпто́та.
3. Нуль фу́нкции: {-2}.
4. $x = 1$, $y = \log_2 4 = 2$. Точка (1; 2) принадлежи́т гра́фику.
5. След на оси́ OY: точка $A(0;\, \log_2 3)$, т.е. е́сли $x = 0$, то $y = \log_2 3$.



Задание. Изобрази́те эски́з гра́фика фу́нкции.

а) $y = \log_3(x+4)$; б) $y = \lg(4-x)$;

в) $y = \log_{\frac{1}{2}}(2x-1)$; г) $y = \log_2(3-2x)$.

Занятие 40.

ЛОГАРИФМИЧЕСКИЕ УРАВНЕНИЯ

Реше́ние уравне́ний ме́тодом, кото́рый осно́ван на определе́нии логари́фма

Пример. Реши́те уравне́ние $\log_3\left(5+4\log_3(x-1)\right)=2$.

Реше́ние. Из определе́ния логари́фма сле́дует $5+4\log_3(x-1)=3^2 \Leftrightarrow 4\log_3(x-1)=9-5 \Leftrightarrow \log_3(x-1)=1$ $\Leftrightarrow x-1=3 \Rightarrow x=4$.

Отве́т: 4.

Реше́ние уравне́ний потенци́рованием

Пример. Реши́те уравне́ние $\log_3(x+1)+\log_3(x+3)=1$.

Реше́ние. Нахо́дим о́бласть определе́ния уравне́ния, реша́я систе́му нера́венств $\begin{cases} x+1>0, \\ x+3>0 \end{cases} \Rightarrow x>-1$.

Из сво́йства логари́фмов име́ем $\log_3(x+1)(x+3)=1$. По определе́нию логари́фма име́ем $(x+1)(x+3)=3 \Leftrightarrow$ $x^2+4x=0 \Leftrightarrow x(x+4)=0 \Rightarrow x_1=-4$ или $x_2=0$. Так как $x_1=-4$ не принадлежи́т о́бласти определе́ния, то $x=0$ – еди́нственный ко́рень уравне́ния.

Отве́т: 0.

Реше́ние уравне́ний логарифми́рованием

Пример. Реши́те уравне́ние $x^{1+\ln x} = ex$.

Реше́ние. Область определе́ния уравне́ния $x > 0$. Логарифми́руем обе ча́сти уравне́ния по основа́нию *e*. Име́ем $(1+\ln x)\cdot \ln x = \ln e + \ln x$. Обозна́чим $\ln x = t$. Тогда́ уравне́ние при́мет вид: $t^2 + t = 1 + t \ \Rightarrow\ t^2 = 1 \ \Rightarrow\ t_1 = -1, t_2 = 1$. Отсю́да $\ln x = -1$, т.е. $x = e^{-1} = \dfrac{1}{e}$ и́ли $\ln x = 1$, т.е. $x = e$.

Отве́т: $\dfrac{1}{e}; e$.

Ме́тод заме́ны переме́нной

Пример. Реши́те уравне́ние $(\ln x)^2 - \ln x^3 + 2 = 0$.

Реше́ние. Обозна́чим $\ln x = t$. Тогда́ да́нное уравне́ние принима́ет вид: $t^2 - 3t + 2 = 0 \ \Rightarrow\ t_1 = 1$ и́ли $t_2 = 2$.
Отсю́да $\ln x = 1$, т.е. $x = e$, или $\ln x = 2$, т.е. $x = e^2$.

Отве́т: e; e^2.

Перехо́д к друго́му основа́нию

Приме́р. Реши́те уравне́ние $\log_5 x + \log_x 25 = 3$.

Реше́ние. Область определе́ния уравне́ния $x > 0$, $x \neq 1$. По фо́рмуле перехо́да к друго́му основа́нию име́ем $\log_x 25 = \dfrac{\log_5 25}{\log_5 x} = \dfrac{2}{\log_5 x}$. Обозна́чим $\log_5 x = t$, $t \neq 0$. Тогда́ да́нное уравне́ние бу́дет име́ть вид $t + \dfrac{2}{t} = 3$, $\Leftrightarrow$ $t^2 - 3t + 2 = 0$. Отку́да $t_1 = 1$ и $t_2 = 2$. Сде́лаем обра́тную подстано́вку. $\log_5 x = 1 \Rightarrow x = 5$ и́ли $\log_5 x = 2 \ \Leftrightarrow\ x = 25$.

Отве́т: 5; 25.

Задание 1. Реши́те уравне́ние.

а) $\log_{\sqrt{2}}(x^2-3x)=4$; б) $\log_{\frac{1}{3}}(x^2+8x)=-2$;

в) $\log_{\frac{1}{4}}(x^2+6x)=-2$; г) $\log_2(3-\log_3(x-2))=0$;

д) $\log_3\left(5+4\log_2(x-1)\right)=2$;

е) $\log_2(\log_{\frac{1}{2}}(2x-1)+\log_2 4)=1$; ж) $\log_x(2x+3)=2$;

з) $\log_{x+1}\left(3x^2+2x-1\right)=2$;

и) $\ln\sqrt{x-9}+\ln\sqrt{2x-1}=\ln 10$; к) $\ln(x+1{,}5)=-\ln x$;

л) $\ln(5-x)+2\ln\sqrt{3-x}=\ln 10$;

м) $\log_2(3-x)+\log_2(1-x)=3$.

Задание 2. Реши́те уравне́ние.

а) $x^{\log_3 x}=9$; б) $x^{1+\lg x}=10x$; в) $x^{\frac{\ln x+7}{4}}=e^{\ln x}$;

г) $5^x=7$; д) $2^{x+1}=3$; е) $9^{\log_3(1-2x)}=5x^2-5$.

Задание 3. Реши́те уравне́ние.

а) $(\ln x)^2-\ln x^3+2=0$; б) $\lg x+\dfrac{4}{\lg x}-4=0$;

в) $\log_3^2 x-4\log_3 x+3=0$; г) $3\ln x^2-\ln^2 x=9$.

Задание 4. Реши́те уравне́ние.

а) $\lg^2(100x)+\lg^2(10x)-14=\lg\dfrac{1}{x}$;

б) $2\log_4(4-x)=4-\log_2(-2-x)$;

в) $\log_{16}x+\log_4 x+\log_2 x=7$;

г) $1+2\log_{x+2}5=\log_5(x+2)$;

д) $\log_3\left(3^x-8\right)=2-x$;

е) $\log_{x-1}3=2$.

Занятие 41.
ЛОГАРИФМИЧЕСКИЕ НЕРАВЕНСТВА

Утверждение. Логарифми́ческая фу́нкция $y = \log_a x \;\; (a > 0,\, a \neq 1,\, x > 0)$ при 0 < a <1 убыва́ющая, при a > 1 возраста́ющая. (Докажи́те э́то утвержде́ние само-стоя́тельно.)

Поэ́тому нера́венство ви́да $\log_a f(x) < \log_a g(x)$ при 0 < a <1 равноси́льно системе $\begin{cases} f(x) > g(x), \\ g(x) > 0, \end{cases}$ а при a > 1 равноси́льно систе́ме $\begin{cases} f(x) < g(x), \\ f(x) > 0. \end{cases}$

Нера́венство ви́да $\log_a f(x) > \log_a g(x)$ при 0 < a <1 равноси́льно системе $\begin{cases} f(x) < g(x), \\ f(x) > 0, \end{cases}$ а при a > 1 равноси́льно систе́ме $\begin{cases} f(x) > g(x), \\ g(x) > 0. \end{cases}$

Рассмо́трим реше́ние не́которых логарифми́ческих нера́венств.

Пример 1. Реши́те нера́венство $\log_{\frac{1}{3}} \dfrac{2-3x}{x} \geq -1$.

Реше́ние. Так как $\log_{\frac{1}{3}} 3 = -1$, то да́нное нера́венство мо́жно записа́ть в ви́де $\log_{\frac{1}{3}} \dfrac{2-3x}{x} \geq \log_{\frac{1}{3}} 3$. Это нера́венство равноси́льно систе́ме $\begin{cases} \dfrac{2-3x}{x} > 0, \\ \dfrac{2-3x}{x} \leq 3. \end{cases}$ Во второ́м нера́венстве систе́мы изме́ним знак нера́венства на $\le$, так как основа́ние логари́фма $a=\frac{1}{3}<1$. Име́ем $\begin{cases} \dfrac{-3\left(x-\frac{2}{3}\right)}{x}>0, \\ \dfrac{-6\left(x-\frac{1}{3}\right)}{x}\le 0. \end{cases}$ Ка́ждое нера́венство реша́ем ме́тодом интерва́лов. Полу́чим о́бщее реше́ние систе́мы нера́венств $x\in\left[\frac{1}{3};\frac{2}{3}\right)$.

Отве́т: $\left[\frac{1}{3};\frac{2}{3}\right)$.

Пример 2. Реши́те нера́венство $\log_{0,5}(2-x)>-1$.

Реше́ние. Так как $\log_{0,5}2=-1$, то да́нное нера́венство мо́жно записа́ть так: $\log_{0,5}(2-x)>\log_{0,5}2$. Это нера́венство равноси́льно систе́ме нера́венств $\begin{cases} 2-x>0, \\ 2-x<2 \end{cases} \Rightarrow 0<x<2.$

Отве́т: (0; 2).

Пример 3. Решите нера́венство $\log_2(2x-1)>\log_2(3x-4)$.

Реше́ние. Да́нное нера́венство равноси́льно систе́ме нера́венств $\begin{cases} 2x-1>3x-4, \\ 3x-4>0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x<3, \\ x>\frac{4}{3} \end{cases} \Rightarrow x\in\left(\frac{4}{3};3\right).$

Отве́т: $\left(\frac{4}{3};3\right)$.

Пример 4. Реши́те нера́венство $\ln 3x < \ln(x+4)$.

Реше́ние. Да́нное нера́венство равноси́льно систе́ме нера́венств $\begin{cases} 3x < x+4, \\ 3x > 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x < 2, \\ x > 0 \end{cases} \Rightarrow x \in (0;\, 2)$.

Отве́т: $(0;\, 2)$.

Приме́р 5. Реши́те нера́венство $\log_{\frac{1}{5}} \dfrac{4x+6}{x} \geq 0$.

Реше́ние. Так как $\log_{\frac{1}{5}} 1 = 0$, то да́нное нера́венство мо́жно записа́ть так $\log_{\frac{1}{5}} \dfrac{4x+6}{x} \geq \log_{\frac{1}{5}} 1$. Это нера́венство равноси́льно систе́ме нера́венств

$$\begin{cases} \dfrac{4x+6}{x} > 0, \\ \dfrac{4x+6}{x} \leq 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \dfrac{4\left(x+\dfrac{3}{2}\right)}{x} > 0, \\ \dfrac{3(x+2)}{x} \leq 0 \end{cases} \Rightarrow x \in \left[-2;\, \frac{3}{2}\right).$$

Отве́т: $\left[-2;\, \dfrac{3}{2}\right)$.

Пример 6. Реши́те нера́венство $\log_{\frac{1}{3}} \log_{\frac{1}{2}} \dfrac{x+4}{2x-3} < 0$.

Реше́ние. Так как $\log_{\frac{1}{3}} 1 = 0$, то да́нное нера́венство мо́жно записа́ть так

$$\log_{\frac{1}{3}} \log_{\frac{1}{2}} \frac{x+4}{2x-3} < \log_{\frac{1}{3}} 1 \Leftrightarrow \log_{\frac{1}{2}} \frac{x+4}{2x-3} > 1 \Leftrightarrow$$

$$\log_{\frac{1}{2}}\frac{x+4}{2x-3} > \log_{\frac{1}{2}}\frac{1}{2} \Leftrightarrow \begin{cases}\dfrac{x+4}{2x-3} > 0,\\ \dfrac{x+4}{2x-3} < \dfrac{1}{2}\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}\dfrac{x+4}{2\left(x-\frac{3}{2}\right)} > 0,\\ \dfrac{11}{4\left(x-\frac{3}{2}\right)} < 0\end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\begin{cases}x-\dfrac{3}{2} < 0,\\ x+4 < 0\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}x < \dfrac{3}{2},\\ x < -4\end{cases} \Rightarrow x < -4.$$

Отве́т: (-∞; -4).

Задание 1. Реши́те нера́венство.

а) $\log_{0.5}(x-1) > -2$; б) $\log_{0,2}(-x) > -1$;

в) $\log_4(x+1) < 1$; г) $\log_{\frac{1}{2}}(1-x) > -1$;

д) $\log_{\frac{1}{5}}(x-5) > -2$; е) $\lg 3x < \lg(x+4)$;

ж) $\log_8(x^2-4x+3) \le 1$; з) $\log_{\frac{1}{4}}(2-x) > \log_{\frac{1}{4}}\frac{2}{x+1}$;

и) $\log_{\frac{1}{3}}(x+1) > \log_3(2-x)$; к) $\log_{\frac{1}{2}}(x+1) + 2\log_2(x+1) < 2$;

л) $\log_2 \log_{\sqrt{2}}(x+1) < 1$; м) $\ln \log_2(x-5) \ge 0$;

н) $\log_{\frac{1}{3}}\frac{3x-1}{x+2} < 1$; о) $2\log_8(x-2) - \log_8(x-3) > \frac{2}{3}$;

п) $\log_4(x+7) > \log_2(x+1)$; р) $\log_3 x + \log_{\sqrt{3}} x + \log_{\frac{1}{3}} x < 6$.

Задание 2. Решите следующее неравенство.

1) $3^{\frac{3-x}{3x-2}} < 0,5$;

2) $\lg\lg\frac{2-x}{2x-1} > 0$;

3) $\log_8\left(x^2-5x-6\right) > 1$;

4) $\frac{\lg^2 x + 2\lg x - 6}{\lg x} > 1$;

5) $\sqrt{\log_2\frac{2x-3}{x-2}} > 1$;

6) $\lg\sqrt{x^2-4x+3} - \lg\sqrt{x-1} > 0$;

7) $\log_{(4-x)}(2x-1,5) > 0$;

8) $(x+4)^{\log_3\left(x^2+2x-7\right)} > 1$;

9) $\log_{(x-2)}\left(x^2-8x+15\right) > 0$;

10) $\log_{\frac{x-1}{x-2}}\left(\sqrt{49-x^2}-1\right) \le 0$;

11) $\log_x\left(\log_2\left(4^x-12\right)\right) \ge 1$;

12) $\log_{3x^2+1} 2 < \frac{1}{2}$.

Задание 3. Решите графически неравенство.

1) $\lg(x-1) \le 1$;

2) $\log_{\frac{1}{2}} x > 0$;

3) $2\log_2 x \le x$;

4) $\log_4|x-1| \le 2$.

Задание 4. Найдите область определения функции.

1) $y = \lg\sqrt{x+1} - \frac{\sqrt{5-x}}{x-2,5}$;

2) $y = \sqrt{\log_{0.2}\frac{x-4}{x+9}}$;

3) $y = \sqrt{\log_{\frac{1}{2}}\log_3\frac{x+3}{x-3}}$;

4) $y = \sqrt{-\frac{\log_{0,5}|x-1|}{\sqrt{-x^2+2x+3}}}$;

5) $y=2^{\sqrt{|x-5|-|10-x|}}$; 6) $y=\sqrt{\log_{\frac{1}{5}}\log_5|x-5|}$;

7) $y=\lg\left(1-\lg\left(x^2-3x+2\right)\right)$; 8) $y=\sqrt{\log_{x-2}\left(x^2-8x+15\right)}$;

9) $y=\left(\log_4 x-\log_3 x\right)^{-\frac{1}{2}}$; 10) $y=\log_{100x}\left(\dfrac{2\lg x+1}{-x}\right)$.

Занятие 42.

УГЛЫ. ИЗМЕРЕНИЕ УГЛОВ. ЕДИНИЧНАЯ ОКРУЖНОСТЬ. ПОВОРОТ НА ЧИСЛО *t*

Углы. Измерение углов

Угол – это часть плоскости, которая находится между двумя лучами, включая и сами лучи.

На рис.1 изображён ***угол** AOB*.

Луч *OB* и луч *OA* – ***стороны*** угла *AOB*.

Точка *O* – ***вершина*** угла.

Обозначения углов: $\angle AOB$; $\angle O$; α. Читаем: угол *AOB*.

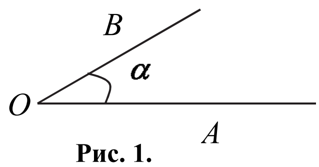


Рис. 1.

$0<\alpha<\dfrac{\pi}{2}\Rightarrow\angle AOB$ – острый угол (рис. 1).

острый угол 1. acute angle; 2. angle aigu;

3. ángulo agudo; 4. spitzer Winkel; 5. 钝角; 6.

$\dfrac{\pi}{2}<\alpha<\pi\ \Rightarrow\ \angle MON$ – тупой угол (рис. 1.1).

тупой угол 1. obtuse angle;

2. angle obtus; 3. ángulo obtuso;

4. stumpfer Winkel; 5. 钝角; 6.

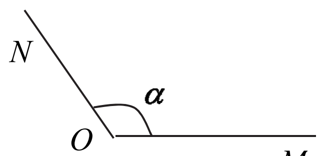


Рис. 1.1.

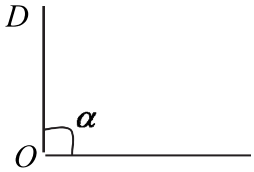


Рис. 1.2.

$\alpha = \dfrac{\pi}{2} \;\Rightarrow\; \angle COD$ – прямой угол (рис. 1.2).

прямой угол 1. right angle; 2. angle droit; 3. ángulo recto; 4. rechten Winkel; 5. 正确的角度; 6.

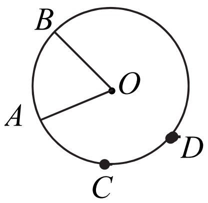


Рис. 2.

На рис. 2 изображена ***окружность***.
Точка O – ***центр*** окружности.
$OB = R$, $OA = R$ – ***радиусы*** окружности
$\angle AOB$ – ***центральный угол***.
Центральному углу $\angle AOB$ соответствует ***дуга окружности*** $\cup AB$. $\cup CD$ – дуга окружности.
Длина окружности: $C = 2\pi R$.

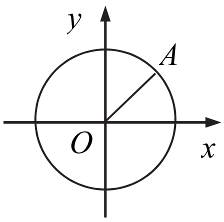


Рис. 3.

Окружность, у которой радиус равен единице ($R = 1$), называется ***единичной*** (рис. 3). $OA = 1$.

Уравнение единичной окружности с центром в начале координат: $x^2 + y^2 = 1$.

Длина единичной окружности: 2π.

единичная окружность 1. unit circle; 2. cercle unité; 3. circunferencia gonio; 4. einheit Kreis; métrica; 5. 单元圈; 6.

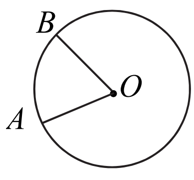


Рис. 4.

Углы измеряются в градусах и радианах.

Один градус (1°) – это центральный угол, которому соответствует дуга длиной $\dfrac{C}{360}$.

Один радиан (1 рад.) – это центральный угол, которому соответствует дуга длиной R (рис. 4).

$|\cup AB| = R$, $\angle AOB = 1$ радиан.

360° или 2π радиан.

180° или π радиан.

Угол a° содержит $\dfrac{a^\circ \cdot \pi}{180^\circ}$ радиан.

Угол α радиан содержит $\dfrac{\alpha \cdot 180^\circ}{\pi}$ градусов.

1 радиан содержит $\approx 57^\circ 17' 45''$.

a°	30°	45°	60°	90°	180°	270°	360°
α	$\dfrac{\pi}{6}$	$\dfrac{\pi}{4}$	$\dfrac{\pi}{3}$	$\dfrac{\pi}{2}$	π	$\dfrac{3\pi}{2}$	2π

Оси координат делят окружность на четыре четверти: I, II, III, IV (рис. 5).

Точка $P_\alpha(x_\alpha; y_\alpha)$ принадлежит единичной окружности (лежит на единичной окружности).
$\angle POM = \alpha$

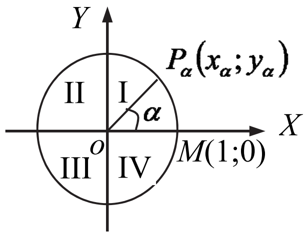


Рис. 5

Если $0 < \alpha < \dfrac{\pi}{2}$, то α – угол I четверти ($x_\alpha > 0$; $y_\alpha > 0$).

Если $\dfrac{\pi}{2} < \alpha < \pi$, то α – угол II четверти ($x_\alpha < 0$; $y_\alpha > 0$).

Если $\pi < \alpha < \dfrac{3\pi}{2}$, то α – угол III четверти ($x_\alpha < 0$; $y_\alpha < 0$).

Если $\dfrac{3\pi}{2} < \alpha < 2\pi$, то α – угол IV четверти ($x_\alpha > 0$; $y_\alpha < 0$).

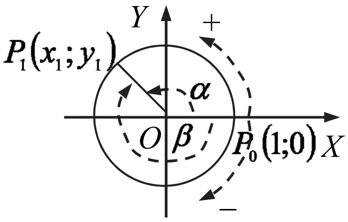


Рис. 6.

Рассмотрим поворот луча OP_0 на угол α (рис. 6):
$P_0(1;0) \rightarrow P_1(x_1;y_1)$.
Если поворот луча OP_0 против часовой стрелки, то $\alpha > 0$, если по часовой стрелке, то $\beta < 0$.

по часовой стрелке 1. clockwise; 2. dans le sens horaire; 3. en el mismo sentido de las manecillas;
4. im Uhrzeigesinn; 5. 顺时针; 6.
против часовой стрелки 1. conterclokwise; 2. antihoraire; 3. en contra de las manecillas;
4. gegen den Uhrzeigersinn; 5. 逆时针方向; 6.

Любому числу $\alpha \in R$ соответствует только одна точка единичной окружности $P_a : \forall \alpha \in R \rightarrow P_\alpha(x_\alpha; y_\alpha)$. Эта точка обладает следующим свойством: длина дуги P_0P_α равна α.

Поэтому можно говорить, что множество всех действительных чисел $(-\infty; +\infty)$ отображается на множество точек единичной окружности.

При повороте точки $P_0(1;0)$ на число α и на числа вида $\alpha + 2\pi n, n \in Z$, точка $P_0(1;0)$ отображается в точку $P_\alpha(x_\alpha; y_\alpha) = P_{\alpha+2\pi n}, n \in Z$. Таким образом, каждая точка P_α единичной окружности отображается на точки $\alpha,\ \alpha + 2\pi n, n \in Z$ числовой прямой.

На рис. 7 отмечены точки, на которые отображается точка $P_0(1;\ 0)$ при повороте на 0; $\frac{\pi}{6}$; $\frac{\pi}{4}$; $\frac{\pi}{3}$; $\frac{\pi}{2}$; $\frac{2\pi}{3}$; $\frac{3\pi}{4}$; $\frac{5\pi}{6}$; π, $\frac{7\pi}{6}$; $\frac{5\pi}{4}$; $\frac{4\pi}{3}$; $\frac{3\pi}{2}$; $\frac{5\pi}{3}$; $\frac{7\pi}{4}$; $\frac{11\pi}{6}$; 2π, $-\frac{\pi}{6}$; $-\frac{\pi}{4}$; $-\frac{\pi}{3}$.

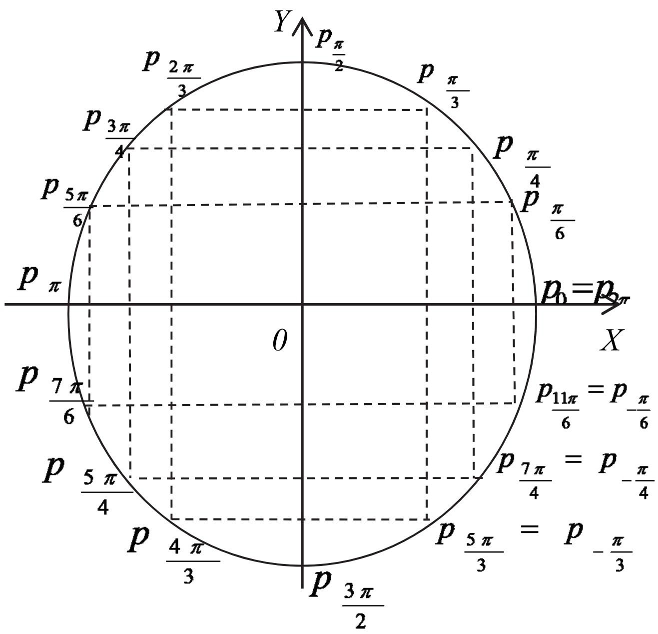


Рис. 7.

Эти точки можно отметить и на числовой прямой (рис. 8).

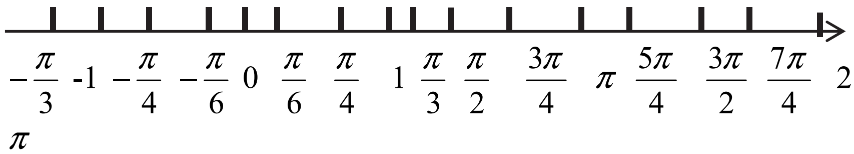


Рис. 8.

Задание 1.

а) Выразите в радианной мере величины углов: 120°; 135°; 150°; 210°; 225°; 240°; 300°; 330°.

б) Выразите в градусной мере величины углов: $\frac{3\pi}{10}$; $\frac{7\pi}{4}$; $\frac{13\pi}{18}$; $\frac{5\pi}{6}$; $\frac{11\pi}{9}$; $\frac{7\pi}{15}$.

Задание 2. На единичной окружности и на числовой прямой отметить точку, на которую отображается точка $P_0(1;0)$ при повороте на число *t*.

а) $t=\frac{7\pi}{3}$; б) $t=-\frac{7\pi}{3}$; в) $t=5\pi$; г) $t=-3\pi$; д) $t=2$;

е) $t=1$; ж) $t=3$; з) $t=-\frac{\pi}{3}+2\pi k$.

Задание 3. В какой четверти находится точка P_t, если:

а) $t=\frac{7\pi}{3}$; б) $t=-\frac{5\pi}{3}$; в) $t=-\frac{2\pi}{3}$; г) $t=-3\pi$;

д) $t=-\frac{\pi}{3}+2\pi n$; е) $t=9\pi$; ж) $t=-6{,}5\pi$.

Занятие 43.

ТРИГОНОМЕТРИЧЕСКИЕ ФУНКЦИИ ЧИСЛОВОГО АРГУМЕНТА

Рассмотрим единичную окружность (рис. 1).

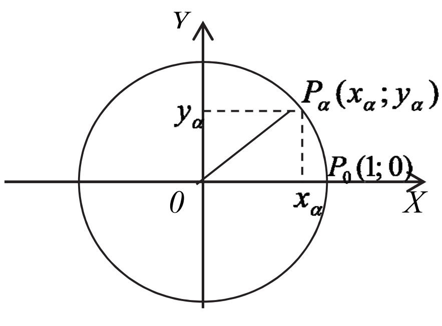


Рис. 1.

Пусть точка $P_\alpha(x_\alpha; y_\alpha)$ получена поворотом точки $P_0(1; 0)$ на число α. Заметим, что каждому повороту на число α соответствует только одна точка $P_\alpha(x_\alpha; y_\alpha)$, т.е. $\forall\alpha \to P_\alpha(x_\alpha; y_\alpha)$. Каждому повороту на число α соответствуют координаты точки P_α x_α и y_α, т.е. $\forall\alpha \to x_\alpha$ и y_α. Таким образом, координаты x_α и y_α есть функции числа α, т.е. $x_\alpha = f(\alpha)$, $y_\alpha = \varphi(\alpha)$.

Определение 1. Косинусом числа α называется абсцисса точки P_α единичной окружности, полученной поворотом точки P_0 на число α, т.е. $x_\alpha = \cos\alpha$.

Определение 2. Синусом числа α называется ордината точки P_α единичной окружности, полученной поворотом точки P_0 на число α, т.е. $y_\alpha = \sin\alpha$.

Область определения функций синуса и косинуса есть множество всех действительных чисел: $\alpha \in R$, т.е. $D(\cos) = R, D(\sin) = R$.

Так как точка P_α принадлежит единичной окружности, то $|x_\alpha| \le 1$ и $|y_\alpha| \le 1$, т.е. множество значений косинуса и синуса по модулю меньше или равно единице. $E(\cos) = [-1; 1], E(\sin) = [-1; 1]$.

Так как точка P_α принадлежит единичной окружности, уравнение которой $x^2 + y^2 = 1$, то координаты точки P_α удовлетворяют этому уравнению, следовательно, $\cos^2\alpha + \sin^2\alpha = 1,\ \alpha \in R$ – основное тригонометрическое тождество (тригонометрическая единица).

Определение 3. ***Тангенсом*** числа α называется отношение синуса этого числа к его косинусу.

$$\operatorname{tg}\alpha = \frac{\sin\alpha}{\cos\alpha}, \text{ где } \cos\alpha \ne 0.$$

Определение 4. ***Котангенсом*** числа α называется отношение косинуса этого числа к его синусу.

$$\operatorname{ctg}\alpha=\frac{\cos\alpha}{\sin\alpha},\text{ где } \sin\alpha\neq 0.$$

$$tg\,\alpha\cdot ctg\,\alpha=\frac{\sin\alpha}{\cos\alpha}\cdot\frac{\cos\alpha}{\sin\alpha}=1$$

$$tg\,\alpha\cdot ctg\,\alpha=1,\quad \sin\alpha\neq 0 \text{ и } \cos\alpha\neq 0.$$

$$\cos^2\alpha+\sin^2\alpha=1\ \Rightarrow\ \frac{\cos^2\alpha}{\cos^2\alpha}+\frac{\sin^2\alpha}{\cos^2\alpha}=\frac{1}{\cos^2\alpha}\ \Rightarrow$$

$$1+\operatorname{tg}^2\alpha=\frac{1}{\cos^2\alpha},\quad \cos\alpha\neq 0.$$

$$\cos^2\alpha+\sin^2\alpha=1\ \Rightarrow\ \frac{\cos^2\alpha}{\sin^2\alpha}+\frac{\sin^2\alpha}{\sin^2\alpha}=\frac{1}{\sin^2\alpha}\ \Rightarrow$$

$$1+\operatorname{ctg}^2\alpha=\frac{1}{\sin^2\alpha},\quad \sin\alpha\neq 0.$$

Секанс числа α: $\sec\alpha=\dfrac{1}{\cos\alpha}$, где $\cos\alpha\neq 0$.

Косеканс числа α: $\operatorname{cosec}\alpha=\dfrac{1}{\sin\alpha}$, где $\sin\alpha\neq 0$.

Задание 1. Упростите выражения.

а) $\sin^2\alpha-1$; б) $\sin^4\alpha+2\sin^2\alpha\cdot\cos^2\alpha+\cos^4\alpha$;

в) $(\cos t+\sin t)^2-1$; г) $(\cos t-\sin t)^2+(\cos t+\sin t)^2$;

д) $\sin^2 x-\sin^4 x+\cos^4 x$; е) $\dfrac{\sin^2\alpha}{1-\cos\alpha}-\cos\alpha$;

ж) $\left(1-\cos\dfrac{\alpha}{2}\right)\left(1+\cos\dfrac{\alpha}{2}\right)$; з) $1-\sin^2 3\alpha-\cos^2 3\alpha$.

Задание 2. Докажите тождества.

а) $\sin^4\alpha+\sin^2\alpha\cdot\cos^2\alpha+\cos^2\alpha=1$;

б) $\sin^2\alpha+\sin^2\alpha\cdot\cos^2\alpha+\cos^4\alpha=1$;

в) $(\sin\alpha+\sin\beta)(\sin\alpha-\sin\beta)+(\cos\alpha+\cos\beta)(\cos\alpha-\cos\beta)=0$;

г) $(\sin\alpha+\cos\alpha)^2+(\sin\alpha-\cos\alpha)^2=2$;

д) $\dfrac{1}{1+\sin\alpha}+\dfrac{1}{1-\sin\alpha}=\dfrac{2}{\cos^2\alpha}$;

е) $\sin^4\alpha+\cos^4\alpha-\sin^6\alpha-\cos^6\alpha=\sin^2\alpha\cos^2\alpha$;

ж) $\sin^2\alpha+\sin^2\beta-\sin^2\alpha\cdot\sin^2\beta+\cos^2\alpha\cos^2\beta=1$;

з) $2(\sin^6\alpha+\cos^6\alpha)-3(\sin^4\alpha+\cos^4\alpha)+1=0$;

и) $\dfrac{1}{3}(\sin^6\alpha+\cos^6\alpha)-\dfrac{1}{4}(\sin^2\alpha-\cos^2\alpha)^2=\dfrac{1}{12}$;

к) $\sin^6\alpha+\cos^6\alpha+3\sin^2\alpha\cos^2\alpha=1$;

л) $\sin^4\alpha+2\sin^2\alpha\cos^2\alpha=1-\cos^4\alpha$.

Задание 3. Упростите выражения.

а) $\sin^2\alpha+\cos^2\alpha+\operatorname{ctg}^2\alpha$; б) $\dfrac{1}{\cos^2\alpha}-tg^2\alpha-\sin^2\alpha$;

в) $\sin\alpha\cdot\operatorname{ctg}\alpha+\cos\alpha$; г) $1-\sin^2\alpha+\operatorname{ctg}^2\alpha\cdot\sin^2\alpha$;

д) $(1+\operatorname{tg}^2\alpha)\cdot\cos^2\alpha$; е) $\cos\alpha\cdot\operatorname{tg}\alpha-\sin\alpha$;

ж) $\cos^4\alpha(1+\operatorname{tg}^2\alpha)+\sin^2\alpha$; з) $\left(\dfrac{1}{\cos^2\alpha}-1\right)\cdot\operatorname{ctg}^2\alpha$;

и) $\left(1-\dfrac{1}{\sin^2\alpha}\right)\cdot\operatorname{tg}^2\alpha$; к) $\dfrac{1-\sin^2\alpha}{1-\cos^2\alpha}$;

л) $1-\dfrac{1}{\sin^2\alpha}$; м) $\dfrac{1}{\cos^2\alpha}-\operatorname{tg}^2\alpha(\cos^2\alpha+1)$;

н) $(1+\operatorname{tg}\alpha)^2+(1-\operatorname{tg}^2\alpha)$.

Задание 4. Докажите тождества:

а) $\dfrac{\operatorname{tg}\alpha}{\operatorname{tg}\alpha+\operatorname{ctg}\alpha}=\sin^2\alpha$; б) $\dfrac{(\sin z+\cos z)^2-1}{\operatorname{ctg}z-\sin z\cos z}=2\operatorname{tg}^2 z$;

в) $\operatorname{tg}^2\alpha-\sin^4\alpha-\sin^2\alpha\cdot\cos^2\alpha=\operatorname{tg}^2\alpha\cdot\sin^2\alpha$;

г) $(\operatorname{ctg}\alpha-\cos\alpha)\left(\dfrac{\sin^2\alpha}{\cos\alpha}+\operatorname{tg}\alpha\right)=\cos^2\alpha$;

д) $\dfrac{\cos\alpha+\operatorname{ctg}\alpha}{\operatorname{ctg}\alpha}-1=\operatorname{tg}\alpha\cdot\cos\alpha$; е) $\dfrac{\operatorname{tg}\alpha}{1-\operatorname{tg}^2\alpha}\cdot\dfrac{\operatorname{ctg}^2\alpha-1}{\operatorname{ctg}\alpha}=1$;

ж) $\dfrac{\sin\alpha}{1+\operatorname{ctg}\alpha}+\dfrac{\cos\alpha}{1+\operatorname{tg}\alpha}=\dfrac{1}{\sin\alpha+\cos\alpha}$; з) $\dfrac{\operatorname{tg}\beta+\operatorname{ctg}\alpha}{\operatorname{ctg}\beta+\operatorname{tg}\alpha}=\dfrac{\operatorname{tg}\beta}{\operatorname{tg}\alpha}$;

и) $\dfrac{2\sin\alpha\cos\alpha-\cos\alpha}{1+\sin^2\alpha-\sin\alpha-\cos^2\alpha}=\operatorname{ctg}\alpha$;

к) $\sqrt{2\operatorname{tg}\alpha+\sec^2\alpha}=1+\operatorname{tg}\alpha$, где α – острый угол;

л) $\dfrac{1}{\sin^2\alpha-\cos^2\alpha}=\dfrac{1+\operatorname{ctg}^2\alpha}{1-\operatorname{ctg}^2\alpha}$.

Занятие 44.

НЕКОТОРЫЕ СВОЙСТВА ТРИГОНОМЕТРИЧЕСКИХ ФУНКЦИЙ

Периодичность

Повороту точки $P_0(1;0)$ на число α соответствует только одна точка P_α, т.е. $\forall\alpha\to P_\alpha$, но каждой точке P_α соответствует бесконечное множество чисел $\{\alpha+2\pi k,\ k\in Z\}$, т.е. $P_\alpha\to\alpha+2\pi k,\ k\in Z$ (рис. 1).

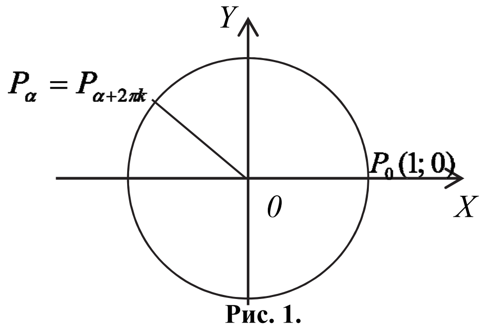


Рис. 1.

Поэтому 2π – период тригонометрических функций синуса и косинуса. $2\pi k$, $k = \pm 1, \pm 2, \dots$ – тоже период.

Таким образом:

$$\sin(\alpha + 2\pi) = \sin\alpha\,,\ \sin(\alpha + 2\pi k) = \sin\alpha,\ k \in Z\,,$$

$$\cos(\alpha + 2\pi) = \cos\alpha\,,\ \cos(\alpha + 2\pi k) = \cos\alpha,\ k \in Z\,.$$

$$\mathrm{tg}(\alpha + \pi k) = \mathrm{tg}\,\alpha\,,\ k \in Z\,.\ \mathrm{ctg}(\alpha + \pi k) = \mathrm{ctg}\,\alpha\,,\ k \in Z$$

Знаки тригонометрических функций по четвертям

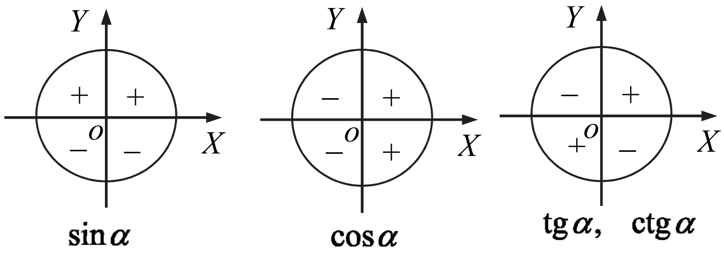


Рис. 2.

Значения синуса и косинуса чисел $0, \dfrac{\pi}{2}, \pi, \dfrac{3\pi}{2}, 2\pi$

Рассмотрим на единичной окружности точки P_0, $P_{\frac{\pi}{2}}$, P_π, $P_{\frac{3\pi}{2}}$, $P_{2\pi}$ (рис. 3).

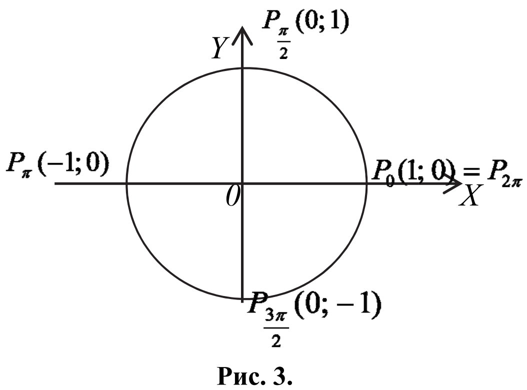


Рис. 3.

Точки $P_{\frac{\pi}{2}}$, P_{π}, $P_{\frac{3\pi}{2}}$, $P_{2\pi}$ получены из точки P_0 поворотом на числа $\frac{\pi}{2}, \pi, \frac{3\pi}{2}$ и 2π соответственно. Таким образом, мы получили следующую таблицу:

α	0	$\frac{\pi}{2}$	π	$\frac{3\pi}{2}$	2π
$\sin\alpha$	0	1	0	-1	0
$\cos\alpha$	1	0	-1	0	1

Решение уравнений $\sin\alpha = 0$, $\sin\alpha = \pm 1$, $\cos\alpha = 0$, $\cos\alpha = \pm 1$

Решение данных тригонометрических уравнений имеет следующий вид (см. рис. 3):

$$\sin\alpha = 0 \Rightarrow \alpha = \pi k,\ \sin\alpha = 1 \Rightarrow \alpha = \frac{\pi}{2} + 2\pi k,$$

$$\sin\alpha = -1 \Rightarrow \alpha = -\frac{\pi}{2} + 2\pi k,$$

$$\cos\alpha = 0 \Rightarrow \alpha = \frac{\pi}{2} + \pi k,\ \cos\alpha = 1 \Rightarrow \alpha = 2\pi k,$$

$$\cos\alpha = -1 \Rightarrow \alpha = \pi + 2\pi k, k \in Z.$$

Задание 1. В какой четверти находится угол α, если.
а) $\sin\alpha > 0$; б) $\cos\alpha < 0$; в) $\sin\alpha < 0$, $\cos\alpha < 0$;
г) $\sin\alpha < 0$, $\cos\alpha > 0$.

Задание 2. Определите знаки значений функций синус и косинус для чисел.
а) $\frac{\pi}{5}$; б) 1; в) 0,7; г) 2; д) 3,2; е) $\frac{71\pi}{6}$; ж) $-\frac{71\pi}{6}$; з) 3,14.

Задание 3. Какой знак имеют значения функций $\sin\alpha$ и $\cos\alpha$, если:

а) $\frac{\pi}{2} < \alpha < \pi$; б) $\pi < \alpha < \frac{3\pi}{2}$; в) $\frac{3\pi}{2} < \alpha < 2\pi$.

Задание 4. Может ли синус отрицательного числа принимать положительные значения? Приведите примеры.

Задание 5. Решите уравнения.

а) $\sin 2\alpha = 0$; б) $\sin 3\alpha = 1$; в) $\cos 2x = -1$; г) $\sin\frac{\beta}{2} = -1$;

д) $\cos\frac{3\alpha}{2} = 0$; е) $\sin^2 x + \sin x = 0$; ж) $\sin x \cdot \cos 2x + \sin x = 0$;

з) $\cos x \cdot \sin 3x - \cos x = 0$.

Задание 6.

а) Дано $\sin\alpha = -0{,}8$; $\alpha \in \left(\pi; \frac{3\pi}{2}\right)$. Найдите $\cos\alpha$, $\operatorname{tg}\alpha$, $\operatorname{ctg}\alpha$.

б) Дано: $\cos\alpha = -\frac{4}{5}$; $\alpha \in \left(\pi; \frac{3\pi}{2}\right)$. Найдите $\sin\alpha$, $\operatorname{tg}\alpha$, $\operatorname{ctg}\alpha$.

в) Дано: $\operatorname{ctg}\alpha = -\frac{9}{40}$; $\alpha \in \left(\frac{3\pi}{2}; 2\pi\right)$. Найдите $\sin\alpha$, $\cos\alpha$, $\operatorname{tg}\alpha$.

г) Дано: $\sin\alpha = -\frac{24}{25}$, $\alpha \in \left(\frac{3\pi}{2}; 2\pi\right)$.Найдите $\cos\alpha$, $\operatorname{tg}\alpha$, $\operatorname{ctg}\alpha$.

д) Дано: $\operatorname{tg}\alpha = -\frac{8}{15}$; $\alpha \in \left(\frac{\pi}{2}; \pi\right)$. Найдите $\sin\alpha$, $\cos\alpha$, $\operatorname{ctg}\alpha$.

Занятие 45.

СВОЙСТВА ТРИГОНОМЕТРИЧЕСКИХ ФУНКЦИЙ

Значения тригонометрических функций некоторых углов

α	$\sin\alpha$	$\cos\alpha$	$\mathrm{tg}\,\alpha$	$\mathrm{ctg}\,\alpha$
0	0	1	0	не существует
$\frac{\pi}{6}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	$\sqrt{3}$
$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	1	1
$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{1}{2}$	$\sqrt{3}$	$\frac{\sqrt{3}}{3}$
$\frac{\pi}{2}$	1	0	не существует	0
$\frac{2\pi}{3}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$-\frac{1}{2}$	$-\sqrt{3}$	$-\frac{\sqrt{3}}{3}$
$\frac{3\pi}{4}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$-\frac{\sqrt{2}}{2}$	-1	-1
$\frac{5\pi}{6}$	$\frac{1}{2}$	$-\frac{\sqrt{3}}{2}$	$-\frac{\sqrt{3}}{3}$	$-\sqrt{3}$
π	0	-1	0	не существует
$\frac{7\pi}{6}$	$-\frac{1}{2}$	$-\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	$\sqrt{3}$
$\frac{5\pi}{4}$	$-\frac{\sqrt{2}}{2}$	$-\frac{\sqrt{2}}{2}$	1	1
$\frac{4\pi}{3}$	$-\frac{\sqrt{3}}{2}$	$-\frac{1}{2}$	$-\sqrt{3}$	$-\frac{\sqrt{3}}{3}$
$\frac{3\pi}{2}$	-1	0	не существует	0

$\frac{4\pi}{3}$	$-\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{1}{2}$	$-\sqrt{3}$	$-\frac{\sqrt{3}}{3}$
$\frac{7\pi}{4}$	$-\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	-1	-1
$\frac{11\pi}{6}$	$-\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$-\frac{\sqrt{3}}{3}$	$-\sqrt{3}$
2π	0	1	0	не существует

Чётность и нечётность тригонометрических функций

Определение 1. Функция $y = f(x)$ называется чётной, если вместе с каждым значением x из области определения функции $f(x)$ значение $-x$ также принадлежит области определения и $f(-x) = f(x)$.

Определение 2. Функция $y = f(x)$ называется нечётной, если вместе с каждым значением x из области определения функции $f(x)$ значение $-x$ также принадлежит области определения и $f(-x) = -f(x)$.

Теорема. Косинус – чётная функция, синус – нечётная функция.

Доказательство. Возьмём два числа α и $-\alpha$, $\alpha \in R$ и $-\alpha \in R$ и сделаем поворот точки P_0 на угол α и $-\alpha$ (рис. 1).

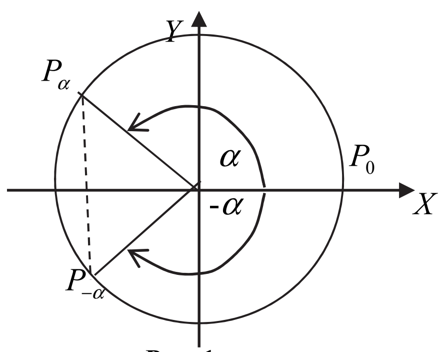


Рис. 1.

На единичной окружности получим точки P_{α} и $P_{-\alpha}$. Они имеют координаты $P_{\alpha}(\cos\alpha; \sin\alpha)$ и $P_{-\alpha}(\cos(-\alpha); \sin(-\alpha))$. Точки P_{α} и $P_{-\alpha}$ – симметричные относительно оси абсцисс, следовательно:

$$\cos(-\alpha) = \cos\alpha\,;\ \sin(-\alpha) = -\sin\alpha\,.$$

Следствие. Тангенс и котангенс – нечётные функции.

$$\operatorname{tg}(-\alpha) = \frac{\sin(-\alpha)}{\cos(-\alpha)} = -\operatorname{tg}\alpha\,;\ \operatorname{ctg}(-\alpha) = \frac{\cos(-\alpha)}{\sin(-\alpha)} = -\operatorname{ctg}\alpha\,.$$

Периодичность тригонометрических функций

Определение. Функция $y = f(x)$ называется периодической, если существует такое число $T \neq 0$, что для любого x из области определения функции $f(x)$ числа $x \pm T$ также принадлежат области определения функции и $f(x + T) = f(x - T) = f(x)$. Тогда число T – период функции $f(x)$. Если T – период функции $f(x)$, то и nT также период функции $f(x)$ при любом $n \in Z$, $n \neq 0$.

Теорема. Функции синус, косинус, тангенс и котангенс – периодические.

Доказательство. При повороте точки P_0 на числа α, $\alpha + 2\pi$, $\alpha - 2\pi$, $\alpha + 2\pi k$, $k \in Z$ точка P_0 отображается на одну и ту же точку единичной окружности P_{α} (рис. 2).

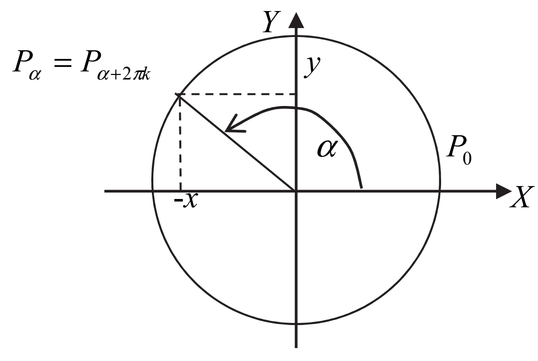


Рис. 2.

Число 2π – минимальный положительный период синуса и косинуса.

Для функций тангенс и котангенс минимальный положительный период – число π.

При повороте точки P_0 на числа α и $\alpha \pm \pi$, точка P_0 отображается на две точки единичной окружности P_α и $P_{\alpha\pm\pi}$ (рис. 3).

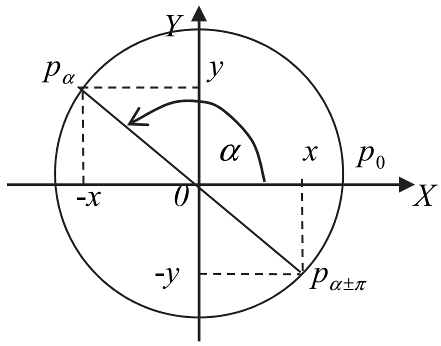


Рис. 3.

Точки P_α и $P_{\alpha\pm\pi}$ симметричны относительно начала координат *0*.

$$P_\alpha(-x;\, y) \Rightarrow \begin{matrix} \cos\alpha = -x \\ \sin\alpha = y \end{matrix}, \quad P_{\alpha\pm\pi}(x;\, -y) \Rightarrow \begin{matrix} \cos(\alpha \pm \pi) = x \\ \sin(\alpha \pm \pi) = -y \end{matrix}.$$

$$\begin{matrix} \operatorname{ctg}\alpha = -\dfrac{x}{y} \\ \operatorname{ctg}(\alpha \pm \pi) = -\dfrac{x}{y} \end{matrix} \Rightarrow \operatorname{ctg}(\alpha \pm \pi) = \operatorname{ctg}\alpha,$$

$$\begin{matrix} \operatorname{tg}\alpha = -\dfrac{x}{y} \\ \operatorname{tg}(\alpha \pm \pi) = -\dfrac{x}{y} \end{matrix} \Rightarrow \operatorname{tg}(\alpha \pm \pi) = \operatorname{tg}\alpha .$$

Число π – минимальный положительный период тангенса и котангенса.

Пример 1. Найдите $\sin\left(-\frac{25\pi}{4}\right)$.

Решение. $\sin\left(-\frac{25\pi}{4}\right) = -\sin\left(\frac{25\pi}{4}\right) = -\sin\left(6\pi+\frac{\pi}{4}\right) =$

$= -\sin\left(\frac{\pi}{4}\right) = -\frac{\sqrt{2}}{2}$.

Пример 2. Найдите $\operatorname{tg}\frac{17\pi}{3}$.

Решение. $\operatorname{tg}\frac{17\pi}{3} = \operatorname{tg}\left(6\pi-\frac{\pi}{3}\right) = \operatorname{tg}\left(-\frac{\pi}{3}\right) = -\operatorname{tg}\frac{\pi}{3} = -\sqrt{3}$.

Задание 1. Определите, какие функции чётные и какие нечётные.

а) $y = x^2 + x^4$; б) $y = x^2 + \operatorname{ctg}^4 x$; в) $y = x^3 + x$;

г) $y = |x| + \cos x$; д) $f(x) = \sin(-x)$; е) $f(t) = \operatorname{tg}^3 t + \operatorname{ctg}^3 t$.

Задание 2. Преобразуйте заданные функции так, чтобы аргумент был выражен наименьшим положительным числом.

а) $\cos\frac{17\pi}{5}$; б) $\operatorname{ctg}\left(-\frac{122\pi}{7}\right)$; в) $\sin\left(-\frac{35\pi}{9}\right)$; г) $\cos\frac{20\pi}{7}$;

д) $\operatorname{tg}\frac{20\pi}{3}$; е) $\sin\frac{61\pi}{7}$; ж) $\operatorname{tg}\left(-\frac{32\pi}{3}\right)$.

Задание 3. Укажите, какие функции периодические, и найдите их наименьший период.

а) $f(x) = \sin 2x$; б) $f(x) = \cos\frac{x}{3}$; в) $f(x) = \operatorname{tg} 2x$;

г) $y = \cos 2x + \sin 2x$; д) $y = \sin x - x$; е) $y = \sin x + \cos x$;

ж) $y = \sin\frac{x}{2}$; з) $y = \cos\left(x - \frac{\pi}{6}\right)$.

Занятие 46.
ОСНОВНЫЕ ФОРМУЛЫ

Формулы дополнительного аргумента

На единичной окружности рассмотрим две точки P_α и $P_{\frac{\pi}{2}-\alpha}$. Они получены поворотом точки P_0 на числа α и $\frac{\pi}{2}-\alpha$ (рис. 1).

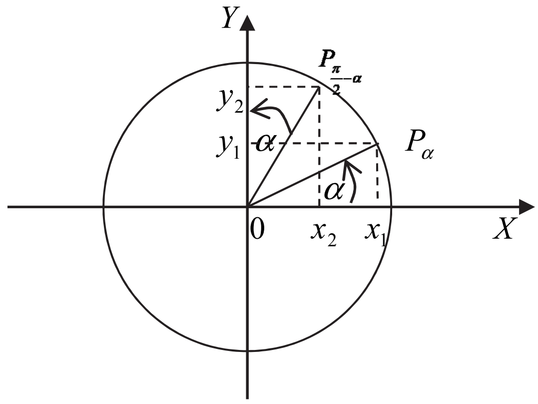


Рис. 1.

Точки P_α и $P_{\frac{\pi}{2}-\alpha}$ по определению тригонометрических функций имеют координаты: $P_\alpha(\cos\alpha; \sin\alpha)$ и $P_{\frac{\pi}{2}-\alpha}\left(\cos\left(\frac{\pi}{2}-\alpha\right); \sin\left(\frac{\pi}{2}-\alpha\right)\right)$, т.е. $x_1 = \cos\alpha$, $y_1 = \sin\alpha$, $x_2 = \cos\left(\frac{\pi}{2}-\alpha\right)$, $y_2 = \sin\left(\frac{\pi}{2}-\alpha\right)$.

По построению (в силу симметрии точек P_α и $P_{\frac{\pi}{2}-\alpha}$ относительно биссектрисы 1-го и 3-го координатных углов) имеем: $x_1 = y_2$, $x_2 = y_1$. Следовательно,

$$\cos\alpha = \sin\left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right), \qquad (1)$$

$$\sin\alpha = \cos\left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right). \qquad (2)$$

Эти формулы называются формулами дополнительного аргумента тригонометрических функций.

Формулы сложения

Косинус суммы и разности двух чисел

Теорема 1. $\forall \alpha, \beta \in R$ справедливо тождество $\cos(\alpha - \beta) = \cos\alpha \cdot \cos\beta + \sin\alpha \cdot \sin\beta$.

Доказательство. На числовой окружности рассмотрим точки $M_0(1; 0)$, $M_\alpha(\cos\alpha; \sin\alpha)$, $M_\beta(\cos\beta; \sin\beta)$, $M_{\alpha-\beta}(\cos(\alpha-\beta); \sin(\alpha-\beta))$. По построению длина дуги $(M_\beta; M_\alpha)$ равна длине дуги $(M_0; M_{\alpha-\beta})$ и равна $\alpha - \beta$. Если дуги равны, то и равны стягивающие их хорды (рис. 1). Запишем равенство хорд. $|M_\beta M_\alpha| = |M_0\ M_{\alpha-\beta}|$ или в координатной форме.

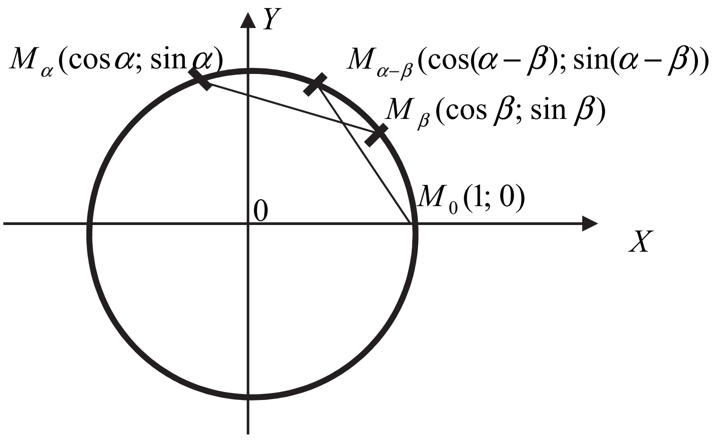


Рис. 1.

$(\cos\alpha-\cos\beta)^2+(\sin\alpha-\sin\beta)^2=$

$=(\cos(\alpha-\beta)-1)^2+(\sin(\alpha-\beta)-0)^2$. Возведя в квадрат, приведя подобные члены и используя основное тригонометрическое тождество, получим

$$\cos(\alpha-\beta)=\cos\alpha\cdot\cos\beta+\sin\alpha\cdot\sin\beta \tag{3}$$

Следствие.

$$\cos(\alpha+\beta)=\cos\alpha\cdot\cos\beta-\sin\alpha\cdot\sin\beta \tag{4}$$

Доказательство. Для любых $\alpha,\beta\in R$, имеем: $\cos(\alpha+\beta)=\cos(\alpha-(-\beta))=\cos\alpha\cdot\cos(-\beta)+\sin\alpha\cdot\sin(-\beta)=$
$=\cos\alpha\cdot\cos\beta-\sin\alpha\cdot\sin\beta$.

Синус суммы и разности двух чисел

Теорема 2. $\forall\alpha,\beta\in R$ справедливо тождество

$$\sin(\alpha+\beta)=\sin\alpha\cdot\cos\beta+\cos\alpha\cdot\sin\beta. \tag{5}$$

Доказательство.

$\sin(\alpha+\beta)=\cos\left(\frac{\pi}{2}-\alpha-\beta\right)=\cos\left(\left(\frac{\pi}{2}-\alpha\right)-\beta\right)=$

$=\cos\left(\frac{\pi}{2}-\alpha\right)\cdot\cos\beta+\sin\left(\frac{\pi}{2}-\alpha\right)\cdot\sin\beta=$

$=\sin\alpha\cdot\cos\beta+\cos\alpha\cdot\sin\beta$.

Следствие.

$$\sin(\alpha-\beta)=\sin\alpha\cdot\cos\beta-\cos\alpha\cdot\sin\beta \tag{6}$$

Доказательство.

$\sin(\alpha-\beta)=\sin(\alpha+(-\beta))=\sin\alpha\cdot\cos(-\beta)+\cos\alpha\cdot\sin(-\beta)=$
$=\sin\alpha\cdot\cos\beta-\cos\alpha\cdot\sin\beta$.

Тангенс суммы и разности

$$\operatorname{tg}(\alpha+\beta)=\frac{\operatorname{tg}\alpha+\operatorname{tg}\beta}{1-\operatorname{tg}\alpha\cdot\operatorname{tg}\beta} \qquad (7)$$

$$\operatorname{tg}(\alpha-\beta)=\frac{\operatorname{tg}\alpha-\operatorname{tg}\beta}{1+\operatorname{tg}\alpha\cdot\operatorname{tg}\beta} \qquad (8)$$

Доказательство. $\operatorname{tg}(\alpha+\beta)=\dfrac{\sin(\alpha+\beta)}{\cos(\alpha+\beta)}=$

$=\dfrac{\sin\alpha\cos\beta+\sin\beta\cos\alpha}{\cos\alpha\cos\beta-\sin\alpha\sin\beta}$, $\cos(\alpha+\beta)\neq 0, \alpha+\beta\neq\dfrac{\pi}{2}+\pi k, k\in Z$.

Разделим числитель и знаменатель на произведение $\cos\alpha\cos\beta\neq 0$. Получим формулы (7) и (8).

Задание. Упростите выражение.

а) $\sin\alpha\cos 3\alpha-\cos\alpha\sin 3\alpha$; б) $\sin\dfrac{\pi}{7}\cos\dfrac{2\pi}{7}+\cos\dfrac{\pi}{7}\sin\dfrac{2\pi}{7}$;

в) $\cos 3x\cos x-\sin 3x\sin x$; г) $\sin 2\alpha\sin\alpha+\cos 2\alpha\cos\alpha$;

д) $\dfrac{1+\operatorname{tg}\alpha}{1-\operatorname{tg}\alpha}$; е) $\dfrac{\operatorname{tg}\dfrac{\pi}{15}+\operatorname{tg}\dfrac{4\pi}{15}}{1-\operatorname{tg}\dfrac{\pi}{15}\operatorname{tg}\dfrac{4\pi}{15}}$.

Занятие 47.

ОСНОВНЫЕ ФОРМУЛЫ (продолжение 1)

Формулы приведения

Область определения функций cos$x$ и sin$x$ – все действительные числа: $D(\cos x) = R$, $D(\sin x) = R$. Функции cos$x$ и sin$x$ – периодические с наименьшим положительным периодом 2π. Любое число x ($x \in R$) можно записать в виде $x = 2\pi k + \beta$, где $\beta \in [0;\, 2\pi]$, $k \in Z$. Тогда нахождение значений cos$x$ и sin$x$ сводится к нахождению значений этих функций от аргумента $\beta \in (0;\, 2\pi)$.

Например, $\sin\dfrac{20\pi}{3} = \sin\left(6\pi + \dfrac{2\pi}{3}\right) = \sin\dfrac{2\pi}{3}$.

Любое число $\beta \in (0;\, 2\pi)$ можно записать в виде $\beta = \dfrac{\pi}{2} \pm \alpha$, $\beta = \dfrac{3\pi}{2} \pm \alpha$, $\beta = \pi \pm \alpha$, $\beta = \alpha - 2\pi$, $\alpha \in \left(0;\, \frac{\pi}{2}\right)$.

Например, $\dfrac{2\pi}{3} = \dfrac{\pi}{2} + \dfrac{\pi}{6}$.

Нахождение значений синуса и косинуса от аргумента $\beta \in (0;\, 2\pi)$ сводится к нахождению значений этих функций от аргумента $\alpha \in \left(0;\, \frac{\pi}{2}\right)$. Формулы, с помощью которых значения синуса и косинуса от аргумента $\beta \in (0;\, 2\pi)$ сводятся к нахождению значений этих функций от аргумента $\alpha \in \left(0;\, \frac{\pi}{2}\right)$, называются формулами приведения. Все эти формулы приведены в таблице. Их доказательство можно провести, используя, например, формулы сложения. В качестве примера выведем формулу для $\sin(\pi + \alpha)$:

$$\sin(\pi + \alpha) = \sin\pi\cos\alpha + \cos\pi\sin\alpha = 0 \cdot \cos\alpha - 1 \cdot \sin\alpha = -\sin\alpha.$$

Таким образом, $\sin(\pi + \alpha) = -\sin\alpha$.

Для вывода можно использовать и формулы дополнительного аргумента.

Например, $\cos\left(\frac{\pi}{2}+\alpha\right)= \ =\cos\left(\frac{\pi}{2}-(-\alpha)\right)=\sin(-\alpha)=-\sin\alpha$.

α	$\sin\alpha$	$\cos\alpha$	$\mathrm{tg}\,\alpha$	$\mathrm{ctg}\,\alpha$
$-\alpha$	$-\sin\alpha$	$\cos\alpha$	$-\mathrm{tg}\,\alpha$	$-\mathrm{ctg}\,\alpha$
$\frac{\pi}{2}-\alpha$	$\cos\alpha$	$\sin\alpha$	$\mathrm{ctg}\,\alpha$	$\mathrm{tg}\,\alpha$
$\frac{\pi}{2}+\alpha$	$\cos\alpha$	$-\sin\alpha$	$-\mathrm{ctg}\,\alpha$	$-\mathrm{tg}\,\alpha$
$\pi-\alpha$	$\sin\alpha$	$-\cos\alpha$	$-\mathrm{tg}\,\alpha$	$-\mathrm{ctg}\,\alpha$
$\pi+\alpha$	$-\sin\alpha$	$-\cos\alpha$	$\mathrm{tg}\,\alpha$	$\mathrm{ctg}\,\alpha$
$\frac{3\pi}{2}-\alpha$	$-\cos\alpha$	$-\sin\alpha$	$\mathrm{ctg}\,\alpha$	$\mathrm{tg}\,\alpha$
$\frac{3\pi}{2}+\alpha$	$-\cos\alpha$	$\sin\alpha$	$-\mathrm{ctg}\,\alpha$	$-\mathrm{tg}\,\alpha$
$2\pi-\alpha$	$-\sin\alpha$	$\cos\alpha$	$-\mathrm{tg}\,\alpha$	$-\mathrm{ctg}\,\alpha$

Формулы приведения можно запомнить по следующему правилу:

1. Знак у результата ставим тот, который имеет данная функция в данной четверти.

2. В результате название функции не меняется для чисел $\pi\pm\alpha$ и меняется на “кофункцию” для чисел $\frac{\pi}{2}\pm\alpha$, $\frac{3\pi}{2}\pm\alpha$.

Примеры. Преобразуйте заданные функции так, чтобы аргумент был выражен наименьшим положительным числом.

$$\sin\frac{20\pi}{3}=\sin\left(6\pi+\frac{2\pi}{3}\right)=\sin\frac{2\pi}{3}=\sin\left(\frac{\pi}{2}+\frac{\pi}{6}\right)=\cos\frac{\pi}{6}.$$

$$\operatorname{tg}\frac{25\pi}{7}=\operatorname{tg}\left(3\pi+\frac{4\pi}{7}\right)=\operatorname{tg}\frac{4\pi}{7}=\operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{2}+\frac{\pi}{14}\right)=-\operatorname{ctg}\frac{\pi}{14}.$$

Задание 1. Приведите к тригонометрическим функциям наименьшего положительного аргумента.

а) $\cos\frac{20\pi}{3}$; б) $\sin\left(-\frac{22\pi}{7}\right)$; в) $\operatorname{tg}\frac{38\pi}{7}$;

г) $\sin\left(-\frac{3\pi}{4}\right)$; д) $\operatorname{ctg}\frac{17\pi}{18}$; е) $\cos\left(-\frac{9\pi}{10}\right)$;

ж) $\sin\frac{29\pi}{12}$; з) $\cos 2{,}1\pi$; и) $\sin 2\frac{1}{7}\pi$.

Задание 2. Упростите.

а) $2\operatorname{tg}\alpha-\operatorname{tg}(\alpha-\pi)-\operatorname{ctg}\left(\alpha-\frac{3\pi}{2}\right)$;

б) $\dfrac{\sin(-\alpha)}{\sin(\pi-\alpha)}-\dfrac{\operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{2}-\alpha\right)}{\operatorname{ctg}\alpha}+\dfrac{\cos\alpha}{\sin\left(\frac{\pi}{2}-\alpha\right)}$;

в) $\dfrac{\sin(2\pi-\alpha)\cdot\operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{2}+\alpha\right)\cdot\operatorname{ctg}\left(\frac{3\pi}{2}-\alpha\right)}{\cos(2\pi+\alpha)\cdot\operatorname{tg}(\pi+\alpha)}$;

г) $\dfrac{\sin(\pi-\alpha)\cdot\sin\left(\frac{3\pi}{2}-\alpha\right)\cdot\operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{2}-\alpha\right)}{\sin\left(\frac{\pi}{2}+\alpha\right)\cdot\operatorname{tg}\left(\frac{3\pi}{2}+\alpha\right)\cdot\operatorname{tg}(2\pi-\alpha)}$;

д) $\dfrac{\sin(\pi+\alpha)}{\sin\left(\frac{3\pi}{2}-\alpha\right)}-\dfrac{\operatorname{tg}\left(\frac{3\pi}{2}+\alpha\right)}{\operatorname{ctg}(\pi-\alpha)}+\operatorname{tg}(\pi-\alpha)$;

е) $\dfrac{\operatorname{tg}\left(\dfrac{\pi}{2}+\alpha\right)\cdot\cos\left(\dfrac{3\pi}{2}-\alpha\right)\cdot\cos(-\alpha)}{\operatorname{ctg}(\pi-\alpha)\cdot\sin\left(\dfrac{3\pi}{2}+\alpha\right)}$;

ж) $\dfrac{\sin^2(\pi+\alpha)}{\sin^2\left(\dfrac{3\pi}{2}+\alpha\right)}+\dfrac{\operatorname{tg}^2\left(\dfrac{3\pi}{2}+\alpha\right)}{\operatorname{ctg}^2(\pi+\alpha)}$.

Задание 3. Вычислите.

а) $\cos 10\pi$; б) $\sin 7\pi$; в) $\cos(16{,}5\pi)$; г) $\sin\left(-7\dfrac{5}{6}\pi\right)$;

д) $\operatorname{tg}\left(-\dfrac{17\pi}{6}\right)$; е) $\sin\dfrac{9\pi}{2}$; ж) $\operatorname{ctg}\dfrac{31\pi}{6}$.

Занятие 48.

ОСНОВНЫЕ ФОРМУЛЫ (продолжение 2)

Тригонометрические функции двойного аргумента

$$\sin 2\alpha = 2\sin\alpha\cdot\cos\alpha,\ \alpha\in R. \qquad (1)$$

Доказательство. $\sin 2\alpha = \sin(\alpha+\alpha) =$
$= \sin\alpha\cdot\cos\alpha+\sin\alpha\cdot\cos\alpha = 2\sin\alpha\cdot\cos\alpha$.

$$\cos 2\alpha = \cos^2\alpha - \sin^2\alpha,\ \alpha\in R. \qquad (2)$$

Доказательство. $\cos 2\alpha = \cos(\alpha+\alpha) =$
$= \cos\alpha\cdot\cos\alpha - \sin\alpha\cdot\sin\alpha = \cos^2\alpha - \sin^2\alpha$.

Заменяем в формуле (2) $\sin^2\alpha$ на разность $1-\cos^2\alpha$, получаем

$$\cos 2\alpha = 2\cos^2\alpha - 1,\ \alpha\in R. \qquad (3)$$

Заменяем в формуле (2) $\cos^2\alpha$ на разность $1-\sin^2\alpha$, получаем

$$\cos 2\alpha = 1 - 2\sin^2\alpha,\ \alpha \in R. \qquad (4)$$

Из формул (3) и (4) получаем формулы понижения степени синуса и косинуса:

$$\sin^2\alpha = \frac{1-\cos 2\alpha}{2} \qquad (5)$$

$$\cos^2\alpha = \frac{1+\cos 2\alpha}{2} \qquad (6)$$

$$\operatorname{tg} 2\alpha = \frac{2\operatorname{tg}\alpha}{1-\operatorname{tg}^2\alpha}. \qquad (7)$$

Доказательство. $\operatorname{tg} 2\alpha = \operatorname{tg}(\alpha+\alpha) = \dfrac{\operatorname{tg}\alpha + \operatorname{tg}\alpha}{1-\operatorname{tg}^2\alpha} = \ = \dfrac{2\operatorname{tg}\alpha}{1-\operatorname{tg}^2\alpha}$.

В формуле (7) $\alpha \neq \dfrac{\pi}{2} + \pi k$, $\alpha \neq \dfrac{\pi}{4} + \dfrac{\pi k}{2}, k \in Z$.

Тригонометрические функции половинного аргумента

Из формул понижения степени получаем формулы половинного аргумента:

$$\left|\sin\frac{\alpha}{2}\right| = \sqrt{\frac{1-\cos\alpha}{2}},\ \alpha \in R, \qquad (8)$$

$$\left|\cos\frac{\alpha}{2}\right| = \sqrt{\frac{1+\cos\alpha}{2}},\ \alpha \in R. \qquad (9)$$

Из формул (8) и (9) следует

$$\left|\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2}\right| = \sqrt{\frac{1-\cos\alpha}{1+\cos\alpha}},\ \alpha \neq \pi + 2\pi k,\ k \in Z. \qquad (10)$$

Тангенс половинного аргумента можно вычислить и по другим формулам:

$$\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2} = \frac{\sin\frac{\alpha}{2}}{\cos\frac{\alpha}{2}} = \frac{2\sin\frac{\alpha}{2}\cos\frac{\alpha}{2}}{2\cos^2\frac{\alpha}{2}} = \frac{\sin\alpha}{1+\cos\alpha},\ \text{т.е.}$$

$$\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2}=\frac{\sin\alpha}{1+\cos\alpha},\ \alpha\neq\pi+\pi k,\ k\in Z. \qquad (11)$$

$$\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2}=\frac{\sin\alpha}{1+\cos\alpha}=\frac{\sin\alpha(1-\cos\alpha)}{(1+\cos\alpha)(1-\cos\alpha)}=\frac{\sin\alpha(1-\cos\alpha)}{\sin^2\alpha}=$$

$$=\frac{1-\cos\alpha}{\sin\alpha}.$$

$$\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2}=\frac{1-\cos\alpha}{\sin\alpha},\ \alpha\neq\pi k,\ k\in Z. \qquad (12)$$

Задание 1. Вычислите.

а) $2\sin\frac{\pi}{12}\cos\frac{\pi}{12}$; б) $1-2\sin^2\frac{\pi}{12}$; в) $\cos^2\frac{\pi}{8}-\sin^2\frac{\pi}{8}$;

г) $2\cos^2\frac{\pi}{8}-1$; д) $\dfrac{2\operatorname{tg}\frac{\pi}{8}}{1-\operatorname{tg}^2\frac{\pi}{8}}$; е) $2\cos\frac{5\pi}{2}\sin\frac{5\pi}{2}$;

ж) $\sin^2\frac{\pi}{12}-\cos^2\frac{\pi}{12}$.

Задание 2. Упростите выражение.

а) $2\cos\left(\frac{\pi}{4}-\frac{\alpha}{2}\right)\sin\left(\frac{\pi}{4}-\frac{\alpha}{2}\right)$; б) $(\sin\varphi-\cos\varphi)^2+\sin 2\varphi$;

в) $\dfrac{1+\sin 2x}{(\sin x+\cos x)^2}$; г) $1-2\sin^2\frac{\alpha}{2}$;

д) $\dfrac{1+\cos x}{\cos\frac{x}{2}}$; е) $\dfrac{\sin\alpha\cos\alpha}{\cos^2\alpha-\sin^2\alpha}$.

Задание 3. Докажите тождество.

а) $\cos^4\alpha-\sin^4\alpha=\cos 2\alpha$; б) $4\cos^4\alpha+\sin^2 2\alpha=4\cos^2\alpha$;

в) $\dfrac{1-4\cos^2\alpha}{4\sin^2\alpha-1}=\operatorname{ctg}\alpha\cdot\operatorname{tg}3\alpha$;

г) $4\sin\alpha\cos^3\alpha-4\sin^3\alpha\cos\alpha=\sin 4\alpha$;

д) $\dfrac{\cos^3\alpha+\sin^3\alpha}{\cos\alpha+\sin\alpha}=\dfrac{2-\sin 2\alpha}{2}$;

е) $\dfrac{\sin 2\alpha}{1+\cos\alpha}\cdot\dfrac{\cos\alpha}{1+\cos 2\alpha}=\operatorname{tg}\dfrac{\alpha}{2}$.

Задание 4. Найдите наименьший положительный период функций.

а) $y=\sin x\cos x$; б) $y=\cos^2 x-\sin^2 x$;

в) $y=\dfrac{\cos x}{1-\sin x}$; г) $y=\dfrac{2\operatorname{tg} x}{1-\operatorname{tg}^2 x}$;

д) $y=\dfrac{1+\cos x}{1-\cos x}$; е) $y=\dfrac{2\operatorname{ctg} x\sin^2 x}{\sin^2 x-\cos^2 x}$.

Задание 5. Преобразуйте в сумму.

а) $\sin^2 3x$; б) $2\cos^2\left(x-\dfrac{\pi}{4}\right)$; в) $4\sin^2\left(x-\dfrac{3\pi}{4}\right)$;

г) $\dfrac{1}{4}\cos^2\left(x-\dfrac{3\pi}{4}\right)$; д) $\dfrac{2\operatorname{ctg}^2\dfrac{x}{2}}{1+\operatorname{tg}^2\left(\dfrac{x}{2}-\dfrac{\pi}{2}\right)}$.

Задание 6. Преобразуйте в произведение.

а) $1-\cos x$; б) $1+\cos 4x$; в) $\cos 2x-1$;

г) $1-\cos 3x$; д) $1+\sin\left(\dfrac{3\pi}{2}-x\right)$; е) $\cos(x-\pi)-1$.

Задание 7. Докажите тождество.

$\sin 3\alpha=3\sin\alpha-4\sin^3\alpha$; $\cos 3\alpha=4\cos^3\alpha-\cos\alpha$.

Занятие 49.

ОСНОВНЫЕ ФОРМУЛЫ (продолжение 3)

Выражение тригонометрических функций через тангенс половинного аргумента

$$\sin\alpha = \frac{2\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2}}{1+\operatorname{tg}^2\frac{\alpha}{2}},\ \alpha \ne (2k+1)\pi,\ k \in Z. \qquad (1)$$

Доказательство. $\sin\alpha = 2\sin\frac{\alpha}{2}\cos\frac{\alpha}{2} = \frac{2\sin\frac{\alpha}{2}\cos\frac{\alpha}{2}}{1} =$

$= \frac{2\sin\frac{\alpha}{2}\cos\frac{\alpha}{2}}{\cos^2\frac{\alpha}{2}+\sin^2\frac{\alpha}{2}}$. Разделим числитель и знаменатель на $\cos^2\frac{\alpha}{2} \ne 0$, получим $\sin\alpha = \frac{2\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2}}{1+\operatorname{tg}^2\frac{\alpha}{2}},\ \alpha \ne (2k+1)\pi,\ k \in Z$.

$$\cos\alpha = \frac{1-\operatorname{tg}^2\frac{\alpha}{2}}{1+\operatorname{tg}^2\frac{\alpha}{2}},\ \alpha \ne (2k+1)\pi,\ k \in Z. \qquad (2)$$

Доказательство. $\cos\alpha = \cos^2\frac{\alpha}{2} - \sin^2\frac{\alpha}{2} =$

$= \frac{\cos^2\frac{\alpha}{2}-\sin^2\frac{\alpha}{2}}{\cos^2\frac{\alpha}{2}+\sin^2\frac{\alpha}{2}}$. Разделим числитель и знаменатель на $\cos^2\frac{\alpha}{2} \ne 0$, получим $\cos\alpha = \frac{1-\operatorname{tg}^2\frac{\alpha}{2}}{1+\operatorname{tg}^2\frac{\alpha}{2}},\ \alpha \ne (2k+1)\pi,\ k \in Z$.

$$\operatorname{tg}\alpha=\frac{2\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2}}{1-\operatorname{tg}^2\frac{\alpha}{2}},\ \alpha\neq(2k+1)\pi,\ \alpha\neq\frac{\pi}{2}+\pi k,\ \ k\in Z. \quad (3)$$

Доказательство. $\operatorname{tg}\alpha=\operatorname{tg}\left(2\cdot\frac{\alpha}{2}\right)=\dfrac{2\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2}}{1-\operatorname{tg}^2\frac{\alpha}{2}}$.

Задание 1. Сделайте замену переменной в следующих выражениях, используя универсальную тригонометрическую подстановку $\operatorname{tg}\frac{x}{2}=t$.

а) $\dfrac{1}{4+5\cos x}$; б) $\dfrac{1}{3-5\sin x}$; в) $\dfrac{\cos x}{1-\sin x}$ г) $\dfrac{1}{\sin x}$;
д) $\dfrac{\sin x}{1+\sin x}$; е) $\dfrac{1}{1+\cos x}$.

Формулы преобразования произведения тригонометрических функций в сумму

$$\sin\alpha\cos\beta=\frac{1}{2}\left[\sin(\alpha+\beta)+\sin(\alpha-\beta)\right],\ \alpha\in R,\ \beta\in R. \qquad (4)$$

Доказательство. Запишем формулы для синуса суммы и разности двух аргументов:
$\sin(\alpha+\beta)=\sin\alpha\cos\beta+\sin\beta\cos\alpha$,
$\sin(\alpha-\beta)=\sin\alpha\cos\beta-\sin\beta\cos\alpha$.
Складывая эти соотношения, получим
$\sin(\alpha+\beta)+\sin(\alpha-\beta)=2\sin\alpha\cos\beta$. Отсюда получается формула (4).

$$\cos\alpha\cos\beta=\frac{1}{2}\left[\cos(\alpha+\beta)+\cos(\alpha-\beta)\right],\ \alpha\in R,\ \beta\in R. \qquad (5)$$

Доказательство. Запишем формулы для косинуса разности и суммы двух аргументов:

$\cos(\alpha-\beta)=\cos\alpha\cos\beta+\sin\alpha\sin\beta$,
$\cos(\alpha+\beta)=\cos\alpha\cos\beta-\sin\alpha\sin\beta$.

Складывая эти соотношения, получим $\cos(\alpha+\beta)+\cos(\alpha-\beta)=2\cos\alpha\cos\beta$. Отсюда получается формула (5).

Вычитая из первой формулы вторую, получим $\cos(\alpha-\beta)-\cos(\alpha+\beta)=2\sin\alpha\sin\beta$. Отсюда имеем

$$\sin\alpha\sin\beta=\frac{1}{2}\left[\cos(\alpha-\beta)-\cos(\alpha+\beta)\right],\ \alpha\in R,\ \beta\in R. \qquad (6)$$

Пример 1. Преобразуйте произведение cos$x$ cos5x в сумму.

Решение. По формуле (5) имеем $\cos x\cos 5x=$
$=\frac{1}{2}\left[\cos(x+5x)+\cos(x-5x)\right]=\frac{1}{2}\left[\cos 6x+\cos(-4x)\right]=$
$=\frac{1}{2}(\cos 6x+\cos 4x)$.

Пример 2. Преобразуйте произведение $\cos\left(x-\frac{\pi}{6}\right)\sin\left(\frac{x}{2}+\frac{\pi}{6}\right)$ в сумму.

Решение. По формуле (4) имеем
$\cos\left(x-\frac{\pi}{6}\right)\sin\left(\frac{x}{2}+\frac{\pi}{6}\right)=\frac{1}{2}\left[\sin\left(x-\frac{\pi}{6}+\frac{x}{2}+\frac{\pi}{6}\right)+\right.$
$\left.+\sin\left(\frac{x}{2}+\frac{\pi}{6}-x+\frac{\pi}{6}\right)\right]=\frac{1}{2}\left[\sin\frac{3x}{2}+\sin\left(\frac{\pi}{3}-\frac{x}{2}\right)\right].$

Задание 2. Преобразуйте в сумму.

а) $2\cos\frac{x}{2}\cos\frac{x}{4}$;   б) $2\cos x\cos(x-1)$;

в) $2\sin\left(\frac{\pi}{4}+\alpha\right)\cos\left(\frac{\pi}{12}-\alpha\right)$;   г) $4\sin 3x\cos 3x$;

д) $2\cos 4x \sin 3x$; е) $\sin^3 x$;
ж) $\sin x \cos^2 x$; з) $4\cos^2 x \sin x$.

Задание 3. Докажите тождества.

а) $4\cos\frac{x}{2}\cos x \sin\frac{3x}{2} = \sin x + \sin 2x + \sin 3x$;

б) $2\cos\alpha\cos\left(\frac{\alpha}{2}+\frac{\pi}{6}\right)\cos\left(\frac{\alpha}{2}-\frac{\pi}{6}\right) = \frac{1}{2}+\frac{1}{2}\cos\alpha+\frac{1}{2}\cos 2\alpha$;

в) $4\cos\frac{z}{2}\cos z\cos\frac{5z}{2} = \cos z + \cos 2z + \cos 3z + \cos 4z$;

г) $4\cos x\cos\frac{x}{2}\cos\frac{5x}{2} = \cos x + \cos 2x + \cos 3x + \cos 4x$.

Занятие 50.

ОСНОВНЫЕ ФОРМУЛЫ (продолжение 4)

Формулы преобразования суммы тригонометрических функций в произведение

$$\sin\alpha + \sin\beta = 2\sin\frac{\alpha+\beta}{2}\cos\frac{\alpha-\beta}{2},\ \alpha\in R,\ \beta\in R. \qquad (1)$$

$$\sin\alpha - \sin\beta = 2\sin\frac{\alpha-\beta}{2}\cos\frac{\alpha+\beta}{2},\ \alpha\in R,\ \beta\in R. \qquad (2)$$

Доказательство. Из формулы
$\sin x\cos y = \frac{1}{2}\left[\sin(x+y)+\sin(x-y)\right]$ имеем
$\sin(x+y)+\sin(x-y) = 2\sin x\cos y$. Пусть $\begin{cases} x+y=\alpha, \\ x-y=\beta. \end{cases}$

Отсюда $x=\frac{\alpha+\beta}{2}$, $y=\frac{\alpha-\beta}{2}$. Подставив эти значения x и y, получим формулу (1).

Формула (2) получается из формулы (1) следующим образом: $\sin\alpha - \sin\beta = \sin\alpha + \sin(-\beta) = 2\sin\frac{\alpha-\beta}{2}\cos\frac{\alpha+\beta}{2}$.

Аналогично получаются формулы

$$\cos\alpha + \cos\beta = 2\cos\frac{\alpha+\beta}{2}\cos\frac{\alpha-\beta}{2},\ \alpha\in R,\ \beta\in R. \qquad (3)$$

$$\cos\alpha - \cos\beta = -2\sin\frac{\alpha+\beta}{2}\sin\frac{\alpha-\beta}{2},\ \alpha\in R,\ \beta\in R. \qquad (4)$$

Задание. Преобразуйте в произведение.

а) $\sin(x+a)+\sin(x-a)$;

б) $\sin\left(2x-\frac{\pi}{6}\right)-\sin\left(2x+\frac{\pi}{6}\right)$;

в) $\frac{\sin x+\sin y}{\sin x-\sin y}$;

г) $1+\cos\frac{x}{2}$;

д) $\sin x + \cos x$;

е) $1-\cos\frac{x}{2}$;

ж) $1 + \sin x$;

з) $1 - \sin x$;

и) $\frac{1-\cos 2x}{1+\cos 2x}$;

к) $1 - \sin 2x$;

л) $\frac{1+\cos kx}{\sin kx}$;

м) $\frac{1-\cos(x-a)}{\sin(x-a)}$;

н) $\frac{1-\sin\left(\frac{\pi}{6}-x\right)}{1+\sin\left(\frac{\pi}{6}+x\right)}$;

о) $\frac{\sqrt{3}}{2}-\sin x$;

п) $\frac{\sqrt{2}}{2}-\cos x$;

р) $\sqrt{3}-2\sin 2x$;

с) $\frac{1}{4}-\cos^2 x$;

т) $\frac{3}{4}-\sin^2 x$.

Занятие 51.

ТРИГОНОМЕТРИЧЕСКИЕ ФУНКЦИИ

Свойства и график функции *y* = sin *x*

Определение. Синусом числа x называется ордината точки M_x единичной окружности, такой, что длина дуги с начальной точкой M_0 и конечной точкой M_x равна x.

1. Область определения $D(x) = R$. Так как $\forall x \epsilon R\ \exists M_x: |\cup\, M_0 M_x| = x.$

2. Множество значений $E(f) = [-1; 1]$. Так как ординаты точек единичной окружности принадлежит отрезку $[-1; 1]$.

3. Периодичность. Наименьший положительный период $T = 2\pi$. Так как длина единичной окружности равна 2π, то точки M_x, $M_{x+2\pi n}$, $n \in Z$ изображаются на единичной окружности одной и той же точкой.

4. Чётность, нечётность. Функция синус нечётная, так как $D(f)$ симметрична относительно начала координат (0; 0) и $\sin(-x) = -\sin(x)$.

5. Точки пересечения графика с осями координат. Это точки $(\pi n; 0)$, $n \in Z$.

6. Промежутки знакопостоянства. $\sin x > 0$ при $x \in (2\pi n; \pi+2\pi n)$, $n \in Z$ (1 и 2 четверти); $\sin x < 0$ при $x \in (\pi+2\pi n; 2\pi+2\pi n)$, $n \in Z$ (3 и 4 четверти).

7. Наибольшее значение. $\sin x = 1$ при

$$x = \frac{\pi}{2} + 2\pi n,\ n \in Z.$$

8. Наименьшее значение. $\sin x = -1$ при

$$x = -\frac{\pi}{2} + 2\pi n,\ n \in Z.$$

9. Функция возрастает при

$$x \in \left[-\frac{\pi}{2} + 2\pi n; \frac{\pi}{2} + 2\pi n\right],\ n \in Z.$$

10. Функция убывает при

$x \in \left[\frac{\pi}{2} + 2\pi n; \frac{3\pi}{2} + 2\pi n\right], n \in Z$.

11. График функции – синусоида. Для построения графика составим таблицу значений синуса, когда $x \in [0; \pi]$.

x	0	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$	$\frac{2\pi}{3}$	$\frac{3\pi}{4}$	$\frac{5\pi}{6}$	π
$\sin x$	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$	0

Так как $y = \sin x$ – нечётная функция, то на отрезке $[-\pi; 0]$ график будет симметричен уже построенному графику относительно начала координат.

Так как функция $y = \sin x$ – периодическая с периодом 2π, то далее график получается параллельным переносом графика впра́во-вле́во вдоль оси OX (рис. 1).

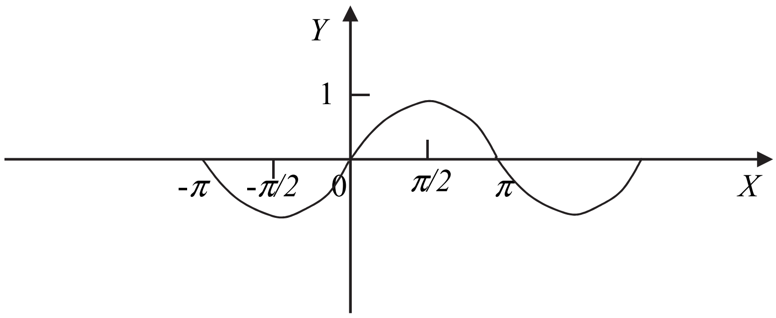


Рис. 1.

Арксинус числа

Определение. $\arcsin m$ – это число (угол) из промежутка $\left[-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right]$, синус которого равен m.

Из определения следуют свойства (рис. 2):

1. $-1 \le m \le 1$,
2. $-\dfrac{\pi}{2} \le \arcsin m \le \dfrac{\pi}{2}$,
3. $\sin(\arcsin m) = m$,
4. $\arcsin(-m) = -\arcsin m$.

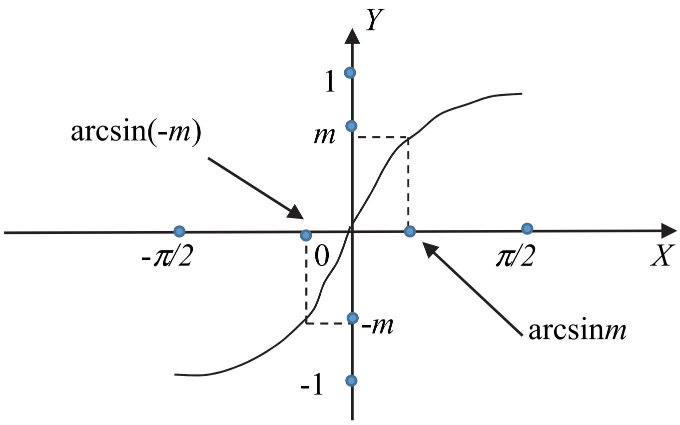


Рис. 2.

Вычислим несколько значений арксинуса:

1. $\arcsin\dfrac{\sqrt{3}}{2} = \dfrac{\pi}{3}$, так как $\sin\dfrac{\pi}{3} = \dfrac{\sqrt{3}}{2}$, $\dfrac{\pi}{3} \in \left[-\dfrac{\pi}{2}; \dfrac{\pi}{2}\right]$.
2. $\arcsin\dfrac{\sqrt{2}}{2} = \dfrac{\pi}{4}$, так как $\sin\dfrac{\pi}{4} = \dfrac{\sqrt{2}}{2}$, $\dfrac{\pi}{4} \in \left[-\dfrac{\pi}{2}; \dfrac{\pi}{2}\right]$.
3. $\arcsin\dfrac{1}{2} = \dfrac{\pi}{6}$, так как $\sin\dfrac{\pi}{6} = \dfrac{1}{2}$, $\dfrac{\pi}{6} \in \left[-\dfrac{\pi}{2}; \dfrac{\pi}{2}\right]$.
4. $\arcsin 1 = \dfrac{\pi}{2}$, так как $\sin\dfrac{\pi}{2} = 1$, $\dfrac{\pi}{2} \in \left[-\dfrac{\pi}{2}; \dfrac{\pi}{2}\right]$.
5. $\arcsin(-1) = -\dfrac{\pi}{2}$, так как $\sin\left(-\dfrac{\pi}{2}\right) = -1$, $-\dfrac{\pi}{2} \in \left[-\dfrac{\pi}{2}; \dfrac{\pi}{2}\right]$.

Таблица некоторых частных значений арксинуса.

m	-1	$-\frac{\sqrt{3}}{2}$	$-\frac{\sqrt{2}}{2}$	$-\frac{1}{2}$	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	1
$\arcsin m$	$-\frac{\pi}{2}$	$-\frac{\pi}{3}$	$-\frac{\pi}{4}$	$-\frac{\pi}{6}$	0	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$

Задание 1. Найдите значение суммы.

а) $\arcsin\frac{1}{2}+\arcsin\frac{\sqrt{2}}{2}$; б) $\arcsin\left(-\frac{\sqrt{3}}{2}\right)+\arcsin 1$;

в) $\arcsin\left(-\frac{\sqrt{2}}{2}\right)+\arcsin\left(-\frac{1}{2}\right)$.

Задание 2. Вычислите.

а) $\sin\left(\arcsin\frac{2}{9}\right)$; б) $\arcsin\left(\sin\frac{\pi}{3}\right)$;

в) $\sin(\arcsin(-0{,}65))$; г) $\arcsin(\sin(-0{,}75\pi))$.

Решение уравнений sin*x* = *m*

1. Если $m > 1$ или $m < -1$, то уравнение $\sin x = m$ решений не имеет.

2. Если $m = 1$, то уравнение $\sin x = 1$ имеет решения $x=\frac{\pi}{2}+2\pi k,\ k\in Z$.

3. Если $m = -1$, то уравнение $\sin x = -1$ имеет решения $x=-\frac{\pi}{2}+2\pi k,\ k\in Z$.

4. Если $m = 0$, то уравнение $\sin x = 0$ имеет решения $x=\pi k,\ k\in Z$.

5. В общем случае, при $|m| < 1$ рассмотрим график функции $y = \sin x$ на отрезке $[-\pi; \pi]$ (рис. 3).

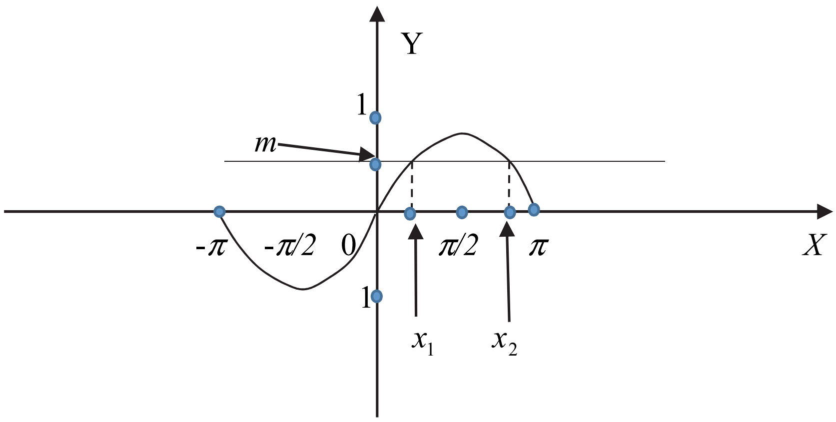


Рис. 3.

На отрезке $[-\pi; \pi]$ уравнение $y = \sin x$ имеет два решения $x_1 = \arcsin m,\ \ x_2 = \pi - \arcsin m$.

Так как функция синус периодическая, то всё множество решений имеет вид:

$$\left[\begin{array}{l} x_k^{(1)} = \arcsin m + 2\pi k, \\ x_n^{(2)} = \pi - \arcsin m + 2\pi n, \quad k, n \in Z. \end{array}\right. \qquad (1)$$

Эти две формулы можно объединить в одну

$$x = (-1)^n \arcsin m + \pi n, \ \ n \in Z. \qquad (2)$$

При чётном n по этой формуле получаем значения корней $x_k^{(1)}$ из первого множества решений уравнения, а при нечётном из второго – $x_n^{(2)}$.

Пример 1. Решите уравнение $\sin x = \dfrac{1}{2}$.

Решение. По формуле (1) имеем:

$$x_1 = \arcsin\frac{1}{2} + 2\pi k = \frac{\pi}{6} + 2\pi k, \ \ k \in Z,$$

$$x_2 = \pi - \arcsin\frac{1}{2} + 2\pi k = \pi - \frac{\pi}{6} + 2\pi k = \frac{5\pi}{6} + 2\pi k,\ \ k \in Z.$$

Ответ: $\frac{\pi}{6} + 2\pi k,\ \ k \in Z$; $\frac{5\pi}{6} + 2\pi k,\ \ k \in Z$.

Пример 2. Решите уравнение $\sin x = \frac{\sqrt{3}}{2}$.

Решение. По формуле (2) имеем:

$$x = (-1)^k \arcsin\left(-\frac{\sqrt{3}}{2}\right) + \pi k = (-1)^k\left(-\frac{\pi}{3}\right) + \pi k,\ \ k \in Z.$$

Ответ: $(-1)^{k+1}\frac{\pi}{3} + \pi k,\ \ k \in Z$.

Пример 3. Решите уравнение $\sin x = 0{,}7$.

Решение. $x = (-1)^k \arcsin 0{,}7 + \pi k,\ \ k \in Z$.

Ответ: $(-1)^k \arcsin 0{,}7 + \pi k,\ \ k \in Z$.

Задание 3. Решите уравнения.

а) $\sin x = \frac{1}{2}$; б) $\sin\frac{x}{2} = 0{,}5$;

в) $\sin\left(4x - \frac{\pi}{6}\right) = -0{,}5$; г) $6\sin^2 x - 5\sin x + 1 = 0$;

д) $6\cos^2 x - 5\sin x + 5 = 0$; е) $\cos 2x + \sin x = 0$.

Занятие 52.

ТРИГОНОМЕТРИЧЕСКИЕ ФУНКЦИИ (продолжение 1)

Свойства и график функции *y* = cos *x*

Определение. Косинусом числа x называется абсцисса точки M_x единичной окружности, такой, что длина дуги с начальной точкой M_0 и конечной точкой M_x равна x.

1. Область определения $D(x) = R$, так как $\forall x \epsilon R\ \exists M_x\colon |\cup M_0 M_x| = x.$

2. Множество значений $E(f) = [-1; 1]$, так как абсциссы точек единичной окружности принадлежит отрезку $[-1; 1]$.

3. Периодичность. Наименьший положительный период $T = 2\pi$, так как длина единичной окружности равна 2π, то точки M_x, $M_{x+2\pi n}$, $n \in Z$ изображаются на единичной окружности одной и той же точкой.

4. Чётность, нечётность. Функция косинус чётная, поэтому $\cos(-x) = \cos x$.

5. Точки пересечения графика с осями координат. Это точки $(\frac{\pi}{2} + \pi n; 0)$, $n \in Z$ и $(0; 1)$.

6. Промежутки знакопостоянства. $\cos x > 0$ при $x \in (-\frac{\pi}{2} + 2\pi n; \frac{\pi}{2} + 2\pi n)$, $n \in Z$ (1 и 4 четверти); $\cos x < 0$ при $x \in (\frac{\pi}{2} + 2\pi n; \frac{3\pi}{2} + 2\pi n)$, $n \in Z$ (2 и 3 четверти).

7. Наибольшее значение. $\cos x = 1$ при $x = 2\pi n, n \in Z$.

8. Наименьшее значение. $\cos x = -1$ при $x = \pi + 2\pi n, n \in Z$.

9. Функция возрастает при $x \in [\pi + 2\pi n; 2\pi + 2\pi n], n \in Z$.

10. Функция убывает при $x \in [2\pi n; \pi + 2\pi n], n \in Z$.

11. График функции – синусоида, сдвинутая на $\frac{\pi}{2}$ влево.

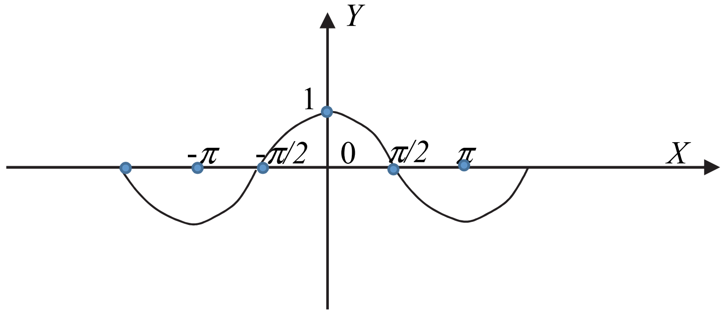


Рис. 1.

Арккосинус числа

Определение. arccos*m* – это число (угол) из промежутка $[0;\pi]$, косинус которого равен *m*.

Из определения следуют свойства (рис. 2):

1. $-1 \le m \le 1$,
2. $0 \le \arccos m \le \pi$,
3. $\cos(\arccos m) = m, \ |m| \le 1$.
4. $\arccos(-m) = \pi - \arccos m$.

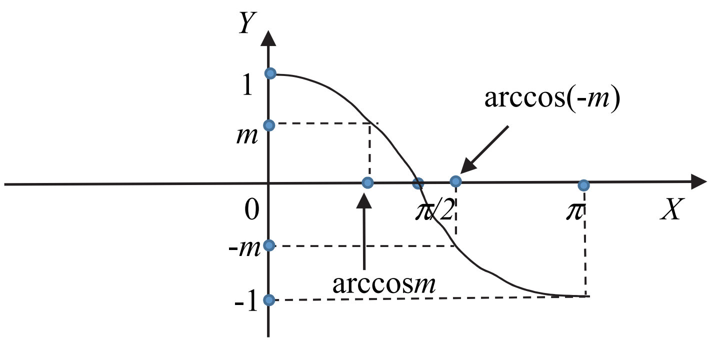


Рис. 2.

Вычислим несколько значений арккосинуса.

1. $\arccos\frac{\sqrt{3}}{2}=\frac{\pi}{6}$, так как $\cos\frac{\pi}{6}=\frac{\sqrt{3}}{2}$, $\frac{\pi}{6}\in[0;\pi]$.

2. $\arccos\frac{1}{2}=\frac{\pi}{3}$, так как $\cos\frac{\pi}{3}=\frac{1}{2}$, $\frac{\pi}{3}\in[0;\pi]$.

3. $\arccos\left(-\frac{\sqrt{3}}{2}\right)=\pi-\arccos\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)=\pi-\frac{\pi}{6}=\frac{5\pi}{6}$, так как $\cos\frac{5\pi}{6}=-\frac{\sqrt{3}}{2}$, $\frac{5\pi}{6}\in[0;\pi]$.

4. $\arccos\left(-\frac{1}{2}\right)=\pi-\arccos\left(\frac{1}{2}\right)=\pi-\frac{\pi}{3}=\frac{2\pi}{3}$, так как $\cos\frac{2\pi}{3}=-\frac{1}{2}$, $\frac{2\pi}{3}\in[0;\pi]$.

Таблица некоторых частных значений арккосинуса

m	-1	$-\frac{\sqrt{3}}{2}$	$-\frac{\sqrt{2}}{2}$	$-\frac{1}{2}$	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	1
$\arccos m$	π	$\frac{5\pi}{6}$	$\frac{3\pi}{4}$	$\frac{2\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{6}$	0

Задание 1. Найдите значение суммы.

а) $\arccos\left(-\frac{\sqrt{2}}{2}\right)+\arccos\left(-\frac{\sqrt{3}}{2}\right)$; б) $\arcsin\frac{1}{2}+\arccos\frac{1}{2}$;

в) $\arcsin(-1)+\arccos(-1)$; г) $\arccos 0+\arcsin\left(-\frac{1}{2}\right)+\arccos\frac{\sqrt{3}}{2}$.

Задание 2. Найдите *x*.

а) $\arcsin 2x=-\frac{\pi}{6}$; б) $\arcsin(1 - x) = 0$; в) $\arccos x=\frac{\pi}{3}$;

г) $\arccos\frac{x}{2}=\frac{3\pi}{2}$; д) $\arccos(x-1)=\frac{\pi}{2}$; е) $\arccos 2x = a$.

Решение уравнений cos$x$ = m

1. Если $m > 1$ или $m < -1$, то уравнение cos$x$ = m решений не имеет.
2. Если m = 1, то уравнение cos$x$ = 1 имеет решения $x = 2\pi k,\ k \in Z$.
3. Если m = -1, то уравнение cos$x$ = -1 имеет решения $x = \pi + 2\pi k,\ k \in Z$.
4. Если m = 0, то уравнение cos$x$ = 0 имеет решения $x = \dfrac{\pi}{2} + \pi k,\ k \in Z$.
5. В общем случае, при $|m| < 1$ рассмотрим график функции $y = \cos x$ на отрезке $[-\pi;\ \pi]$ (рис. 3).

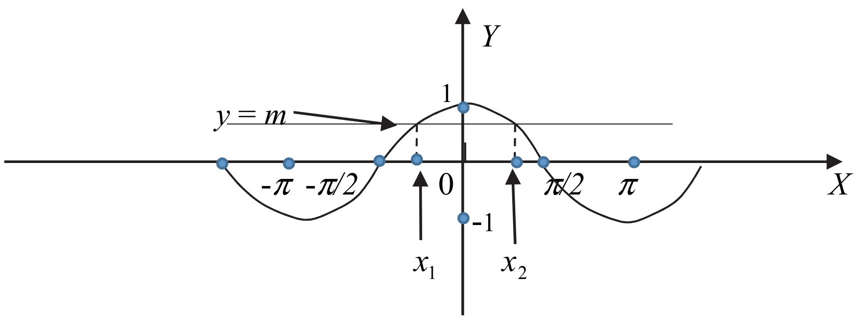


Рис. 3.

На отрезке $[-\pi;\ \pi]$ уравнение $y = \cos x$ имеет два решения $x_1 = -\arccos\ m,\ x_2 = \arccos\ m$.

Так как функция косинус периодическая, всё множество решений уравнения описывается формулой

$$x = \pm\arccos m + 2\pi n,\ \ n \in Z.$$

Пример 1. Решите уравнение $\cos x = \dfrac{\sqrt{3}}{2}$.

Решение. По формуле находим

$$x = \pm \arccos \frac{\sqrt{3}}{2} + 2\pi k = \pm \frac{\pi}{6} + 2\pi k,\ \ k \in Z\ .$$

Ответ: $\pm \frac{\pi}{6} + 2\pi k,\ \ k \in Z$.

Пример 2. Решите уравнение $\cos x = -\frac{\sqrt{2}}{2}$.

Решение. По формуле находим

$$x = \pm \arccos\left(-\frac{\sqrt{2}}{2}\right) + 2\pi k,\ \ k \in Z\ .$$

$$\arccos\left(-\frac{\sqrt{2}}{2}\right) = \pi - \arccos \frac{\sqrt{2}}{2} = \pi - \frac{\pi}{4} = \frac{3\pi}{4}\ .$$

Поэтому $x = \pm \frac{3\pi}{4} + 2\pi k,\ \ k \in Z$.

Ответ: $\pm \frac{3\pi}{4} + 2\pi k,\ \ k \in Z$.

Задание 3. Решите уравнение.

а) $\cos x = -\frac{1}{2}$;

б) $\cos 2x = \frac{1}{2}$;

в) $\cos x = 0{,}7$;

г) $\cos \frac{x}{3} = \frac{\sqrt{2}}{2}$;

д) $\cos(2x - 1) = -\frac{1}{2}$;

е) $2 \sin x \cos 3x - \sin x = 0$;

ж) $\sin 2x + \cos x = 0$;

з) $1 + \cos 2x + \cos x = 0$.

Занятие 53.

ТРИГОНОМЕТРИЧЕСКИЕ ФУНКЦИИ (продолжение 2)

Свойства и график функции *y* = tg *x*

Определение 1. $\operatorname{tg} x = \frac{\sin x}{\cos x},\ x \neq \frac{\pi}{2} + \pi n,\ n \in Z$.

1. Область определения. $D(f)$: $x \neq \frac{\pi}{2} + \pi n,\ n \in Z$.

2. Множество значений. $E(f) = R$.

3. Функция периодическая. Основной период $T = \pi$.

Доказательство. $\forall x \in D(y) : \operatorname{tg}(x+\pi) = \frac{\sin(x+\pi)}{\cos(x+\pi)} =$

$= \frac{-\sin x}{-\cos x} = \frac{\sin x}{\cos x} = \operatorname{tg}(x)$.

$\operatorname{tg}(x-\pi) = \frac{\sin(x-\pi)}{\cos(x-\pi)} = \frac{-\sin x}{-\cos x} = \frac{\sin x}{\cos x} = \operatorname{tg}(x)$.

$\operatorname{tg} x = 0 \Rightarrow \sin x = 0 \Rightarrow x = \pi n,\ n \in Z \Rightarrow \pi -$ наименьший период.

4. Чётность, нечётность. Функция тангенс нечётная, так как:

1) $D(f)$ симметрична относительно начала координат (0; 0);

2) $\operatorname{tg}(-x) = \frac{\sin(-x)}{\cos(-x)} = \frac{-\sin x}{\cos x} = -\operatorname{tg}(x)$.

5. Точки пересечения с осями.

$\operatorname{tg} x = 0 \Rightarrow \sin x = 0 \Rightarrow x = \pi n,\ n \in Z;\ x = 0 \Rightarrow y = 0$.

6. Промежутки знакопостоянства. tg x > 0 при (1-я и 3-я четверти); tg x < 0 при $x \in \left(-\frac{\pi}{2} + \pi n; \pi n\right),\ n \in Z$ (2-я и 4-я четверти).

7. Функция не имеет наименьшего и наибольшего значений.

8. Промежутки возрастания и убывания. Возрастает в каждом из интервалов $\left(-\frac{\pi}{2}+\pi n; \frac{\pi}{2}+\pi n\right)$, $n \in Z$.

Доказательство. Докажем возрастание функции $y = \operatorname{tg} x$ на полуинтервале $\left[0; \frac{\pi}{2}\right)$. Выберем два значения x, такие, что $0 \le x_1 < x_2 < \frac{\pi}{2}$. Имеем: $0 \le \sin x_1 < \sin x_2 < 1$; $1 \ge \cos x_1 > \cos x_2 > 0$; $0 < \frac{1}{\cos x_1} < \frac{1}{\cos x_2}$; $\frac{\sin x_1}{\cos x_1} < \frac{\sin x_2}{\cos x_2}$, т. е. $\operatorname{tg} x_1 < \operatorname{tg} x_2$.

Аналогично доказывается для $x \in \left(-\frac{\pi}{2}; 0\right]$.

9. Асимптоты. Имеются вертикальные асимптоты $x = \frac{\pi}{2} + \pi n, n \in Z$.

10. График функции. График функции – тангенсоида (рис. 1).

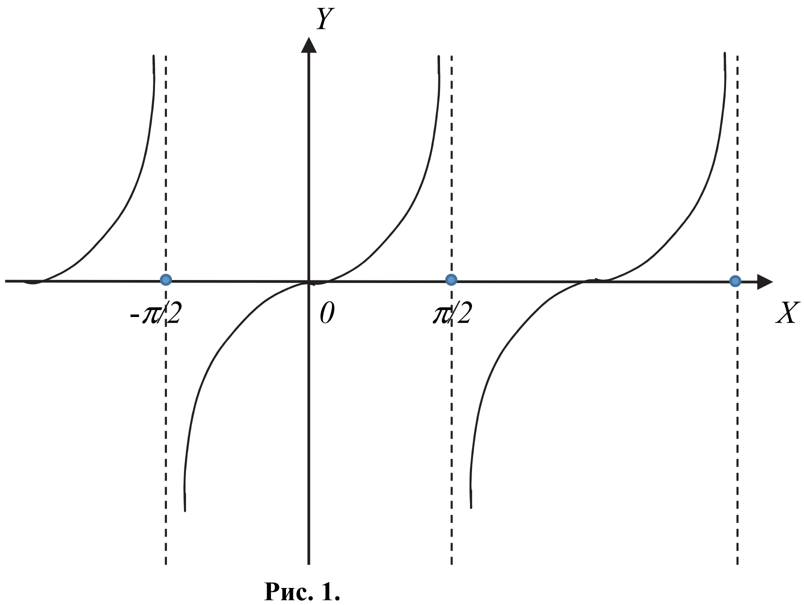


Рис. 1.

Арктангенс числа

Определение 2. arctg$m$ – это число (угол) из интервала $\left(-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right)$, тангенс которого равен m.

Из определения арктангенса следуют свойства (рис. 2):

1. $-\infty < m < \infty$, $m \in R$;
2. $-\frac{\pi}{2} \le \operatorname{arctg} m \le \frac{\pi}{2}$;
3. $\operatorname{tg}(\operatorname{arctg} m) = m$;
4. arctg(-m) = -arctg$m$.

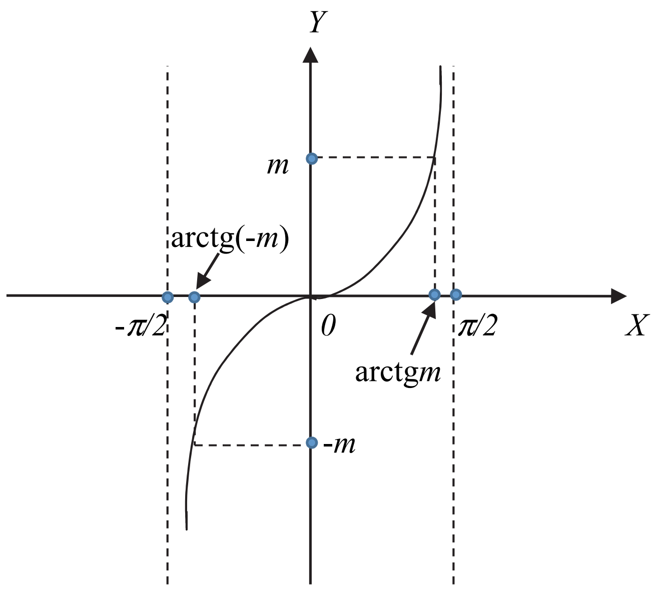


Рис. 2.

Вычислим несколько значений арктангенса:

1. $\operatorname{arctg}1 = \frac{\pi}{4}$, так как $\operatorname{tg}\frac{\pi}{4} = 1$, $\frac{\pi}{4} \in \left(-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right)$.

2. $\operatorname{arctg}\sqrt{3} = \frac{\pi}{3}$, так как $\operatorname{tg}\frac{\pi}{3} = \sqrt{3}$, $\frac{\pi}{3} \in \left(-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right)$.

3. $\operatorname{arctg}\left(-\frac{\sqrt{3}}{3}\right) = -\frac{\pi}{6}$, так как $\operatorname{tg}\left(-\frac{\pi}{6}\right) = -\frac{\sqrt{3}}{3}$, $\frac{\pi}{6} \in \left(-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right)$.

4. $\operatorname{arctg}(-1) = -\frac{\pi}{4}$, так как $\operatorname{tg}\left(-\frac{\pi}{4}\right) = -1$, $-\frac{\pi}{4} \in \left(-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right)$.

Таблица некоторых частных значений арктангенса

m	$-\sqrt{3}$	-1	$-\frac{\sqrt{3}}{3}$	0	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	1	$\sqrt{3}$
arctg$m$	$-\frac{\pi}{3}$	$-\frac{\pi}{4}$	$-\frac{\pi}{6}$	0	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$

Задание 1. Найдите значение суммы.

а) $\operatorname{arctg}\sqrt{3} + \operatorname{arctg}1$; б) $\operatorname{arctg}\frac{1}{\sqrt{3}} + \arccos\frac{1}{2}$;

в) $\operatorname{arctg}1 + \arccos 1 + \arcsin 1$; г) $\operatorname{arctg}\left(-\sqrt{3}\right) + \arccos\left(-\frac{1}{2}\right)$.

Решение уравнений tg*x* = *m*

Решение уравнения tg$x$ = m на интервале $\left(-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right)$ есть число $x = \operatorname{arctg} m$ (рис. 3).

Так как функция $y = \operatorname{tg}x$ периодическая с периодом π, то всё множество решений имеет вид $x = \operatorname{arctg} m + \pi k$, $k \in Z$.

Пример 1. Решите уравнение $\operatorname{tg}x = \sqrt{3}$.

Решение. По формуле получаем

$$x = \operatorname{arctg}\sqrt{3} + \pi k = \frac{\pi}{3} + \pi k, \ k \in Z.$$

Ответ: $\frac{\pi}{3} + \pi k, \ k \in Z$.

Пример 2. Решите уравнение tg$x$ = -1.

Решение. $x = \operatorname{arctg}(-1) + \pi k = -\dfrac{\pi}{4} + \pi k,\ \ k \in Z$.

Ответ: $-\dfrac{\pi}{4} + \pi k,\ \ k \in Z$.

Пример 3. Решите уравнение tg2x = 1,7.

Решение. 2x = arctg1,7 + πk,

$x = \dfrac{1}{2}\operatorname{arctg} 1{,}7 + \dfrac{\pi k}{2},\ \ k \in Z$.

Ответ: $\dfrac{1}{2}\operatorname{arctg} 1{,}7 + \dfrac{\pi k}{2},\ \ k \in Z$.

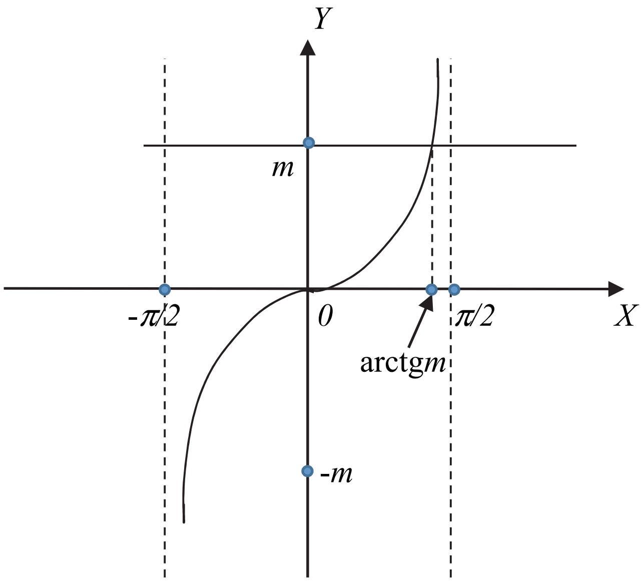


Рис. 3.

Задание 2. Решите уравнение.

а) tg$x$ = 1; б) tg2x = -1; в) $\operatorname{tg} 0{,}5x = -\sqrt{3}$;

г) $\operatorname{tg}^2 x + 5\operatorname{tg} x + 4 = 0$; д) $\operatorname{tg}^2 x - 3\operatorname{tg} x = 0$.

Занятие 54.

ТРИГОНОМЕТРИЧЕСКИЕ ФУНКЦИИ (продолжение 3)

Свойства и график функции *y* = ctg *x*

Определение 1. $\mathrm{ctg}\, x = \dfrac{\cos x}{\sin x}$, $x \ne \pi n,\ n \in Z$.

1. Область определения. $D(f)$: $x \ne \pi n,\ n \in Z$.

2. Множество значений. $E(f) = R$.

3. Функция периодическая. Основной период $T = \pi$.

Доказательство.

$$\forall x \in D(f) : \mathrm{ctg}(x+\pi) = \frac{\cos(x+\pi)}{\sin(x+\pi)} = \frac{-\cos x}{-\sin x} = \frac{\cos x}{\sin x} = \mathrm{ctg}(x).$$

$$\mathrm{ctg}(x-\pi) = \frac{\cos(x-\pi)}{\sin(x-\pi)} = \frac{-\cos x}{-\sin x} = \frac{\cos x}{\sin x} = \mathrm{ctg}(x).$$

$\mathrm{ctg}\, x = 0 \Rightarrow \cos x = 0 \Rightarrow x = \dfrac{\pi}{2} + \pi n,\ n \in Z \Rightarrow \pi$ - наименьший положительный период.

4. Чётность, нечётность. Функция котангенс нечётная, так как:

1) $D(f)$ симметрична относительно начала координат (0; 0);

2) $\mathrm{ctg}(-x) = \dfrac{\cos(-x)}{\sin(-x)} = \dfrac{\cos x}{-\sin x} = -\mathrm{ctg}(x)$.

5. Точки пересечения с осями. $\mathrm{ctg}\, x = 0 \Rightarrow \cos x = 0 \Rightarrow x = \dfrac{\pi}{2} + \pi n,\ n \in Z$; функция не определена при $x = 0$.

6. Промежутки знакопостоянства. ctg x > 0 при $x \in \left(\pi n; \dfrac{\pi}{2} + \pi n\right),\ n \in Z$ (1-я и 3-я четверти); ctg x < 0 при $x \in \left(-\dfrac{\pi}{2} + \pi n; \pi n\right),\ n \in Z$ (2-я и 4-я четверти).

7. Функция не имеет наименьшего и наибольшегое значений.

8. Промежутки возрастания и убывания. Убывает в каждом из интервалов $(\pi n; \pi + \pi n)$, $n \in Z$.

Доказательство. Докажем убывание функции y = ctg$x$ на полуинтервале $\left(0; \dfrac{\pi}{2}\right]$. Выберем два значения x, такие, что $0 < x_1 < x_2 \le \dfrac{\pi}{2}$. Имеем: $0 < \sin x_1 < \sin x_2 \le 1$;

$1 > \cos x_1 > \cos x_2 \ge 0$; $\dfrac{1}{\sin x_1} > \dfrac{1}{\sin x_2} > 0$; $\dfrac{\cos x_1}{\sin x_1} > \dfrac{\cos x_2}{\sin x_2}$,

т. е. $\operatorname{ctg} x_1 > \operatorname{ctg} x_2$.

Аналогично доказывается для $x \in \left[\dfrac{\pi}{2}; \pi\right)$.

9. Асимптоты. Имеются вертикальные асимптоты $x = \pi n, n \in Z$.

10. График функции. График функции – котангенсоида (рис. 1).

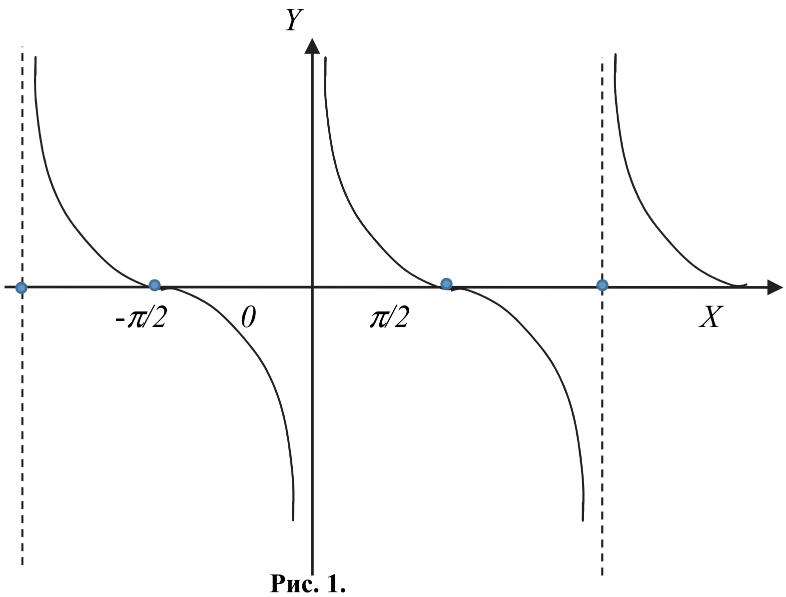


Рис. 1.

Арккотангенс числа

Определение 2. arcctg$m$ – это число (угол) из промежутка (0; π), котангенс которого равен m.

Из определения арккотангенса следуют свойства (рис. 2):

1. $-\infty < m < \infty$, $m \in R$.
2. 0 < arcctg$m$ < π.
3. ctg(arcctg$m$) = m.
4. arcctg(-m) = π - arcctg$m$.

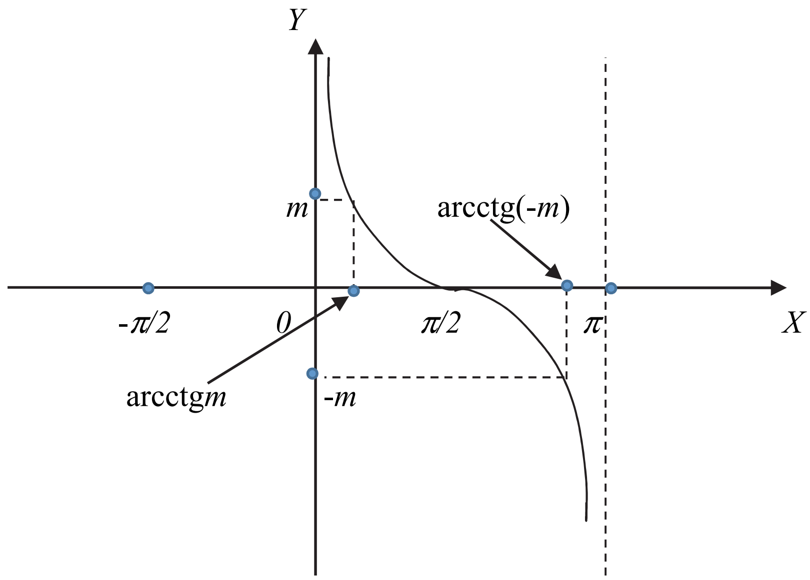


Рис. 2.

Примеры.

1. $\operatorname{arcctg}1 = \dfrac{\pi}{4}$, так как $\operatorname{ctg}\dfrac{\pi}{4} = 1$, $\dfrac{\pi}{4} \in (0, \pi)$.
2. $\operatorname{arcctg}\sqrt{3} = \dfrac{\pi}{6}$, так как $\operatorname{ctg}\dfrac{\pi}{6} = \sqrt{3}$, $\dfrac{\pi}{6} \in (0, \pi)$.

3. $\operatorname{arcctg}\left(-\frac{\sqrt{3}}{3}\right)=\pi-\operatorname{arcctg}\frac{\sqrt{3}}{3}=\frac{2\pi}{3}$, так как

$\operatorname{ctg}\frac{2\pi}{3}=-\frac{\sqrt{3}}{3}$, $\frac{2\pi}{3}\in(0,\pi)$.

Таблица некоторых частных значений арккотангенса

m	$-\sqrt{3}$	-1	$-\frac{\sqrt{3}}{3}$	0	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	1	$\sqrt{3}$
$\operatorname{arcctg} m$	$\frac{5\pi}{6}$	$\frac{3\pi}{4}$	$\frac{2\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{6}$

Задание 1. Найдите значение суммы.

а) $\operatorname{arctg}\sqrt{3}+\operatorname{arcctg}\sqrt{3}$; б) $\operatorname{arcctg}0+\operatorname{arctg}0$;

в) $\operatorname{arcctg}(-1)+\operatorname{arcctg}1$; г) $\operatorname{arcctg}\left(-\sqrt{3}\right)+\operatorname{arcctg}\left(\frac{1}{\sqrt{3}}\right)$.

Задание 2. Вычислите значение выражения.

а) $\operatorname{ctg}(\operatorname{arcctg}2{,}5)$; б) $\operatorname{ctg}(\operatorname{arcctg}(-0{,}2))$;

в) $\operatorname{arctg}\left(\operatorname{ctg}\frac{5\pi}{6}\right)$; г) $\operatorname{arcctg}(\cos 3\pi)$.

Задание 3. Решите уравнение.

а) $\operatorname{arcctg}x=\frac{\pi}{18}$; б) $\operatorname{arcctg}0{,}2x=a$;

в) $\operatorname{arctg}x=\frac{\pi}{4}$; г) $\operatorname{arcctg}(x+1)=0$.

Решение уравнений ctg*x* = *m*

Решение уравнения $\operatorname{ctg} x = m$ на интервале $(0; \pi)$ есть число $x = \operatorname{arcctg} m$ (рис. 3).

Так как функций $y = \operatorname{ctg} x$ периодическая с периодом π, то всё множество решений имеет вид $x = \operatorname{arcctg} m + \pi k$, $k \in Z$.

Пример 1. Решите уравнение $\operatorname{ctg} x = \frac{\sqrt{3}}{3}$.

Решение. По формуле находим решения:

$$x = \operatorname{arcctg}\frac{\sqrt{3}}{3} + \pi k = \frac{\pi}{3} + \pi k,\ \ k \in Z.$$

Ответ: $\frac{\pi}{3} + \pi k,\ \ k \in Z$.

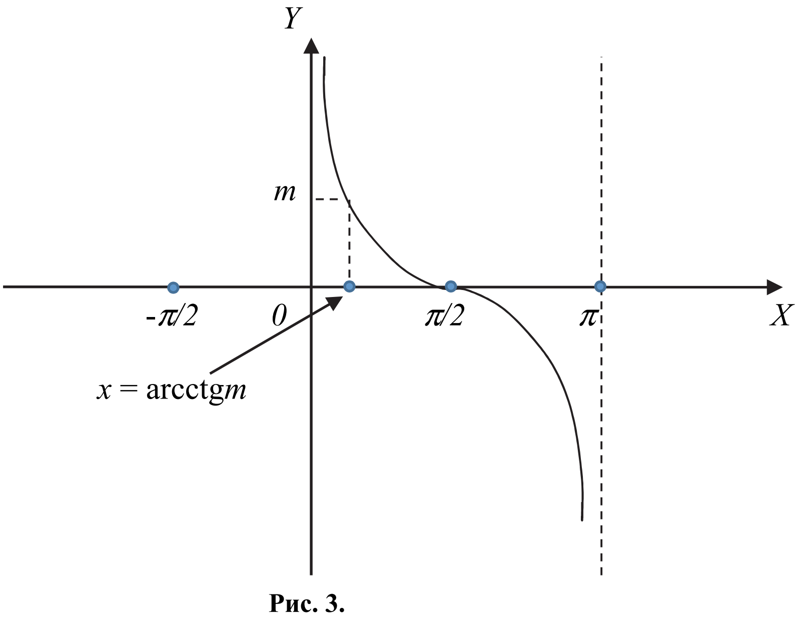


Рис. 3.

Пример 2. Решите уравнение $\operatorname{ctg} x = -\sqrt{3}$.

Решение. $x = \operatorname{arcctg}(-\sqrt{3}) + \pi k,\ k \in Z$,

но $\operatorname{arcctg}(-\sqrt{3}) = \pi - \operatorname{arcctg}\sqrt{3} = \pi - \frac{\pi}{6} = \frac{5\pi}{6}$,

тогда $x = \frac{5\pi}{6} + \pi k,\ k \in Z$.

Ответ: $\frac{5\pi}{6} + \pi k,\ k \in Z$.

Задание 4. Решите уравнение.

а) $\sin x = 0{,}5$;
б) $\sin 2x = \frac{\sqrt{2}}{2}$;
в) $\cos x = \frac{\sqrt{2}}{2}$;
г) $\cos\frac{x}{2} = 0{,}5$;
д) $\cos\frac{x}{3} = -\frac{\sqrt{2}}{2}$;
е) $\cos\left(4x + \frac{\pi}{3}\right) = -\frac{\sqrt{3}}{2}$;
ж) $\operatorname{tg} x = 1$;
з) $\operatorname{ctg} x = 1$;
и) $\operatorname{tg} 2x = -1$;
к) $\operatorname{ctg}\frac{x}{3} = -\frac{\sqrt{3}}{3}$;
л) $\operatorname{tg} 0{,}5x = -\sqrt{3}$;
м) $\operatorname{ctg} 5x = 0$;
н) $8\sin^2 x - 2\cos x = 5$;
о) $3\sin x = 2\cos^2 x$;
п) $\operatorname{tg} x + 3\operatorname{ctg} x = 4$;
р) $\operatorname{tg}^2 x - 3\operatorname{tg} x = 0$.

Упражнение. Докажите, что справедлива формула
$\arcsin a + \arcsin b = \arcsin\left(a\sqrt{1-b^2} + b\sqrt{1-a^2}\right)$.

Доказательство: Пусть $\arcsin a = x$, $\arcsin b = y$. Тогда необходимо определить, чему равно $x + y$. Имея в виду, что $\sin(x+y) = \sin x\cos y + \sin y\cos x$. Так как $\sin x = a$. $\sin y = b$, то получим $\sin(x+y) = \left(a\sqrt{1-b^2} + b\sqrt{1-a^2}\right)$.
Отсюда $x + y = \arcsin\left(a\sqrt{1-b^2} + b\sqrt{1-a^2}\right)$.

Поэтому $\arcsin a + \arcsin b = \arcsin\left(a\sqrt{1-b^2} + b\sqrt{1-a^2}\right)$.

Что и требовалось доказать.

Задание 5.

1. Верно ли что: $\arcsin a + \arcsin a = \frac{\pi}{2}$?
2. Найдите разность $\arcsin a - \arcsin b$.
3. Докажите, что справедлива формула:
$\arccos a + \arccos b = \arccos\left(a \cdot b - \sqrt{1-b^2} \cdot \sqrt{1-a^2}\right)$.
4. Найдите разность $\arccos a - \arccos b$.
5. Докажите, что справедлива формула:
$\mathrm{arctg}\, a + \mathrm{arcctg}\, b = \mathrm{arctg}\left(\frac{a+b}{1-ab}\right)$.

Задание 6. Проверьте справедливость следующих соотношений:

$\arcsin a$	$\arccos\sqrt{1-a^2}$	$\mathrm{arctg}\frac{a}{\sqrt{1-a^2}}$	$\mathrm{arcctg}\frac{\sqrt{1-a^2}}{a}$
$\arcsin\sqrt{1-a^2}$	$\arccos a$	$\mathrm{arctg}\frac{\sqrt{1-a^2}}{a}$	$\mathrm{arcctg}\frac{a}{\sqrt{1-a^2}}$
$\arcsin\frac{a}{\sqrt{1+a^2}}$	$\arccos\frac{1}{\sqrt{1+a^2}}$	$\mathrm{arctg}\, a$	$\mathrm{arcctg}\frac{1}{a}$
$\arcsin\frac{1}{\sqrt{1+a^2}}$	$\arccos\frac{a}{\sqrt{1+a^2}}$	$\mathrm{arctg}\frac{1}{a}$	$\mathrm{arcctg}\, a$
$\arcsin\frac{\sqrt{a^2-1}}{a}$	$\arccos\frac{1}{a}$	$\mathrm{arctg}\sqrt{a^2-1}$	$\mathrm{arcctg}\frac{1}{\sqrt{a^2-1}}$
$\arcsin\frac{1}{a}$	$\arccos\frac{\sqrt{a^2-1}}{a}$	$\mathrm{arctg}\frac{1}{\sqrt{a^2-1}}$	$\mathrm{arcctg}\sqrt{a^2-1}$

Занятие 55.

ЭЛЕМЕНТЫ ГЕОМЕТРИИ

Решение прямоугольных треугольников

Рассмотрим прямоугольный треугольник ABC. Пусть $\hat{C} = 90°$; $|AB| = c$; $|AC| = b$; $|BC| = a$; $\hat{A} = \alpha$ (C – гипотенуза, a и b – катеты), выберем прямоугольную систему координат так, что начало координат совпадает с точкой A, катет b лежит на оси OX (рис. 1). На гипотенузе AB возьмём точку E такую, что $|AE| = 1$. Проведём через точку E дугу радиуса 1 с центром в точке A. Имеем $\Delta ABC \sim \Delta AED$ (треугольники ABC и AED подобны). Из подобия треугольников имеем: $\frac{y_1}{a} = \frac{1}{c}$, $\frac{x_1}{b} = \frac{1}{c}$, где $y_1 = \sin\alpha$, $x_1 = \cos\alpha$. Тогда

$$\begin{aligned} a &= c \cdot \sin\alpha, \\ b &= c \cdot \cos\alpha. \end{aligned} \qquad (1)$$

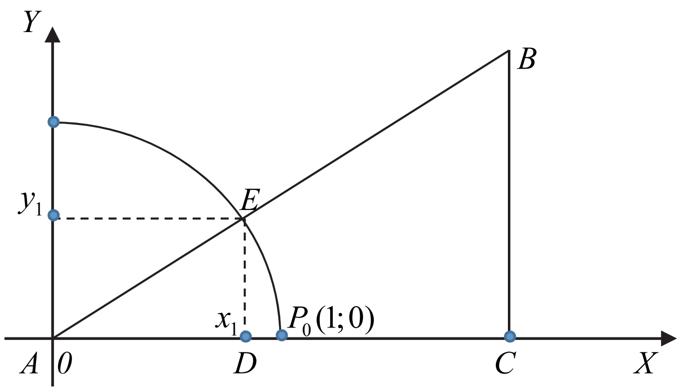


Рис. 1.

Катет прямоугольного треугольника равен гипотенузе, умноженной на косинус прилежащего угла или на синус противолежащего угла.

Из формул (1) имеем:

$$\left.\begin{aligned} c &= \frac{b}{\cos\alpha} \\ c &= \frac{a}{\sin\alpha} \end{aligned}\right. \Rightarrow \ tg\,\alpha = \frac{a}{b} \Rightarrow \ a = b\cdot\operatorname{tg}\alpha \ .$$

Пример 1. Дано: a, b и $\hat{C} = 90°$. Найдите c, $\hat{A}$, $\hat{B}$.

Решение. $\operatorname{tg}\hat{A} = \frac{a}{b} \Rightarrow \hat{A} = \operatorname{arctg}\left(\frac{a}{b}\right)$, $\hat{B} = 90° - \hat{A}$.

$c^2 = a^2 + b^2$ (по теореме Пифагора) или $c = \frac{b}{\sin\alpha}$.

Пример 2. Дано: a, c и $\hat{C} = 90°$. Найдите b, $\hat{A}$, $\hat{B}$.

Решение. $\sin\hat{A} = \frac{a}{c} \Rightarrow \hat{A} = \arcsin\frac{a}{c}$, $\hat{B} = 90° - \hat{A}$, $b = c\cdot\sin\hat{B}$, $b = c\cdot\cos\hat{A}$.

Пример 3. Дано: a, $\hat{A}$, $\hat{C} = 90°$. Найдите c, b, $\hat{B}$.

Решение. $\hat{B} = 90° - \hat{A}$, $c = \frac{a}{\sin\hat{A}}$, $c = \frac{a}{\cos\hat{B}}$, $b^2 = c^2 - a^2$, $b = c\cdot\cos\hat{A}$.

Пример 4. Дано: c, $\hat{A}$, $\hat{C} = 90°$. Найдите $\hat{B}$, a, b.

Решение. $\hat{B} = 90° - \hat{A}$, $a = c\cdot\sin\hat{A}$, $a = c\cdot\cos\hat{B}$, $b^2 = c^2 - a^2$, $b = c\cdot\sin\hat{B}$.

Задание 1. В прямоугольном треугольнике катеты равны 15 см и 20 см. Найдите длину медианы, проведенной из прямого угла.

Задание 2. В прямоугольном треугольнике катеты равны 6 см и 8 см. Найдите радиус вписанной окружности.

Задание 3. В прямоугольном треугольнике гипотенуза равна c, острый угол равен α. Найдите биссектрису прямого угла.

Задание 4. Вершина горы видна из некоторой точки под углом $\alpha = 36^0 17'$. При приближении к горе на расстояние c = 236 м вершина видна под углом $\beta = 38^0 23'$. Найдите высоту горы.

вписанный 1. inscribed; 2. inscrit; 3. inscrito; 4. eingeschrieben; 5. 发言者了; 6.

описанный 1. sircumscribed; 2. circonscrit; 3. circunscrito; 4. umschvieben; 5. 描述; 6.

Занятие 56.

ЭЛЕМЕНТЫ ГЕОМЕТРИИ (продолжение 1)

Теорема косинусов

Теорема. В треугольнике квадрат стороны равен сумме квадратов двух других сторон без удвоенного произведения этих сторон на косинус угла между ними.

Могут быть два случая:

Случай 1. $\hat{A} < 90°$ (рис. 1).

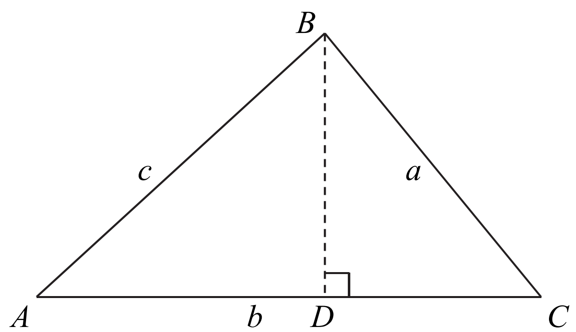


Рис. 1.

$a^2 = b^2 + c^2 - 2bc\cos\hat{A}$.

Доказательство. Обозначим $|AD| = x$, $|DC| = b–x$. Тогда из ΔABD по теореме Пифагора

$$|BD|^2 = c^2 - x^2, \qquad (1)$$

а из ΔBCD

$$|BD|^2 = a^2 - (b-x)^2 = a^2 - b^2 - 2bx - x^2. \qquad (2)$$

Приравнивая правые части равенств (1) и (2), получаем

$$a^2 = b^2 + c^2 - 2bx. \qquad (3)$$

Из ΔABD $\quad x = c\cos\hat{A}$. Подставляя полученное выражение в (3), имеем: $a^2 = b^2 + c^2 - 2bc\cos\hat{A}$.

Что и требовалось доказать.

Случай 2. $\hat{A} > 90°$ (рис. 2).

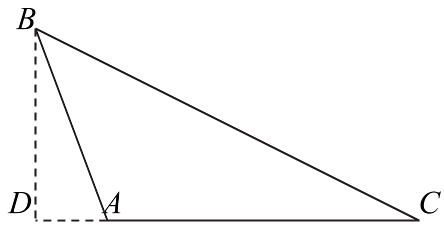


Рис. 2.

$$a^2 = b^2 + c^2 - 2bc\cos\hat{A}. \qquad (4)$$

Докажите самостоятельно.

Формулы для вычисления площади треугольника

$$S_\Delta = \frac{|AC| \cdot |BD|}{2}, \qquad (5)$$

где $|BD|$ – высота треугольника (рис. 3).

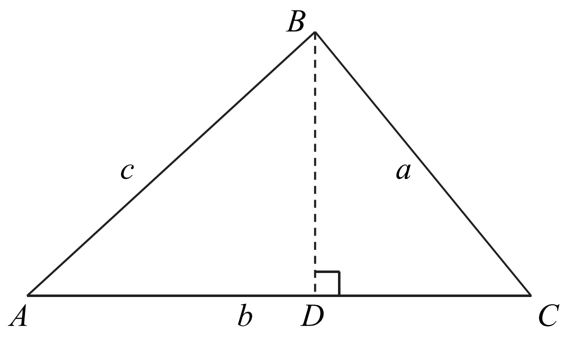


Рис. 3.

Но $|BD| = |AB| \cdot \sin \hat{A}$, тогда

$$S_{\Delta} = \frac{|AC| \cdot |AB| \sin \hat{A}}{2}. \qquad (6)$$

Формула Герона

$$S_{\Delta} = \sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}, \qquad (7)$$

где a, b, c – длины сторон треугольника, а $p = \frac{a+b+c}{2}$ – полупериметр треугольника.

Теорема синусов

Пусть a, b, c – длины сторон треугольника ABC (рис. 4).

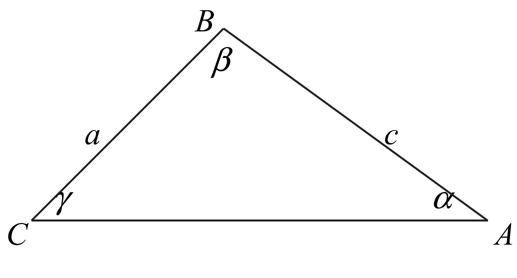


Рис. 4.

Тогда $\dfrac{a}{\sin\alpha}=\dfrac{b}{\sin\beta}=\dfrac{c}{\sin\gamma}$.

Доказательство.

По формуле (6) имеем:

$$S_\Delta=\frac{ab\sin\gamma}{2}=\frac{bc\sin\alpha}{2}=\frac{ac\sin\beta}{2}.$$

Из этих равенств следует, $ab\sin\gamma=bc\sin\alpha=ac\sin\beta$,

или $\dfrac{a}{\sin\alpha}=\dfrac{b}{\sin\beta}=\dfrac{c}{\sin\gamma}$.

Что и требовалось доказать.

Следствие. Радиус описанной окружности равен:

$$R=\frac{a}{2\sin\alpha}.$$

Задание 1. В прямоугольном треугольнике ABC найдите $\hat{B}$, c, b, если a = 18,7, $\hat{A}=65°$.

Задание 2. В треугольнике ABC $\hat{C}=90°$, $|CB|$ = 4,33, $|AB|$ = 13,9. Найдите $\hat{A}$, $\hat{B}$.

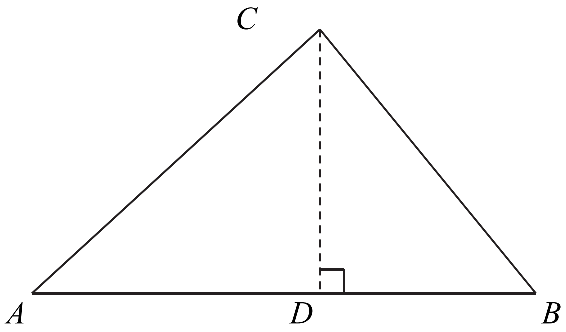
Задание 3. В треугольнике ABC $|AC|$ = 97,5, $\hat{A}=120°$, $\hat{C}=30°$. Найдите $\hat{B}$, $|CB|$, $|AB|$.

Задание 4. Найдите величину угла при вершине равнобедренного треугольника, если его боковая сторона равна 6,6 см, а основание равно 3 см.

Задание 5. Отношение трех сторон $a:b:c=18:26:35$. На какие части делит медиана угол α?

Задание 6. Даны стороны a, b и угол $\hat{C}=120°$. Найдите величины всех оставшихся углов, длины медиан, высот, длину третьей стороны.

Задание 7.



Докажите, что в прямоугольном треугольнике (угол C – прямой) справедливы следующие утверждения:

1. В прямоугольном треугольнике треугольники ABC, ACD и CBD подобны;
2. $h_c = \sqrt{a_1 \cdot b_1}$, где $h_c = CD$ – высота, опущенная на гипотенузу, a_1, b_1 – проекции катетов на гипотенузу соответственно AD и BD.
3. $l_a = \dfrac{2bc\cos\frac{\alpha}{2}}{b+c}$, где l_a – длина биссектрисы, проведенной из угла A, равному α;
4. $l_a^2 = bc - mn$, где m, n – отрезки, на которые биссектриса l_a делит противоположную сторону CB;
5. $m_a = \dfrac{1}{2}\sqrt{2b^2 + 2c^2 - a^2}$, где m_a – медиана, проведенная из угла A.

Задание 8. Докажите, что:

1. В равнобедренном треугольнике сумма расстояний от любой точки основания до боковых сторон равна высоте, проведенной к боковой стороне.
2. В равностороннем треугольнике сумма расстояний от любой точки внутри треугольника до всех сторон равна высоте.

равносторонний 1. equilateral; 2. équilatéral;
3. equilátero; 4. gleichseitiges; 5. 等边; 6.
равнобедренный 1. isosceles; 2. isosèle; 3. isósceles;
4. gleichschenkliges; 5. 等腰; 6.

Занятие 57.

ОБРАТНАЯ ФУНКЦИЯ

Пусть дана функция $y = f(x)$, т.е. дано соответствие между множествами $D(f)$ и $E(f)$, такое, что каждому значению $x \in D(f)$ соответствует только одно значение $y \in E(f)$.

Если каждому значению $y \in E(f)$ соответствует только одно значение $x \in D(f)$, то обратное соответствие тоже функция.

Такая функция называется обратной к функции $f(x)$. Обозначим её через φ. Если функция φ есть обратная по отношению к f, то функция f есть обратная по отношению к функции φ.

Для взаимообратных функций f и φ имеют место соотношения:

$$D(f) = E(\varphi),\ f(\varphi(x)) = x,\ x \in D(\varphi),$$
$$E(f) = D(\varphi),\ \varphi(f(x)) = x,\ x \in D(f).$$

Рассмотрим функцию $y = f(x)$ на интервале $(a; b)$.
Пусть на интервале $(a; b)$ функция $y = f(x)$ монотонно возрастает (рис. 1). Это значит, что для любых значений x_1 и x_2, таких, что $a < x_1 < x_2 < b$, выполняется $f(x_1) < f(x_2)$. Из этого следует, что разным значениям аргумента $x \in (a; b)$ соответствуют разные значения функции $y \in \left(f(a); f(b)\right)$. Значит обратное соответствие тоже функция.

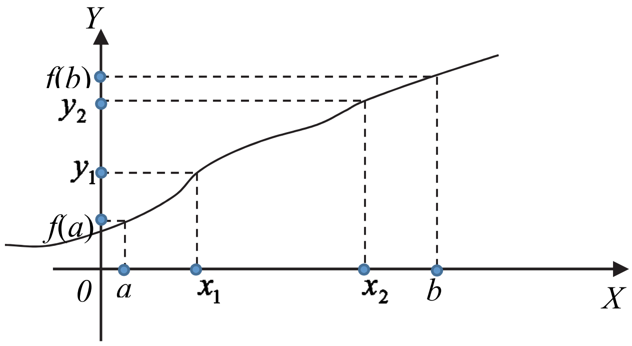


Рис. 1.

Аналогично можно сказать и о функции $y = f(x)$, если она монотонно убывает на интервале (a; b) (рис. 2).

Если функция $y = f(x)$ монотонная, то она имеет обратную функцию $y = \varphi(x)$.

$$a < x_1 < x_2 < b,\ f(x_1) > f(x_2).$$

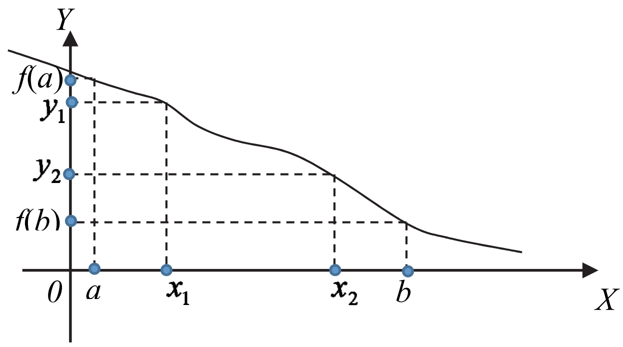


Рис. 2.

Пример. Дана функция $y = 2x - 3$. Найдите обратную функцию.

Решение. Функция $y = 2x - 3$ монотонная. Следовательно, она имеет обратную. Найдем формулу обратной функции.

Из формулы $y = 2x - 3$ найдем x. $x = \frac{y+3}{2}$. Так как функцию принято обозначать через y, а аргумент через x, то формула для обратной функции имеет вид $y = \frac{x+3}{2}$.

Функции $y = 2x - 3$ и $y = \frac{x+3}{2}$ – взаимообратные функции. Для взаимообратных функций f и φ имеют место равенства: $D(f) = E(\varphi)$, $E(f) = D(\varphi)$. Тогда, если точка $A(a; b)$ принадлежит графику функции $y = f(x)$, то точка $B(b; a)$ принадлежит графику функции $y = \varphi(x)$. Но точки $A(a; b)$ и $B(b; a)$ симметричны относительно прямой $y = x$ (биссектрисы 1-й и 3-й четвертей), следовательно, и графики взаимообратных функций симметричны относительно прямой $y = x$.

На рис. 3 и 4 изображены примеры графиков взаимообратных функций.

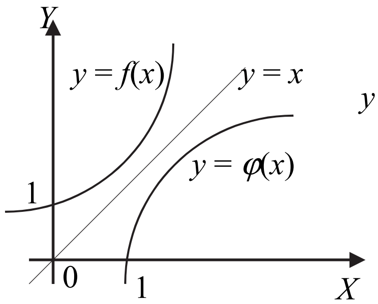


Рис. 3.

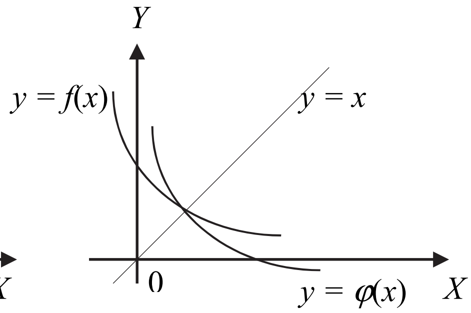


Рис. 4.

Занятие 58.

ОБРАТНЫЕ ТРИГОНОМЕТРИЧЕСКИЕ ФУНКЦИИ

Функция арксинус

Функция $y = \sin x$ не монотонна на R. $\left[-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right]$ – один из промежутков монотонности. На этом отрезке существует функция, обратная к функции $y = \sin x$. Эта обратная функция обозначается $y = \arcsin x$.

Таким образом, $y = \arcsin x \Leftrightarrow \begin{cases} |x| \le 1, \\ |\arcsin x| \le \frac{\pi}{2}, \\ \sin(\arcsin x) = x. \end{cases}$

График обратной функции симметричен графику прямой функции относительно биссектрисы 1 и 3 координатных углов. График функции $y = \arcsin x$ изображен на рис. 1.

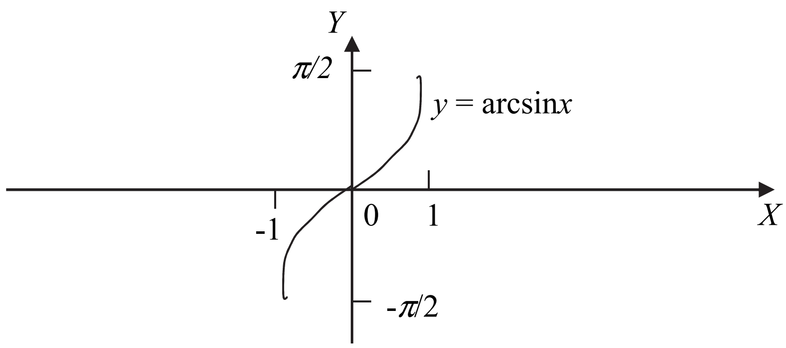


Рис. 1.

Свойства функции $y = \arcsin x$

1. Область определения $D(\arcsin) = [-1; 1]$.

2. Область значений $E(\arcsin) = \left[-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right]$.

3. $y = \arcsin x$ – нечётная функция $\arcsin(-x) = -\arcsin x$, $\forall x \in D(\arcsin)$.

4. $\arcsin x = 0$, если $x = 0$ – нуль функции.

5. $\arcsin x > 0$, если $x \in$ (0; 1].

6. $\arcsin x < 0$, если $x \in$ [-1; 0).

7. $\arcsin x$, возрастает от $-\frac{\pi}{2}$ до $\frac{\pi}{2}$ во всей области определения.

8. $\arcsin x = \frac{\pi}{2}$ при $x = 1$ – точка максимума.

$\arcsin x = -\frac{\pi}{2}$ при $x = -1$ – точка минимума.

Некоторые значения арксинуса приведены в таблице занятия 51.

Задание 1. Найдите область определения функции.

а) $f(x) = \arcsin(x - 1)$; б) $f(x) = \arcsin 2x$;

в) $\varphi(x) = \arcsin(2 - t)$; г) $y = \arcsin\frac{x-3}{2}$.

Функция арккосинус

Функция $y = \cos x$ не монотонна на R. $[0; \pi]$ – один из промежутков монотонности. На этом отрезке существует функция, обратная к функции $y = \cos x$. Эта обратная функция обозначается $y = \arccos x$.

Таким образом, $y = \arccos x \Leftrightarrow \begin{cases} |x| \le 1, \\ 0 \le \arccos x \le \pi, \\ \cos(\arccos x) = x. \end{cases}$

График обратной функции симметричен графику прямой функции относительно биссектрисы 1 и 3 координатных углов (рис. 2).

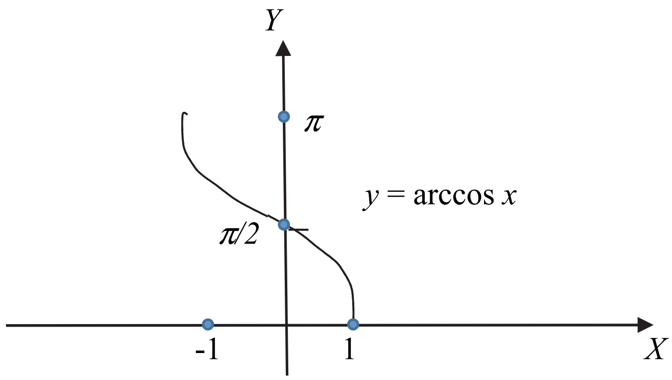


Рис. 2.

Свойства функции *y* = arccos *x*

1. Область определения. $D(\arccos) = [-1; 1]$.
2. Множество значений. $E(\arccos) = [0; \pi]$.
3. $\arccos x$ – функция общего вида и $\arccos(-x) = \pi - \arccos x$, $\forall x \in D(\arccos)$.
4. $\arccos x = 0$, если $x = 1$ – нуль функции.
5. $\arccos x > 0$ для всех $x \in [-1; 1]$.
6. $\arccos x$ убывает от π до 0 во всей области определения.
7. $\arccos x = \pi$ при $x = -1$ – точка максимума.
   $\arccos x = 0$ при $x = 1$ – точка минимума.

Некоторые значения арккосинуса приведены в таблице (см. занятие 51.)

Функция арктангенс

Один из интервалов монотонности функции $y = \operatorname{tg} x$ – это интервал $\left(-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right)$. На этом интервале существует функция, обратная к функции $y = \operatorname{tg} x$. Эта обратная функция обозначается $y = \operatorname{arctg} x$.

Таким образом, $y = \operatorname{arctg} x \Leftrightarrow \begin{cases} x \in R, \\ -\frac{\pi}{2} < \operatorname{arctg} x < \frac{\pi}{2}, \\ \operatorname{tg}(\operatorname{arctg} x) = x. \end{cases}$

График обратной функции симметричен графику прямой функции относительно биссектрисы 1 и 3 координатных углов (рис. 3).

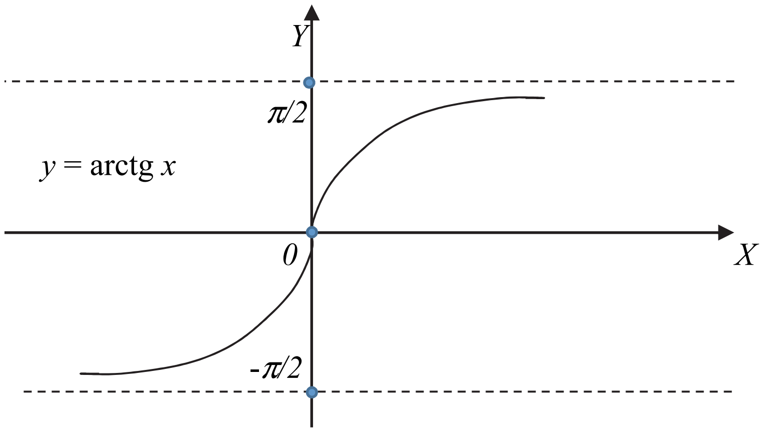


Рис. 3.

Свойства функции *y* = arctg *x*

1. Область определения функции $D(\operatorname{arctg}) = R$.
2. Область значений функции $E(\operatorname{arctg}) = \left(-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right)$.
3. $\operatorname{arctg} x$ – нечётная функция. $\operatorname{arctg}(-x) = -\operatorname{arctg} x$.
4. $\operatorname{arctg} x = 0$, если $x = 0$ – нуль функции.

5. $\operatorname{arctg} x > 0$ для всех $x \in (0; \infty)$.
6. $\operatorname{arctg} x < 0$ для всех $x \in (-\infty; 0)$.
7. $\operatorname{arctg} x$ возрастает от $-\dfrac{\pi}{2}$ до $\dfrac{\pi}{2}$ во всей области определения.

Некоторые значения арктангенса приведены в таблице занятия 53.

Функция арккотангенс *y* = arcctg *x*

Один из интервалов монотонности функции $y = \operatorname{ctg} x$ – это интервал $(0; \pi)$. На этом интервале существует функция, обратная к функции $y = \operatorname{ctg} x$. Эта обратная функция обозначается $y = \operatorname{arcctg} x$.

Таким образом, $y = \operatorname{arcctg} x \Leftrightarrow \begin{cases} x \in R, \\ 0 < \operatorname{arctg} x < \pi, \\ \operatorname{ctg}(\operatorname{arcctg} x) = x. \end{cases}$

График обратной функции симметричен графику прямой функции относительно биссектрисы 1 и 3 координатных углов (рис. 4).

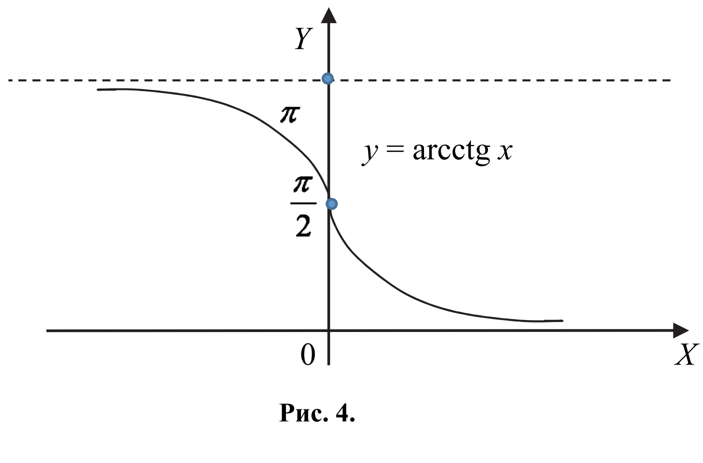


Рис. 4.

Свойства функции *y* = arcctg *x*

1. Область определения функции $D(\text{arcctg}) = R$.

2. Множество значений функции $E(\text{arcctg}) = (0; \pi)$.

3. arcctg x – функция общего вида и $\text{arcctg}(-x) = \pi - \text{arcctg}\, x$.

4. Функция нулей не имеет.

5. $\text{arcctg}\, x > 0$ для всех $x \in D(\text{arcctg})$.

6. arcctg x убывает от π до 0 во всей области определения.

Некоторые значения арккотангенса приведены в таблице занятия 54.

Тригонометрические операции над аркфункциями

$\sin(\arcsin x) = x,\ x \in [-1; 1].$
$\cos(\arccos x) = x,\ x \in [-1; 1].$
$\text{tg}(\text{arctg}\, x) = x,\ x \in R.$
$\text{ctg}(\text{arcctg}\, x) = x,\ x \in R.$

Пример 1. Найдите $\cos(\arcsin x)$.

Решение. $\arcsin x \in \left[-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right] \Rightarrow \cos(\arcsin x) \geq 0$.

$$\cos(\arcsin x) = +\sqrt{1-\sin^2(\arcsin x)} = \sqrt{1-x^2}\ .$$

Пример 2. Найдите $\text{tg}(\arcsin x)$.

Решение. По формуле $\text{tg}\,\alpha = \frac{\sin\alpha}{\cos\alpha}$ имеем

$$\text{tg}(\arcsin x) = \frac{\sin(\arcsin x)}{\cos(\arcsin x)} = \frac{x}{\sqrt{1-x^2}}\ ,$$

так как $\cos(\arcsin x) = \sqrt{1-x^2}$.

Пример 3. Докажите, что $\arcsin x + \arccos x = \dfrac{\pi}{2}$.

Доказательство. Если $\arcsin x + \arccos x = \dfrac{\pi}{2}$, то $\arcsin x = \dfrac{\pi}{2} - \arccos x$. Если числа (углы) равны, то должно выполняться: $\sin(\arcsin x) = \sin\left(\dfrac{\pi}{2} - \arccos x\right)$; $\sin(\arcsin x) = x$; $\sin\left(\dfrac{\pi}{2} - \arccos x\right) = \cos(\arccos x) = x$; $x = x$. Следовательно, $\arcsin x + \arccos x = \dfrac{\pi}{2}$.

Задание 2. Постройте график функции.

а) $y = \arcsin|x|$; б) $y = \arccos\dfrac{x-1}{2}$; в) $y = \mathrm{arctg}\dfrac{x}{\pi} + 1$;

г) $y = \mathrm{arcctg}\, 2x + \dfrac{\pi}{2}$; д) $y = \mathrm{arcsec}\, x$; е) $y = 2\,\mathrm{arccosec}\, x$;

ж) $y = \arccos|x|$.

Задание 3. Докажите следующие равенства.

а) $arctg\dfrac{1}{2} + arctg\dfrac{1}{3} = \dfrac{\pi}{4}$;

б) $\arcsin\dfrac{a-b}{a+b} = \mathrm{arctg}\dfrac{a-b}{2\sqrt{ab}}$;

в) $\arcsin\dfrac{3}{5} + \arcsin\dfrac{8}{17} = \arcsin\dfrac{77}{85}$;

г) $\mathrm{arctg}\dfrac{1}{3} + \mathrm{arctg}\dfrac{1}{5} + \mathrm{arctg}\dfrac{1}{7} + \mathrm{arctg}\dfrac{1}{8} = \dfrac{\pi}{4}$;

д) $\mathrm{arctg}\left(\dfrac{\cos\alpha}{1-\sin\alpha}\right) - \mathrm{arctg}\left(\dfrac{1-\sin\alpha}{\cos\alpha}\right) = \alpha$.

Занятие 59.

РЕШЕНИЕ ТРИГОНОМЕТРИЧЕСКИХ УРАВНЕНИЙ

На занятиях 51–53 было показано, как решать простейшие тригонометрические уравнения. Решения этих уравнений приведены в таблице.

Уравнение		Решение уравнения ($k \in Z$)
$\sin x = a$	$\lvert a \rvert > 1$	$\varnothing$
	$\lvert a \rvert \le 1$	$x_k = (-1)^k \arcsin a + \pi k$
$\cos x = a$	$\lvert a \rvert > 1$	$\varnothing$
	$\lvert a \rvert \le 1$	$x_k^{(1,2)} = \pm \arccos a + 2\pi k$
$\operatorname{tg} x = a$	$a \in R$	$x_k = \operatorname{arctg} a + \pi k$
$\operatorname{ctg} x = a$	$a \in R$	$x_k = \operatorname{arcctg} a + \pi k$

Рассмотрим методы решения некоторых более сложных тригонометрических уравнений.

Решение тригонометрических уравнений методом введения новой переменной

Пример 1. Решите уравнение $8\cos^2 2x + 6\sin 2x - 3 = 0$.

Решение. Заменим $\cos^2 x$ через $1 - \sin^2 x$, получаем $8(1 - \sin^2 2x) + 6\sin 2x - 3 = 0$ или $8\sin^2 2x - 6\sin 2x - 5 = 0$.

Обозначим $\sin 2x = y, |\, y\,| \le 1$. Тогда уравнение примет вид $8y^2 - 6y - 5 = 0$. Решая квадратное уравнение, находим корни $y = -\dfrac{1}{2}$ или $y = \dfrac{5}{4}$. Имеем:

а) $\sin 2x = -\dfrac{1}{2}$. Следовательно,

$2x = (-1)^n \arcsin\left(-\dfrac{1}{2}\right) + \pi n = (-1)^{n+1}\dfrac{\pi}{6} + \pi n$, или

$x=(-1)^{n+1}\dfrac{\pi}{12}+\dfrac{\pi n}{2},\ n\in Z$.

б) $\sin 2x=\dfrac{5}{4}$. $\dfrac{5}{4}>1\Rightarrow\varnothing$.

Ответ: $x=(-1)^{n+1}\dfrac{\pi}{12}+\dfrac{\pi n}{2},\ n\in Z$.

Пример 2. Решите уравнение $3\operatorname{ctg}^4 x-\dfrac{4}{\sin^2 x}+5=0$.

Решение. По формуле $\dfrac{1}{\sin^2 x}=1+\operatorname{ctg}^2 x,\ x\neq\pi n,\ n\in Z$ получаем $3\operatorname{ctg}^4 x-4\left(1+\operatorname{ctg}^2 x\right)+5=0$.

Обозначим $ctg^2x=y,\ y>0$, тогда уравнение примет вид

$3y^2-4y+1=0\Rightarrow y=1$ или $y=\dfrac{1}{3}$.

а) $\operatorname{ctg}^2 x=1 \Rightarrow \operatorname{ctg} x=\pm 1 \Rightarrow x=\dfrac{\pi}{4}+\pi k$ или $x=\dfrac{3\pi}{4}+\pi k,\ k\in Z$.

Объединяя эти два решения, получаем $x=\dfrac{\pi}{4}+\dfrac{\pi k}{2},\ k\in Z$.

б) $\operatorname{ctg}^2 x=\dfrac{1}{3}\Rightarrow\operatorname{ctg} x=\pm\dfrac{1}{\sqrt{3}} \Rightarrow x=\dfrac{\pi}{3}+\pi k$ или $x=\dfrac{2\pi}{3}+\pi k,\ k\in Z$.

Ответ: $x=\dfrac{\pi}{4}+\dfrac{\pi k}{2},\ k\in Z$; $x=\dfrac{\pi}{3}+\pi k,\ k\in Z$; $x=\dfrac{2\pi}{3}+\pi k,\ k\in Z$.

Метод вспомогательного аргумента

Рассмотрим уравнение вида

$$a\sin x + b\cos x = c\,, \qquad (1)$$

где a, b, c − постоянные.

Если $a = 0$ и $b \neq 0$ или $a \neq 0$ и $b = 0$, то заданное уравнение (1) сводится к соответствующему простейшему тригонометрическому уравнению. При $c = 0$ оно является однородным.

В настоящем разделе излагается весьма простой способ решения уравнения (1) в случае, когда $a^2 + b^2 \geq c^2$.

Обозначим $A = \sqrt{a^2 + b^2}$. Поделив обе части уравнения (1) на A, получаем $\frac{a}{A}\sin x + \frac{b}{A}\cos x = \frac{c}{A}$. Поскольку $\left(\frac{a}{A}\right)^2 + \left(\frac{b}{A}\right)^2 = 1$, то точка с координатами $\frac{a}{A}$ и $\frac{b}{A}$ принадлежит единичной окружности. Поэтому существует такое значение $\varphi \in R$, что

$$\frac{a}{A} = \cos\varphi,\ \frac{b}{A} = \sin\varphi\,. \qquad (2)$$

Следовательно, при $A \neq 0$ уравнение (1) может быть приведено к эквивалентному уравнению

$$\cos\varphi\sin x + \sin\varphi\cos x = \frac{c}{A},$$

или

$$\sin(x + \varphi) = \frac{c}{A}\,. \qquad (3)$$

В этом случае φ называется вспомогательным аргументом.

Уравнение (3) − это простейшее тригонометрическое уравнение. Для его разрешимости необходимо и достаточно, чтобы выполнялось условие $\left|\frac{c}{A}\right| \le 1$. Если оно выполнено, то заданное уравнение (1) имеет решения:

$$x_n = (-1)^n \arcsin\frac{c}{A} + \pi n - \varphi,$$

где φ – любое значение, удовлетворяющее уравнениям (2).

Если $\left|\frac{c}{A}\right| > 1$, то заданное уравнение (1) не имеет решений.

Пример 3. Решите уравнение $3\cos x - 4\sin x = 5$.

Решение. Поделив обе части заданного уравнения на $5 = \sqrt{(-4)^2 + 3^2}$, получим $\frac{3}{5}\cos x - \frac{4}{5}\sin x = 1$. Полагая $\frac{3}{5} = \sin\varphi$, $-\frac{4}{5} = \cos\varphi$, приходим к эквивалентному уравнению $\sin\varphi\cos x + \cos\varphi\sin x = 1$, или $\sin(x+\varphi) = 1$. Отсюда получаем $x_n = \frac{\pi}{2} + 2\pi n - \varphi$. Используя числовую окружность, легко проверить, что в качестве φ можно взять значение $\varphi = \pi - \arcsin\frac{3}{5}$.

Ответ: $-\frac{\pi}{2} + 2\pi n + \arcsin\frac{3}{5}, n \in Z$.

Пример 4. Решите уравнение $2\sin x - \sqrt{5}\cos x = 3\cos 2x$.

Решение. Поделив обе части заданного уравнения на $3 = \sqrt{2^2 + (-\sqrt{5})^2}$, получим эквивалентное уравнение:

$$\frac{2}{3}\sin x - \frac{\sqrt{5}}{3}\cos x = \cos 2x.$$

Полагая $\frac{2}{3} = \cos\varphi$, $-\frac{\sqrt{5}}{3} = \sin\varphi$, приходим к уравнению $\cos\varphi\sin x + \sin\varphi\cos x = \cos 2x$, или $\sin(x+\varphi) = \cos 2x$.

Используя формулу приведения $\sin\alpha = \cos\left(\frac{\pi}{2}-\alpha\right)$, запишем последнее уравнение в виде

$$\cos\left(\frac{\pi}{2}-x-\varphi\right)-\cos 2x = 0 .$$

Применяя формулу для разности косинусов, получаем

$$-2\sin\left(\frac{\pi}{4}+\frac{x}{2}-\frac{\varphi}{2}\right)\sin\left(\frac{\pi}{4}-\frac{3x}{2}-\frac{\varphi}{2}\right)=0 .$$

Итак, исходное уравнение эквивалентно совокупности простейших тригонометрических уравнений

$$\sin\left(\frac{\pi}{4}+\frac{x}{2}-\frac{\varphi}{2}\right)=0,\ \sin\left(\frac{\pi}{4}-\frac{3x}{2}-\frac{\varphi}{2}\right)=0 .$$

Решения первого из этих уравнений определяются формулой $x_n^{(1)} = -\frac{\pi}{2}+2\pi n+\varphi, n\in Z$, а второго − формулой $x_k^{(2)} = \frac{\pi}{6}-\frac{2\pi k}{3}-\frac{\varphi}{3}, k\in Z$.

В качестве φ можно взять значение $\varphi = -\arcsin\frac{\sqrt{5}}{3}$.

Ответ: $-\frac{\pi}{2}+2\pi n-\arcsin\frac{\sqrt{5}}{3}, n\in Z$;

$\frac{\pi}{6}-\frac{2\pi k}{3}+\frac{1}{3}\arcsin\frac{\sqrt{5}}{3}, k\in Z$.

Универсальная тригонометрическая подстановка

При решении уравнений $a\sin x+b\cos x=c$ можно использовать формулы $\sin x = \dfrac{2\operatorname{tg}\frac{x}{2}}{1+\operatorname{tg}^2\frac{x}{2}}$, $\cos x = \dfrac{1-\operatorname{tg}^2\frac{x}{2}}{1+\operatorname{tg}^2\frac{x}{2}}$, $x\neq \pi+2\pi k, k\in Z$.

Пример 5. Решите уравнение $4\sin x - 6\cos x = 1$.

Решение. Пусть $\mathrm{tg}\,\dfrac{x}{2} = t$, тогда $4\dfrac{2t}{1+t^2} - 6\dfrac{1-t^2}{1+t^2} = 1 \Rightarrow$

$5t^2 + 8t - 7 = 0 \Rightarrow t_1 = \dfrac{-4-\sqrt{51}}{5},\ t_2 = \dfrac{-4+\sqrt{51}}{5}$.

а) $\mathrm{tg}\,\dfrac{x}{2} = \dfrac{-4-\sqrt{51}}{5} \Rightarrow \dfrac{x}{2} = \mathrm{arctg}\,\dfrac{-4-\sqrt{51}}{5} + \pi k \Rightarrow$

$x = 2\,\mathrm{arctg}\,\dfrac{-4-\sqrt{51}}{5} + 2\pi k,\ k \in Z$.

б) $\mathrm{tg}\,\dfrac{x}{2} = \dfrac{-4+\sqrt{51}}{5} \Rightarrow \dfrac{x}{2} = \mathrm{arctg}\,\dfrac{-4+\sqrt{51}}{5} + \pi k \Rightarrow$

$x = 2\,\mathrm{arctg}\,\dfrac{-4+\sqrt{51}}{5} + 2\pi k,\ k \in Z$.

Ответ: $2\,\mathrm{arctg}\,\dfrac{-4\pm\sqrt{51}}{5} + 2\pi k,\ k \in Z$.

Однородные уравнения

Уравнения вида $a\sin x + b\cos x = 0$ или $a\sin^2 x + b\sin x\cos x + c\cos^2 x = 0$ называются однородными.

Пример 6. Решите уравнение

$3\sin^2 x - 4\sin x\cos x + \cos^2 x = 0$.

Решение. $\cos x \neq 0$, так как при $x = \dfrac{\pi}{2} + \pi k,\ k \in Z$ $\sin x \neq 0$, т.е. $x = \dfrac{\pi}{2} + \pi k,\ k \in Z$ не будет решением данного уравнения. Поэтому мы можем разделить все члены уравнения на $\cos^2 x$. Имеем $3\,\mathrm{tg}^2 x - 4\,\mathrm{tg}\,x - 1 = 0 \Rightarrow \mathrm{tg}\ x = 1$ или $\mathrm{tg}\,x = \dfrac{1}{3}$.

Следовательно, $x = \frac{\pi}{4} + \pi n,\ n \in Z$ или

$x = \operatorname{arctg}\frac{1}{3} + \pi k,\ k \in Z$.

Ответ: $\frac{\pi}{4} + \pi n,\ n \in Z$; $\operatorname{arctg}\frac{1}{3} + \pi k,\ k \in Z$.

Метод разложения на множители

Уравнения, приводящиеся к виду

$$f_1(x) \cdot f_2(x) \cdot \ldots \cdot f_n(x) = 0 .$$

Пример 7. Решите уравнение $\sin x \cdot \cos 2x = 0$.

Решение. а) $\sin x = 0 \Rightarrow x = \pi k,\ k \in Z$.

б) $\cos 2x = 0 \Rightarrow 2x = \frac{\pi}{2} + \pi k \Rightarrow x = \frac{\pi}{4} + \frac{\pi n}{2},\ n \in Z$.

Ответ: $\pi k,\ k \in Z$; $\frac{\pi}{4} + \frac{\pi n}{2},\ n \in Z$.

Пример 8. Решите уравнение $\sin x - \sin 2x = 0$.

Решение. Так как $\sin 2x = 2\sin x\cos x$, то уравнение имеет вид $\sin x - 2\sin x\cos x = 0$ или $\sin x(1 - 2\cos x) = 0$.

а) $\sin x = 0 \Rightarrow x = \pi k,\ k \in Z$.

б) $\cos x = \frac{1}{2} \Rightarrow x = \pm\frac{\pi}{3} + 2\pi n,\ n \in Z$.

Ответ: $\pi k,\ k \in Z$; $\pm\frac{\pi}{3} + 2\pi n,\ n \in Z$.

Пример 9. Решите уравнение $\cos x + \cos 3x = 0$.

Решение. По формуле

$\cos\alpha + \cos\beta = 2\cos\frac{\alpha+\beta}{2}\cos\frac{\alpha-\beta}{2}$ имеем $2\cos 2x \cos x = 0$.

а) $\cos 2x = 0 \Rightarrow 2x = \frac{\pi}{2} + \pi k \Rightarrow x = \frac{\pi}{4} + \frac{\pi k}{2}, k \in Z$.

б) $\cos x = 0 \Rightarrow x = \frac{\pi}{2} + \pi k, n \in Z$.

Ответ: $\frac{\pi}{4} + \frac{\pi k}{2}, k \in Z$; $\frac{\pi}{2} + \pi k, n \in Z$.

Пример 10. Решите уравнение sin $3x$cos $2x$ = sin $5x$.

Решение. По формуле

$\sin\alpha\cos\beta = \frac{1}{2}\left(\sin(\alpha+\beta) + \sin(\alpha-\beta)\right)$ имеем

$\frac{1}{2}(\sin 5x + \sin x) = \sin 5x \Rightarrow \sin 5x - \sin x = 0 \Rightarrow 2\sin 2x \cos 3x = 0$.

а) $\sin 2x = 0 \Rightarrow 2x = \pi k \Rightarrow x = \frac{\pi k}{2}, k \in Z$.

б) $\cos 3x = 0 \Rightarrow 3x = \frac{\pi}{2} + \pi n \Rightarrow x = \frac{\pi}{6} + \frac{\pi n}{3}, n \in Z$.

Ответ: $\frac{\pi k}{2}, k \in Z$; $\frac{\pi}{6} + \frac{\pi n}{3}, n \in Z$.

Пример 11. Решите уравнение
$\sin^2 x + \cos^2 2x + \sin^2 3x = \frac{3}{2}$.

Решение. По формулам понижения степеней синуса и косинуса имеем $\frac{1-\cos 2x}{2} + \frac{1+\cos 4x}{2} + \frac{1-\cos 6x}{2} = \frac{3}{2}$.
Отсюда cos $2x$ –cos $4x$ + cos $6x$ = 0, 2cos $4x$cos2 x – cos $4x$ = 0,
cos $4x$(2cos $2x$ – 1) = 0.

а) $\cos 4x = 0 \Rightarrow 4x = \frac{\pi}{2} + \pi k \Rightarrow x = \frac{\pi}{8} + \frac{\pi k}{4}, k \in Z$.

б) $\cos 2x = \frac{1}{2} \Rightarrow 2x = \pm\frac{\pi}{3} + 2\pi n \Rightarrow x = \pm\frac{\pi}{6} + \pi n, n \in Z$.

Ответ: $\frac{\pi}{8} + \frac{\pi k}{4}, k \in Z$; $\pm\frac{\pi}{6} + \pi n, n \in Z$.

Задание 1. Решите уравнение.

1. $4\sin^2\left(\frac{3\pi}{2}+x\right)-8\sin\left(\frac{\pi}{2}+x\right)+3=0$;

2. $(1+\cos x)(1+\sin x)\operatorname{tg} x=0$;

3. $\sin^2 x+\sin 2x=4\cos^2 x$;

4. $\sin^2 x-5\sin x\cos x+6\cos^2 x=0$;

5. $7\sin^2 x-8\sin x\cos x=15\cos^2 x$;

6. $\sin x\sin 7x=\sin 3x\sin 5x$;

7. $3-\cos x-3\sin x=0$;

8. $4\sin x = 4 - \cos x$;

9. $1 + \cos x + \cos 2x = 0$;

10. $\operatorname{tg} x + \operatorname{ctg} x = \frac{3}{2}$;

11. $\cos\frac{x}{2}=1+\cos x$;

12. $\operatorname{tg} x-\operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{2}-x\right)=1$;

13. $5\cos x + 12\sin x = 13$;

14. $\sin x - \sin 2x = 0$;

15. $1-\cos x = 2\sin\frac{x}{2}$;

16. $1+\cos x = 2\cos\frac{x}{2}$;

17. $6\sin^2 x-5\sin x+1=0$;

18. $\cos 2x = 2\frac{1}{3}\sin x$;

19. $\sqrt{3}\sin x-\cos x=0$;

20. $\cos x + \sin x = 0$;

21. $\cos^2 x - 3\sin x\cos x = -1$;

22. $3\cos^2 x=4\sin x\cos x-\sin^2 x$.

Занятие 60.

ПРОСТЕЙШИЕ ТРИГОНОМЕТРИЧЕСКИЕ НЕРАВЕНСТВА

Решение простейших тригонометрических неравенств рассмотрим на примерах.

Пример 1. Решите неравенство $\sin t \geq \frac{1}{2}$.

Решение. Построим единичную окружность (рис. 1).

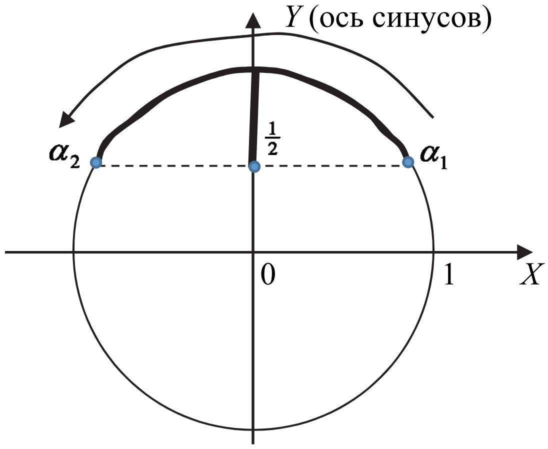


Рис. 1.

На оси синусов отмечаем точки большие или равные $\frac{1}{2}$. На окружности отмечаем точки, соответствующие этим синусам. Отмечаем начало α_1 и конец α_2 полученной дуги. $\alpha_1 = \frac{\pi}{6}, \alpha_2 = \frac{5\pi}{6}$. Для аргумента *t* имеем неравенство $\frac{\pi}{6} + 2\pi n \le t \le \frac{5\pi}{6} + 2\pi n, n \in Z$.

Ответ: $\left[\frac{\pi}{6} + 2\pi n; \frac{5\pi}{6} + 2\pi n\right], n \in Z$.

Пример 2. Решите неравенство $\sin t \le \frac{1}{2}$.

Решение. Построим числовую окружность (рис. 2).

На оси синусов отмечаем точки меньшие или равные $\frac{1}{2}$. На окружности отмечаем точки, соответствующие этим синусам. Отмечаем начало α_1 и конец α_2 полученной дуги.

$\alpha_1 = -\frac{7\pi}{6}, \alpha_2 = \frac{\pi}{6}$. Для аргумента t имеем неравенство $-\frac{7\pi}{6} + 2\pi n \le t \le \frac{\pi}{6} + 2\pi n,\ n \in Z$.

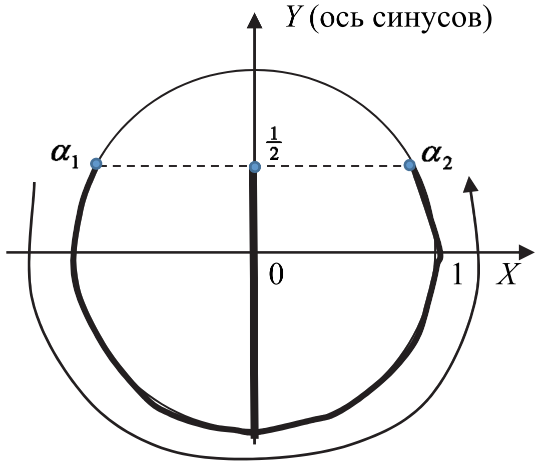


Рис. 2.

Ответ: $\left[-\frac{7\pi}{6} + 2\pi n; \frac{\pi}{6} + 2\pi n\right],\ n \in Z$.

Пример 3. Решите неравенство $\cos t \le \frac{1}{2}$.

Решение. Построим единичную окружность (рис. 3).

На оси косинусов отмечаем точки меньшие или равные $\frac{1}{2}$. На окружности отмечаем точки, соответствующие этим косинусам. Отмечаем начало α_1 и конец α_2 полученной дуги. $\alpha_1 = \frac{\pi}{3}, \alpha_2 = \frac{5\pi}{3}$. Для аргумента t имеем неравенство $\frac{\pi}{3} + 2\pi n \le t \le \frac{5\pi}{3} + 2\pi n,\ n \in Z$.

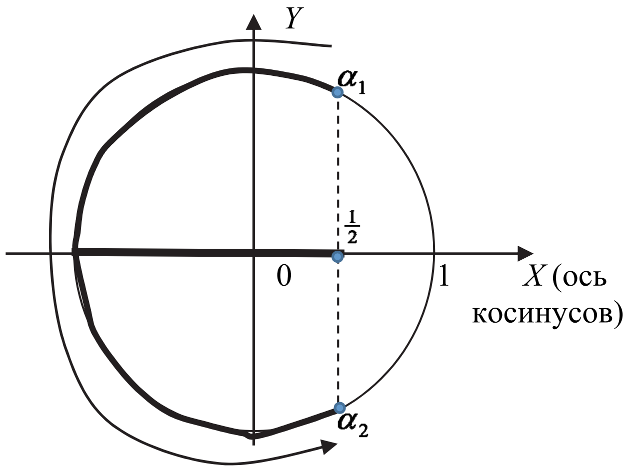


Рис. 3.

Ответ: $\left[\frac{\pi}{3}+2\pi n; \frac{5\pi}{3}+2\pi n\right]$, $n \in Z$.

Пример 4. Решите неравенство $\cos x \geq \frac{1}{2}$.

Решение. Построим единичную окружность (рис. 4).

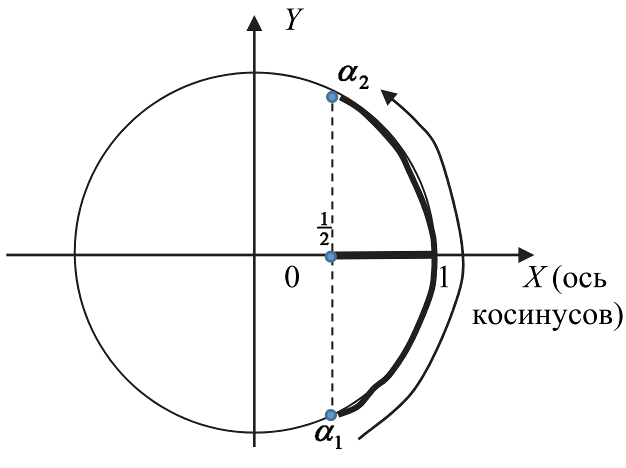


Рис. 4.

На оси косинусов отмечаем точки большие или равные $\frac{1}{2}$. На окружности отмечаем точки, соответствующие этим косинусам. Отмечаем начало α_1 и конец α_2 полученной дуги. $\alpha_1 = -\frac{\pi}{3}$, $\alpha_2 = \frac{\pi}{3}$. Для аргумента *t* имеем неравенство $-\frac{\pi}{3} + 2\pi n \le t \le \frac{\pi}{3} + 2\pi n,\ n \in Z$.

Ответ: $\left[-\frac{\pi}{3} + 2\pi n; \frac{\pi}{3} + 2\pi n\right],\ n \in Z$.

Пример 5. Решите неравенство $\operatorname{tg} x \ge 1$.

Решение. Построим числовую окружность (рис. 5).

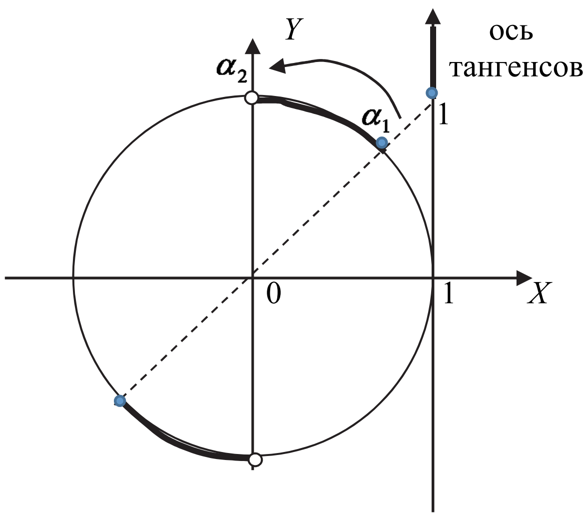


Рис. 5.

На оси тангенсов отмечаем точки большие или равные 1. На окружности отмечаем точки, соответствующие этим тангенсам. Отмечаем начало α_1 и конец α_2 полученной дуги. $\alpha_1 = \dfrac{\pi}{4}, \alpha_2 = \dfrac{\pi}{2}$. Для аргумента *t* имеем неравенство

$\dfrac{\pi}{4} + \pi n \le t < \dfrac{\pi}{2} + \pi n,\ n \in Z$.

Ответ: $\left[\dfrac{\pi}{4} + \pi n; \dfrac{\pi}{2} + \pi n\right),\ n \in Z$.

Пример 6. Решите неравенство $\operatorname{tg} x \le 1$.

Решение. Построим единичную окружность (рис. 6).

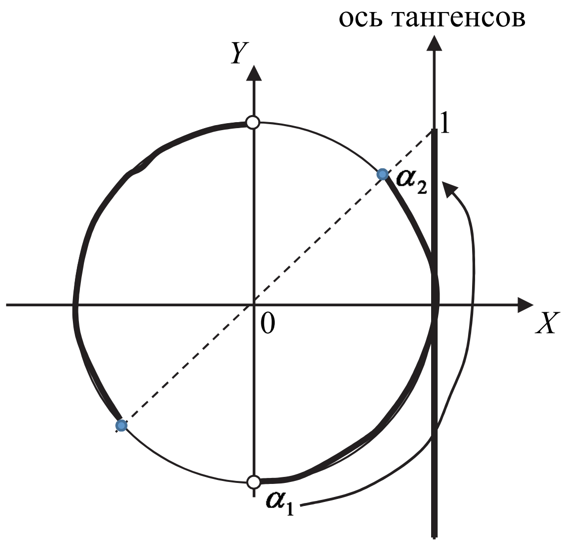


Рис. 6.

На оси тангенсов отмечаем точки меньшие или равные 1. На окружности отмечаем точки, соответствующие этим тангенсам. Отмечаем начало α_1 и конец α_2 полученной дуги. $\alpha_1 = -\frac{\pi}{2}, \alpha_2 = \frac{\pi}{4}$. Для аргумента t имеем неравенство $-\frac{\pi}{2} + \pi n < t \leq \frac{\pi}{4} + \pi n,\ n \in Z$.

Ответ: $\left(-\frac{\pi}{2} + \pi n; \frac{\pi}{4} + \pi n\right],\ n \in Z$.

Пример 7. Решите неравенство $\operatorname{ctg} x \geq 1$.

Решение. Построим числовую окружность (рис. 7).

На оси котангенсов отмечаем точки большие или равные 1. На окружности отмечаем точки, соответствующие этим котангенсам. Отмечаем начало α_1 и конец α_2 полученной дуги. $\alpha_1 = 0, \alpha_2 = \frac{\pi}{4}$. Для аргумента t имеем неравенство $\pi n < t \leq \frac{\pi}{4} + \pi n,\ n \in Z$.

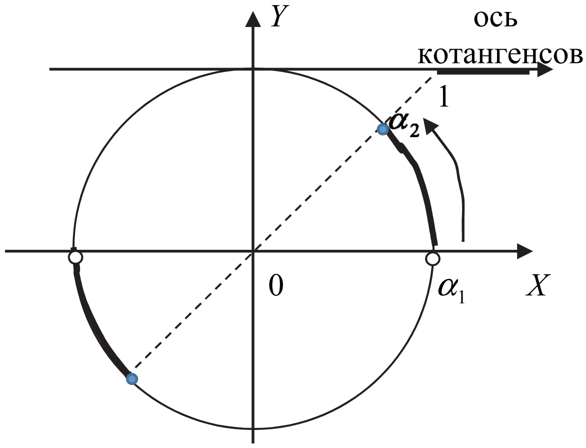


Рис. 7.

Ответ: $\left(\pi n; \frac{\pi}{4} + \pi n\right],\ n \in Z$.

Задание 1. Решите неравенство.

1. $\sin x > \frac{1}{2}$; 2. $\sin x < \frac{1}{2}$; 3. $\sin x < \frac{\sqrt{3}}{2}$;

4. $\sin x \geq \frac{\sqrt{3}}{2}$; 5. $\cos x \leq \frac{\sqrt{2}}{2}$; 6. $\cos x > \frac{\sqrt{2}}{2}$;

7. $\sin\left(x + \frac{\pi}{6}\right) > -\frac{\sqrt{3}}{2}$; 8. $\sin\left(x + \frac{\pi}{4}\right) < \frac{1}{2}$; 9. $\sin 2x \geq \frac{1}{2}$;

10. $\cos\frac{x}{2} < \frac{1}{2}$; 11. $\operatorname{tg} x > \sqrt{3}$; 12. $\operatorname{tg} x < \frac{\sqrt{3}}{3}$;

13. $\operatorname{ctg} x > 1$; 14. $\operatorname{ctg} x \leq 1$.

Задание 2. Найдите область определения функции.

1. $f(x) = \sqrt{2\sin x + 1}$; 2. $f(x) = \sqrt{2\cos x - 1}$.

Занятие 61.

ПРОСТОЕ ГАРМОНИЧЕСКОЕ КОЛЕБАНИЕ

Точка M равномерно движется по окружности с угловой скоростью ω радиан в секунду (рис. 1).

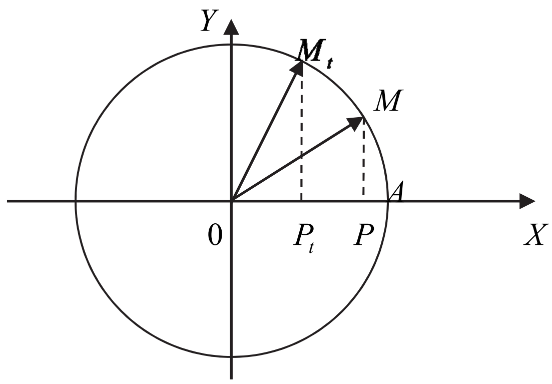


Рис. 1.

Центр окружности находится в начале координат. Радиус окружности равен A. Говорят, что точка M совершает вращательное движение по окружности. Точка P – проекция точки M на ось абсцисс OX.

Если точка M совершает вращательное движение по окружности, то точка P совершает движение вдоль оси OX. Говорят, что точка P совершает гармоническое колебание. Найдем уравнение движения точки P.

В начальный момент времени t_0 величина угла между осью абсцисс и вектором $\overrightarrow{OM}$ равна φ_0 радиан.

$$A\hat{O}M = \varphi_0 \text{ (радиан).}$$

В момент времени t величина угла между осью OX и вектором $\overrightarrow{OM_t}$ будет $A\hat{O}M_t = \omega t + \varphi_0$. Тогда проекция вектора $\overrightarrow{OM_t}$ на ось OX:

$$np_x\overrightarrow{OM_t} = |\overrightarrow{OM_t}|\cos(\omega t + \varphi_0), \text{ но } |\overrightarrow{OM_t}| = A,\ np_x\overrightarrow{OM_t} = x_t,$$

$$x_t = A\cos(\omega t + \varphi_0).$$

Это уравнение называется уравнением простого гармонического колебания. Здесь: A – амплитуда колебания; ω – циклическая или круговая частота; t – время; φ_0 (радиан) – начальная фаза; $\omega t + \varphi_0$ - фаза колебания.

Графики гармонических колебаний

График функции *y* = *A*cos *x*

График этой функции можно получить из графика функции $y = \cos x$ растяжением вдоль оси OY в A раз.

Пример 1. На рис. 2 изображён график функции $y = 3\cos x$. График получен из графика функции $y = \cos x$ растяжением вдоль оси OY в 3 раза.

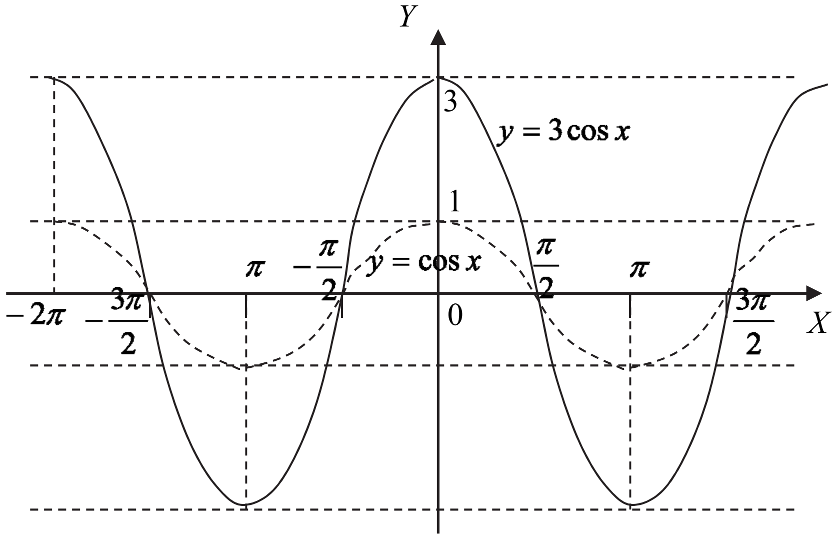


Рис. 2.

Пример 2. На рис. 3 изображён график функции $y = \frac{2}{3}\cos x$. График получен из графика функции $y = \cos x$ растяжением вдоль оси OY в $\frac{2}{3}$ раза.

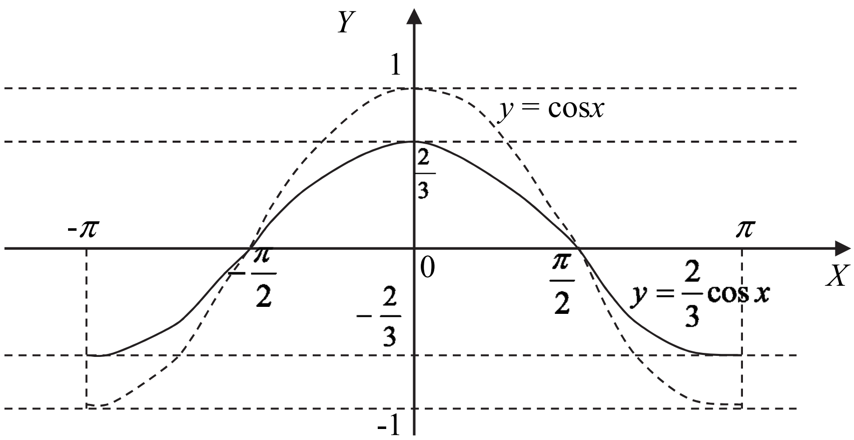


Рис. 3.

График функции $y = \cos ax$

График этой функции можно получить из графика функции $y = \cos x$ растяжением вдоль оси OX в a раз.

Пример 3. На рис. 4 изображён график функции $y = \cos\frac{x}{2}$. Этот график получен из графика функции $y = \cos x$ растяжением вдоль оси OX в 2 раза.

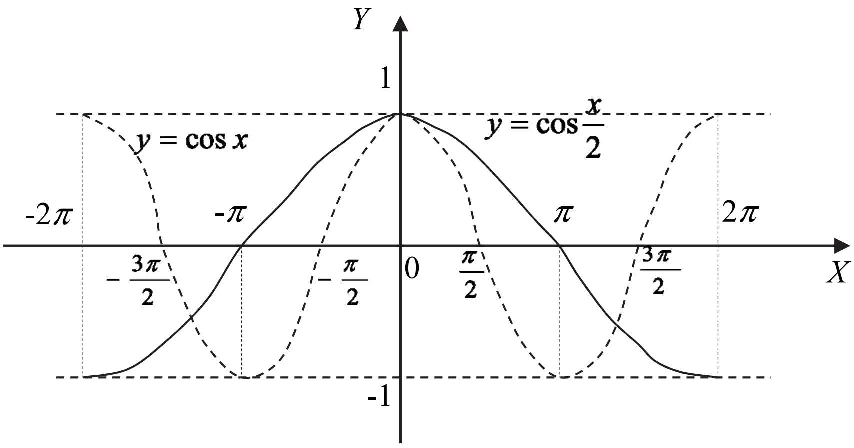


Рис. 4.

График функции $y = \cos(x + b)$

График этой функции можно получить из графика функции $y = \cos x$ параллельным переносом вдоль оси OX влево на расстояние b, если $b > 0$, и вправо на расстояние b, если $b < 0$.

Пример 4. На рис. 5 изображён график функции $y = \cos\left(x + \frac{\pi}{4}\right)$. Этот график получен из графика функции

$y = \cos x$ параллельным переносом этого графика влево на расстояние $\frac{\pi}{4}$.

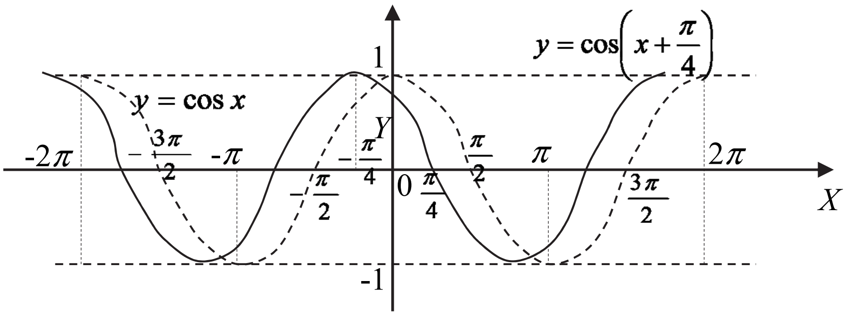


Рис. 5

Графики функций $y = A\cos\ (ax + b)$ **и** $y = A\sin\ (ax + b)$

Графики этих функций можно строить следующим образом. Мы знаем, что графики функций – синусоиды. Часть графика (полный период) называется волной синусоиды. Возьмём, например, функцию $y = \cos x$ и рассмотрим её график на промежутке $\left[-\frac{\pi}{2}; \frac{3\pi}{2}\right]$, где находится одна из её волн (рис. 6).

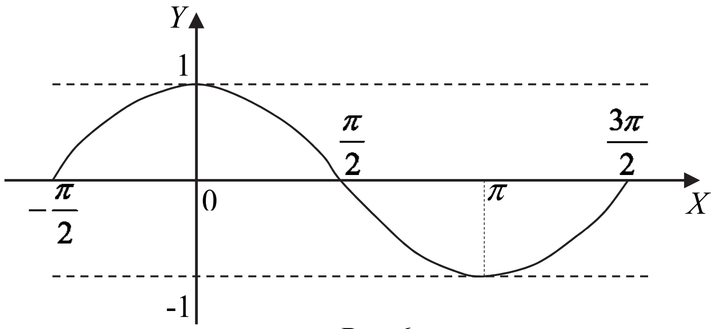


Рис. 6.

Поэтому для функции $y = A\cos(ax+b)$ одну из волн можно рассматривать на промежутке $-\frac{\pi}{2} \le ax + b \le \frac{3\pi}{2}$.

Отсюда получаем $-\frac{\pi}{2} - b \le ax \le \frac{3\pi}{2} - b$.

Если $a > 0$, то имеем $-\frac{\pi}{2a} - \frac{b}{a} \le x \le \frac{3\pi}{2a} - \frac{b}{a}$, а если $a < 0$, то $\frac{3\pi}{2a} - \frac{b}{a} \le x \le -\frac{\pi}{2a} - \frac{b}{a}$.

Пример 5. Построить график функции
$y = 2\cos\left(\frac{x}{2} - \frac{\pi}{6}\right)$.

Построение (рис. 7). A = 2. Построим одну из волн, которая находится на промежутке $-\frac{\pi}{2} \le \frac{x}{2} - \frac{\pi}{6} \le \frac{3\pi}{2} \Rightarrow$
$-\frac{\pi}{2} + \frac{\pi}{6} \le \frac{x}{2} \le \frac{3\pi}{2} + \frac{\pi}{6} \Rightarrow -\frac{\pi}{3} \le \frac{x}{2} \le \frac{5\pi}{3} \Rightarrow -\frac{2\pi}{3} \le x \le \frac{10\pi}{3}$.

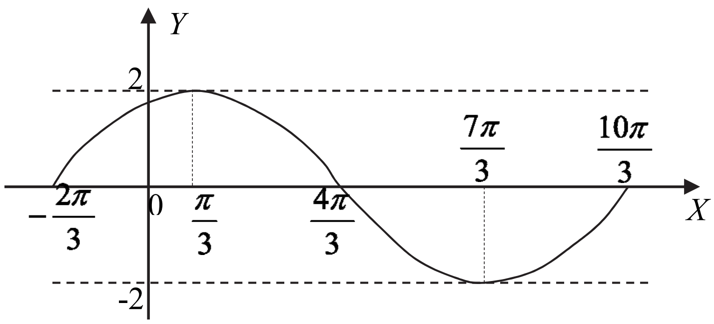


Рис. 7.

Период функции $T = \dfrac{2\pi}{\omega}$. $\omega = \dfrac{1}{2}$, $T = 4\pi$.

Далее можно продолжить этот график, используя период. Если мы рассматриваем гармоническое колебание, то $x \geq 0$, так как x – это время.

Пример 6. Построить график функции $y = \sin\left(2x + \dfrac{\pi}{5}\right)$.

Построение (рис. 8). $A = 1$. Период функции $T = \dfrac{2\pi}{2} = \pi$. Мы знаем, что одна из волн синусоиды $y = \sin x$ принадлежит промежутку $[0;\ 2\pi]$. Значит, волна синусоиды графика $y = \sin\left(2x + \dfrac{\pi}{5}\right)$ находится на промежутке

$$0 \leq 2x + \frac{\pi}{5} \leq 2\pi \Rightarrow -\frac{\pi}{5} \leq 2x \leq 2\pi - \frac{\pi}{5} \Rightarrow -\frac{\pi}{5} \leq 2x \leq \frac{9\pi}{5} \Rightarrow$$
$$-\frac{\pi}{10} \leq x \leq \frac{9\pi}{10}.$$

Используя периодичность функции, можно продолжить график на всю область определения.

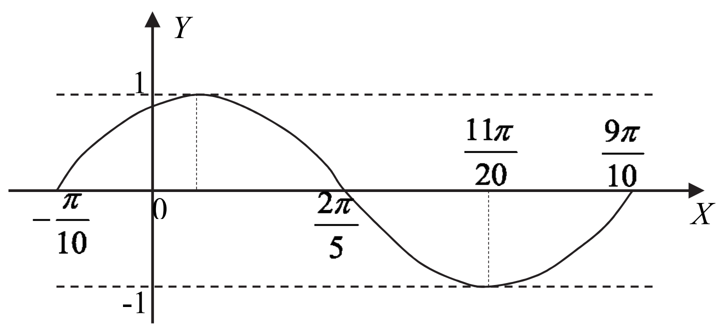


Рис. 8.

Задание 1. С помощью каких преобразований из графика функции $y = \sin x$ или $y = \cos x$ можно получить график функции?

а) $f(x) = \sin 2x$; б) $f(x) = \cos\frac{x}{3}$;

в) $f(x) = \sin\left(x + \frac{\pi}{4}\right)$; г) $y = 4\sin x$;

д) $y = \cos(x - 3)$; е) $y = \frac{1}{2}\sin(2x + 5)$.

Задание 2. Постройте графики функций.

а) $y = 2\sin 2x$; б) $y = \sin\left(x - \frac{\pi}{3}\right)$;

в) $y = \frac{1}{2}\cos\frac{x}{2}$; г) $y = \cos\left(x + \frac{\pi}{3}\right)$;

д) $y = \cos(x + 1)$; е) $y = \sin(x - 2)$.

Занятие 62.

КОМПЛЕКСНЫЕ ЧИСЛА

Алгебраическая форма записи комплексного числа

Определение 1. Выражения вида $a + bi$, где a и b – действительные числа, i – некоторый символ, для которых введены операция равенства и операции сложения и умножения по правилам:

1. $a + bi = c + di \Leftrightarrow a = c, b = d$,
2. $(a + bi) + (c + di) = (a + c) + (b + d)i$,
3. $(a + bi)(c + di) = (ac - bd) + (ad + bc)i$,

называются комплексными числами.

Комплексные числа обозначают одной буквой z, w или ω.

Запись комплексного числа в виде $a + bi$ называется алгебраической формой *комплексного* числа. a *– действительная часть комплексного числа*, b *– мнимая часть комплексного числа*.

Пример. $z = -3 + 2i$. $\mathrm{Re}(z) = -3$, $\mathrm{Im}(z) = 2$.

Свойства суммы и произведения комплексных чисел

1. $z_1 + z_2 = z_2 + z_1$ – переместительное (коммутативное) свойство суммы.

2. $(z_1 + z_2) + z_3 = z_1 + (z_2 + z_3)$ – сочетательное (ассоциативное) свойство суммы.

3. $z_1 \cdot z_2 = z_2 \cdot z_1$ – переместительное (коммутативное) свойство произведения.

4. $(z_1 \cdot z_2) \cdot z_3 = z_1 \cdot (z_2 \cdot z_3)$ – сочетательное (ассоциативное) свойство произведения.

5. $z_1 \cdot (z_2 + z_3) = z_1 \cdot z_2 + z_1 \cdot z_3$ – распределительное (дистрибутивное) свойство сложения и умножения.

Числа $z = a + bi$ и $-z = -a - bi$ называются противоположными.

Их сумма $z + (-z) = 0 + 0i = 0$ называется комплексным нулём.

Числа $z = a + bi$ и $\bar{z} = a - bi$ называются *комплексно-сопряжёнными*.

Число $z = a + 0i$ называется действительным числом, и просто записывают $z = a$.

Число $z = 0 + bi$ называют мнимым и записывают $z = bi$.

Если $b = 1$, то $z = i$ называется *мнимой единицей*.

Заметим, что сумма действительных чисел есть действительное число

$$a_1 + a_2 = (a_1 + 0i) + (a_2 + 0i) = (a_1 + a_2) + (0 + 0)i = (a_1 + a_2);$$

сумма мнимых чисел есть мнимое число

$$b_1 i + b_2 i = (0 + b_1 i) + (0 + b_2 i) = (0 + 0) + (b_1 + b_2)i = (b_1 + b_2)\, i;$$

произведение действительных чисел есть действительное число
$a_1 \cdot a_2 = (a_1 + 0i) \cdot (a_2 + 0i) = (a_1 \cdot a_2 - 0 \cdot 0) + (a_1 \cdot 0 + 0 \cdot a_2)i = a_1 \cdot a_2$.

Степени мнимой единицы

Пусть $z = i$. Рассмотрим степени этого комплексного числа. $i^1 = i$.
$i^2 = (0+1i)(0+1i) = (0 \cdot 0 - 1 \cdot 1) + (0 \cdot 1 + 1 \cdot 0)i = -1 + 0i = -1$.
$i^3 = i^2 \cdot i = -i$. $i^4 = i^3 \cdot i = (-i) \cdot i = 1$.

Таким образом, имеем:

$i^0 = 1$, $i^1 = i$, $i^2 = -1$, $i^3 = -i$, $i^4 = i^0 = 1$ и т.д.

В общем случае i^m (m=4n+k, k=0, 1, 2, 3); можно записать: $i^m = i^{4n+k} = i^{4n} \cdot i^k = i^k$, следовательно,

$$i^m = i^k = \begin{cases} 1, & k = 0, \\ i, & k = 1, \\ -1, & k = 2, \\ -i, & k = 3 \end{cases}$$

Примеры. $i^{166} = i^{164} i^2 = \left(i^4\right)^{41} i^2 = 1 \cdot (-1) = -1$.
$i^{257} = i^{256} i = \left(i^4\right)^{64} i = i$.

Теперь рассмотрим умножение двух комплексных чисел с учетом степеней мнимой единицы:
$(a_1 + b_1 i)(a_2 + b_2 i) = a_1 a_2 + a_1 b_2 i + a_2 b_1 i + b_1 b_2 i^2 =$
$= (a_1 a_2 - b_1 b_2) + (a_1 b_2 + a_2 b_1)\, i$. То есть при перемножении комплексных чисел можно их перемножать как многочлены и подставить $i^2 = -1$.

Разность двух комплексных чисел

Пусть z_1 и z_2 – два комплексных числа. Рассмотрим уравнение $z + z_2 = z_1$, где z – неизвестное комплексное число. Прибавим к обеим частям уравнения по $-z_2$. Получим $z+z_2+(-z_2)=z_1+(-z_2) \Rightarrow z=z_1-z_2$ – разность комплексных чисел.

Если $z = a + bi$, $z_1=a_1+b_1i$, $z_2=a_2+b_2i$, то $z=a+bi=(a_1-a_2)+(b_1-b_2)i$.

Пример 1. Выполните действие $(2 + 3i) – (3 + i)$ **.**
Решение $(2 + 3i) – (3 + i) = -1 +2i$.

Пример 2. Решите уравнение $2 + 3i + z = -4 + i$.
Решение. $z = (-4 + i) –(2 +3i) = -6 – 2i$.

Модуль комплексного числа

Определение 2. Модулем комплексного числа $z = a + bi$ называется число $|z| = |a + bi| =\sqrt{a^2+b^2}$.

Рассмотрим произведение двух комплексных чисел $z = a + bi$ и $\bar{z}=a-bi$.

$z\bar{z}=(a+bi)(a-bi)=a^2+b^2+(ab-ab)i=a^2+b^2$. Таким образом, $z\bar{z}=a^2+b^2=|z|^2$. Или $|z|=|\bar{z}|=\sqrt{z\bar{z}}$.

Если $z = a$, то $|z| = |a|$. Если $z = bi$, то $|z| = |b|$.

Частное двух комплексных чисел

Пусть $z_1=a_1+b_1i$, $z_2=a_2+b_2i$, $z_2\neq 0$.

Рассмотрим комплексное число

$$z=\frac{z_1}{z_2}=\frac{z_1\bar{z}_2}{z_2\bar{z}_2}=\frac{z_1\bar{z}_2}{|z_2|^2}=\frac{(a_1+b_1i)(a_2-b_2i)}{(a_2+b_2i)(a_2-b_2i)}=$$

$$=\frac{(a_1a_2+b_1b_2)+(a_2b_1-a_1b_2)i}{a_2^2+b_2^2}=\frac{(a_1a_2+b_1b_2)}{a_2^2+b_2^2}+\frac{(a_2b_1-a_1b_2)}{a_2^2+b_2^2}i.$$

При делении комплексных чисел числитель и знаменатель умножаем на число, сопряженное знаменателю.

Заметим, что при делении действительных чисел результат – действительное число: $\frac{a_1+0i}{a_2+0i}=\frac{a_1}{a_2}+\frac{0}{a_2}i=\frac{a_1}{a_2}$.

Пример 3. Выполните умножение $(2 - 3i)(4 - i)$.
Решение. $(2 - 3i)(4 - i) = (8 - 3) + (-12 - 2)i = 5 - 14i$.

Пример 4. а) Дано $z = a + bi$. Найдите $z\cdot\bar{z}$.
Решение. $(a + bi)(a - bi) = a^2+b^2$.
б) Дано $z = 3 - 4i$. Найдите $z\cdot\bar{z}$.
Решение. $z\cdot\bar{z} = (3 - 4i)(3 + 4i) = 9 + 16 = 25$.

Пример 5. Запишите в виде произведения: а) $a^2 + 1$.
Решение. $a^2 + 1 = (a + i)(a - i)$;
б) $x^2 + 9 = (x + 3i)(x - 3i)$.

Пример 6. Выполните деление $\frac{2-3i}{2+i}$.

Решение. $\frac{2-3i}{2+i}=\frac{(2-3i)(2-i)}{(2+i)(2-i)}=\frac{1-8i}{5}=\frac{1}{5}-\frac{8}{5}i$.

Задание 1. Выполните действия.
а) $(-1 + 3i) + (4 - 2i)$;
б) $(5 + 4i) - (2 - 3i)$;
в) $(-1 + 2i) - (3 - 4i) - 2(1 - i)$;
г) $\left(1\frac{3}{4}+\frac{2}{3}i\right)+\left(1\frac{1}{2}-\frac{5}{6}i\right)+\left(-\frac{3}{4}-2i\right)$.

Задание 2. Выполните действия.
а) $(2 - 3i)(4 - i)$; б) $(0,5 + 0,2i)(2 + 3i)$;
в) $(1 - i)(1 - i)$; г) $\left(5+i\sqrt{3}\right)\left(5-i\sqrt{3}\right)$.

Задание 3. Выполните действия.
а) $\frac{2i}{1-i}$; б) $\frac{1+i}{1-i}$; в) $\frac{5-i\sqrt{2}}{1+i\sqrt{2}}$; г) $\frac{-\sqrt{2}+i\sqrt{6}}{-1+i\sqrt{3}}$.

Задание 4. Выполните действия.

а) $\dfrac{(2-3i)(-3-4i)}{-1-2i}$; б) $\dfrac{\sqrt{3}+2i}{\sqrt{3}-2i}-\dfrac{\sqrt{3}-2i}{\sqrt{3}+2i}$;

в) $\dfrac{1+3i}{i}+\dfrac{1+i}{1-i}$; г) $\left(\dfrac{\sqrt{3}+i}{\sqrt{3}-i}-\dfrac{\sqrt{3}-i}{\sqrt{3}+i}\right)\left(3-3i\sqrt{3}\right)$.

Задание 5. Выполните действия.

а) i^{60}; б) $(-i)^3$; в) $2i^{71}-5i^{60}-4i^{15}-(-i)^{14}$;

г) $2i^{17}+3i^{11}+5i^3-4i^8$; д) $\dfrac{3+i^{27}}{2+i^{257}}$.

Занятие 63.

КОМПЛЕКСНЫЕ ЧИСЛА (продолжение 1)

Геометрическое изображение комплексных чисел

Изображение комплексных чисел в виде точек координатной плоскости

Возьмём прямоугольную систему координат. Комплексное число $z = a + bi$ будем изображать точкой на координатной плоскости следующим образом: $\mathrm{Re}(z) = a$ отложим на оси OX. $\mathrm{Im}(z) = b$ отложим на оси OY (рис. 1).

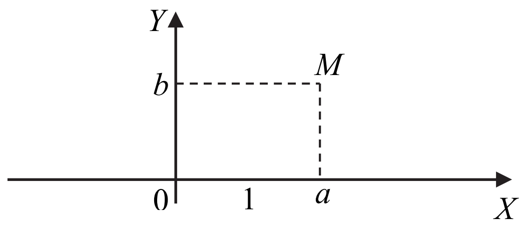


Рис. 1.

Тогда каждому комплексному числу $z = a + bi$ соответствует только одна точка $M(a, b)$ координатной плоскости, и, наоборот, каждой точке плоскости соответствует только одно комплексное число $z = a + bi$.

$z \leftrightarrow M$

Ось OX назовем *действительной осью*, ось OY – *мнимой осью*. Плоскость XOY будем называть комплексной плоскостью.

Векторы на плоскости как изображение комплексных чисел

Каждому комплексному числу $z = a + bi$ поставим в соответствие вектор $\overrightarrow{OM}$, идущий от начала координат к точке $M(a; b)$ (рис. 2).

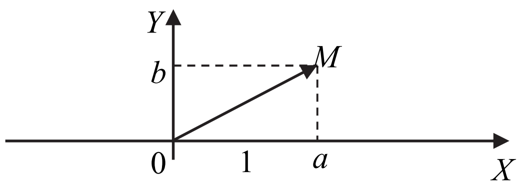


Рис. 2.

$$z = a + bi \leftrightarrow M(a; b) \leftrightarrow \overrightarrow{OM}.$$

Между множеством комплексных чисел и множеством векторов, лежащих в координатной плоскости, имеет место взаимно однозначное соответствие.

Замечание. Конечно, комплексное число и изображение его в виде точки или вектора – это разные понятия, разные объекты. Но, несмотря на это с помощью таких изображений удается хорошо иллюстрировать многие положения, связанные с комплексными числами.

Пример. Изобразите на комплексной плоскости векторы, соответствующие комплексным числам (рис. 3):

$z_1 = 1+2i$; $z_2 = -2+i$; $z_3 = 3-2i$; $z_4 = -1-i$; $z_5 = 4+0i$;
$z_6 = -4+0i$; $z_7 = 0+3i$; $z_8 = 0-4i$.
$z_1 \to \overrightarrow{OM_1}$; $z_2 \to \overrightarrow{OM_2}$; $z_3 \to \overrightarrow{OM_3}$; $z_4 \to \overrightarrow{OM_4}$ $z_5 \to \overrightarrow{OM_5}$;
$z_6 \to \overrightarrow{OM_6}$; $z_7 \to \overrightarrow{OM_7}$; $z_8 \to \overrightarrow{OM_8}$.

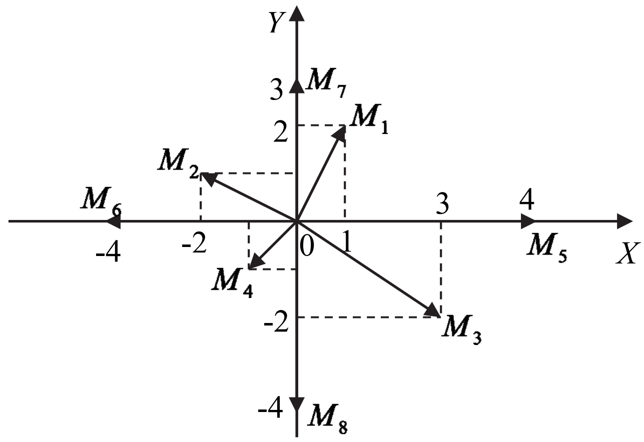


Рис. 3.

Модуль комплексного числа

Построим вектор $\overrightarrow{OM}$, изображающий комплексное число $z = a + bi$ (рис. 4).

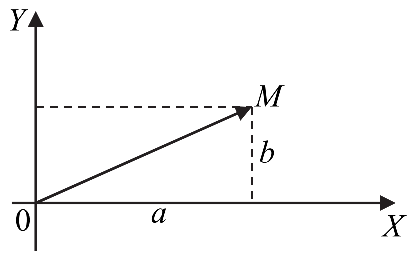


Рис. 4.

Длина вектора $\overrightarrow{OM}$: $|\overrightarrow{OM}| = \sqrt{a^2+b^2}$ называется модулем комплексного числа $z = a + bi$.

$|a+bi| = \sqrt{a^2+b^2}$.

Обозначим $|a+bi| = r$.

$r = \sqrt{a^2+b^2}$.

Примеры: $|1+i| = \sqrt{2}$; $|-1-i| = \sqrt{2}$; $|3-4i| = 5$; $|3+0i| = 3$; $|-3+0i| = 3$; $|0+4i| = 4$; $|bi| = |b|$; $|i| = |-i| = 1$.

Задание 1. Изобразите на комплексной плоскости точки, соответствующие комплексным числам.

а) $z = 2 - i$ и $\bar{z}$; б) $z = -3 - 3i$, $\bar{z}$ и $-\bar{z}$;

в) $z = 2i^{71} - 5i^{60}$; г) $z = 2i$ и $\bar{z}$.

Задание 2. Изобразите множество точек z, удовлетворяющих условию:

а) $|z| = 2$; б) $|z| < 1$; в) $\mathrm{Re}(z) = 1$;

г) $\mathrm{Re}(z) > 1$; д) $\mathrm{Im}(z) = 1$; е) $\mathrm{Im}(z) < 1$;

ж) $\mathrm{Im}(z) > 1$.

Аргумент комплексного числа

Обозначим величину угла между положительным направлением оси OX и вектором $\overrightarrow{OM}$ числом φ радиан (рис. 5).

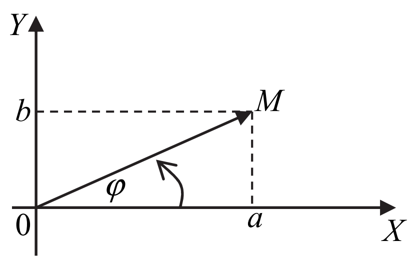


Рис. 5.

$\widehat{OX, \overrightarrow{OM}} = \phi$. Число φ возьмём в границах $0 \le \phi < 2\pi$.

Число φ называется главным значением аргумента комплексного числа $z = a + bi$ и обозначается символом $\arg(a + bi)$ или $\arg z$.

Если комплексное число имеет главный аргумент φ, то каждое из чисел $\varphi + 2\pi k,\ k \in Z$ также его аргумент.

Главное значение аргумента комплексного числа $z = a + bi$ однозначно определяется из формул

$\sin\varphi = \dfrac{b}{r},\ \cos\varphi = \dfrac{a}{r}$.

Главное значение аргумента комплексного числа будем находить следующим образом:

1) $\overrightarrow{OM} \in$ I четверти (точка $M(a, b) \in$ I четверти) (рис. 6).

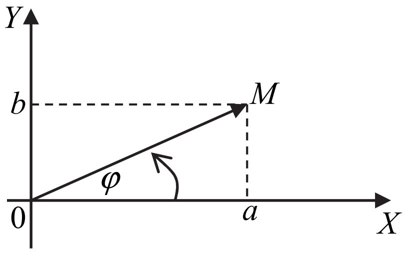


Рис. 6.

$$\varphi = \operatorname{arctg}\frac{b}{a}.$$

2) $\overrightarrow{OM} \in$ II четверти (точка $M(a, b) \in$ II четверти) (рис. 7).

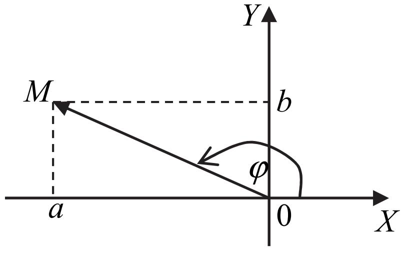


Рис. 7.

$$\varphi = \pi - \operatorname{arctg}\left|\frac{b}{a}\right|.$$

3) $\overrightarrow{OM} \in \mathrm{III}$ четверти (точка $M(a, b) \in$ III четверти) (рис. 8).

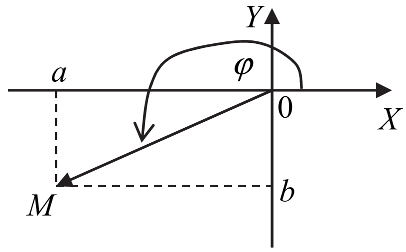


Рис. 8.

$$\varphi = \pi + \operatorname{arctg}\left|\frac{b}{a}\right|.$$

4) $\overrightarrow{OM} \in \mathrm{IV}$ четверти (точка $M(a, b) \in$ IV четверти) (рис. 9).

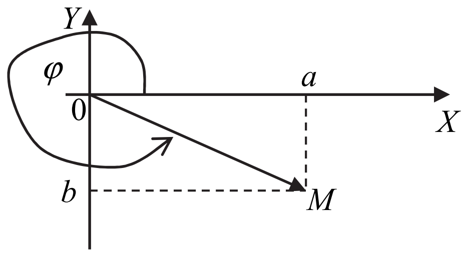


Рис. 9.

$$\varphi = 2\pi - \operatorname{arctg}\left|\frac{b}{a}\right|.$$

Частные случаи:

1) $z = a + 0i$, то $\varphi = 0$, если $a > 0$ и $\varphi = \pi$, если $a < 0$.

2) $z = 0 + bi$, то $\varphi = \dfrac{\pi}{2}$, если $b > 0$ и $\varphi = \dfrac{3\pi}{2}$, если $b < 0$.

3) $z = 0 + 0i$, то аргумент φ не определен.

Задание 3. Найдите модуль и аргумент комплексных чисел.

а) $-2+i\sqrt{2}$; б) $-\frac{1}{2}+i\frac{\sqrt{3}}{2}$; в) $-3-i$;

г) $-2i$; д) $-2+0i$; е) $0+4i$; ж) $5+0i$.

Занятие 64.

КОМПЛЕКСНЫЕ ЧИСЛА (продолжение 2)

Тригонометрическая форма комплексного числа

Построим вектор $\overrightarrow{OM}$, соответствующий комплексному числу $a+bi$ (рис. 1).

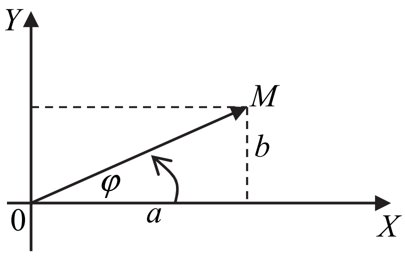


Рис. 1.

Имеем: $a = r\cos\varphi$, $b = r\sin\varphi$.

Тогда $a+bi = r\cos\varphi + ir\sin\varphi = r(\cos\varphi + i\sin\varphi)$.

Выражение $r(\cos\varphi + i\sin\varphi)$ называется тригонометрической формой комплексного числа.

Примеры преобразования алгебраической формы комплексного числа в тригонометрическую.

$2 = 2(\cos 0 + i\sin 0)$; $-2 = 2(\cos\pi + i\sin\pi)$;

$$2i = 2\left(\cos\frac{\pi}{2} + i\sin\frac{\pi}{2}\right); \quad -2i = 2\left(\cos\frac{3\pi}{2} + i\sin\frac{3\pi}{2}\right);$$

$$1 - i = \sqrt{2}\left(\cos\frac{7\pi}{4} + i\sin\frac{7\pi}{4}\right); \quad \sqrt{3} + 3i = 2\sqrt{3}\left(\cos\frac{\pi}{3} + i\sin\frac{\pi}{3}\right).$$

Определение 1. Два комплексных числа, заданных в тригонометрической форме, равны тогда и только тогда, когда их модули равны, а аргументы равны или отличаются на величину, кратную 2π.

Если $r_1(\cos\varphi_1 + i\sin\varphi_1) = r_2(\cos\varphi_2 + i\sin\varphi_2)$, то $r_1 = r_2$ и $\varphi_2 = \varphi_1 + 2\pi k,\ k \in Z$.

Умножение комплексных чисел, заданных в тригонометрической форме

$$r_1(\cos\varphi_1 + i\sin\varphi_1)\cdot r_2(\cos\varphi_2 + i\sin\varphi_2) =$$
$$= r_1 r_2(\cos\varphi_1\cos\varphi_2 - \sin\varphi_1\sin\varphi_2 + i\sin\varphi_1\cos\varphi_2 + i\cos\varphi_1\sin\varphi_2) =$$
$$= r_1 r_2(\cos(\varphi_1 + \varphi_2) + i\sin(\varphi_1 + \varphi_2)).$$

Итак, при умножении комплексных чисел их модули перемножаются, а аргументы складываются.

Геометрическое истолкование умножения комплексных чисел

Пусть $z_1 = r_1(\cos\varphi_1 + i\sin\varphi_1)$, $z_2 = r_2(\cos\varphi_2 + i\sin\varphi_2)$ и $z = z_1 z_2 = r_1 r_2(\cos(\varphi_1 + \varphi_2) + i\sin(\varphi_1 + \varphi_2))$. Построим векторы $\overrightarrow{OM_1}$, $\overrightarrow{OM_2}$ и $\overrightarrow{OM}$, соответствующие этим комплексным числам (рис. 2).

Вектор $\overrightarrow{OM}$ получается путем поворота вектора $\overrightarrow{OM_1}$ на угол φ_2 и умножения его модуля на r_2.

Если $r_2 > 1$, то происходит растяжение вектора $\overrightarrow{OM_1}$. Если $r_2 < 1$, то происходит сжатие вектора $\overrightarrow{OM_1}$.

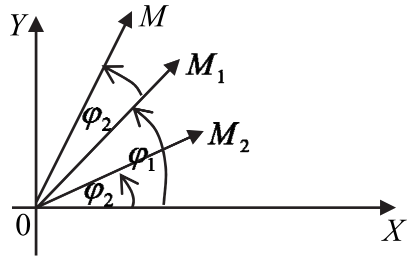


Рис. 2.

Умножение комплексного числа на i геометрически означает поворот вектора на угол $\frac{\pi}{2}$, так как $|i| = 1$, $\arg i = \frac{\pi}{2}$ (рис. 3).

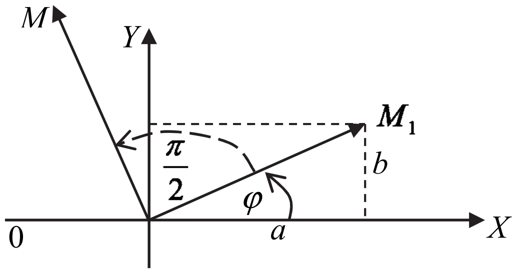


Рис. 3.

$$\overrightarrow{OM_1} \to z,\ \overrightarrow{OM} \to z \cdot i.$$

Пример 1. Найдите $z_1 z_2$, если
$z_1 = \sqrt[3]{2}(\cos 25° + i \sin 25°)$, $z_2 = \sqrt[3]{4}(\cos 35° + i \sin 35°)$.

Решение.

$z_1 z_2 = \sqrt[3]{2}(\cos 25° + i \sin 25°) \cdot \sqrt[3]{4}(\cos 35° + i \sin 35°) =$

$= 2(\cos(25° + 35°) + i \sin(25° + 35°)) = 2(\cos 60° + i \sin 60°) =$

$= 2\left(\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}\right) = 1 + i\sqrt{3}$.

Ответ: $1 + i\sqrt{3}$.

Деление комплексных чисел, заданных в тригонометрической форме

$$\frac{r_1(\cos\varphi_1 + i\sin\varphi_1)}{r_2(\cos\varphi_2 + i\sin\varphi_2)} = \frac{r_1(\cos\varphi_1 + i\sin\varphi_1)((\cos\varphi_2 - i\sin\varphi_2))}{r_2(\cos\varphi_2 + i\sin\varphi_2)((\cos\varphi_2 - i\sin\varphi_2))} =$$

$$= \frac{r_1(\cos\varphi_1\cos\varphi_2 + \sin\varphi_1\sin\varphi_2 + i\sin\varphi_1\cos\varphi_2 - i\cos\varphi_1\sin\varphi_2)}{r_2(\cos^2\varphi_2 + \sin^2\varphi_2)} =$$

$$= \frac{r_1}{r_2}(\cos(\varphi_1 - \varphi_2) + i\sin(\varphi_1 - \varphi_2)).$$

При делении двух комплексных чисел их модули делятся, а аргументы вычитаются.

Пример 2. Найдите $\frac{z_1}{z_2}$, если $z_1 = 6(\cos 110° + i\sin 110°)$, $z_2 = 3(\cos 80° + i\sin 80°)$.

Решение. $\frac{z_1}{z_2} = \frac{6(\cos 110° + i\sin 110°)}{3(\cos 80° + i\sin 80°)} =$

$= 2(\cos 30° + i\sin 30°) = 2\left(\frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{i}{2}\right) = \sqrt{3} + i$.

Ответ: $\sqrt{3} + i$.

Возведение в степень комплексных чисел, заданных в тригонометрической форме

Пусть n – целое положительное число. Тогда $(r(\cos\varphi + i\sin\varphi))^n = r(\cos\varphi + i\sin\varphi)\cdot r(\cos\varphi + i\sin\varphi)\cdot\ldots$

$\ldots\cdot r(\cos\varphi + i\sin\varphi) =$

$r^n(\cos(\varphi + \varphi + \ldots + \varphi) + i\sin(\varphi + \varphi + \ldots + \varphi)) =$

$= r^n(\cos n\varphi + i\sin n\varphi)$.

Итак, $(r(\cos\varphi + i\sin\varphi))^n = r^n(\cos n\varphi + i\sin n\varphi)$.

Если $n = -m$, где $m \in Z$, то $\left(r(\cos\varphi + i\sin\varphi)\right)^n =$

$$= \frac{1}{\left(r(\cos\varphi + i\sin\varphi)\right)^m} = \frac{1}{r^m\left(\cos m\varphi + i\sin m\varphi\right)} =$$

$$= \frac{\cos m\varphi - i\sin m\varphi}{r^m\left(\cos m\varphi + i\sin m\varphi\right)\left(\cos m\varphi - i\sin m\varphi\right)} =$$

$$= \frac{\cos m\varphi - i\sin m\varphi}{r^m\left(\cos^2 m\varphi + \sin^2 m\varphi\right)} = r^{-m}(\cos m\varphi - i\sin m\varphi) =$$

$$= r^{-m}(\cos(-m\varphi) + i\sin(-m\varphi)).$$

Чтобы возвести комплексное число в целую (положительную или отрицательную) степень, надо возвести в эту степень модуль, а аргумент умножить на показатель степени.

Формула $\left(r(\cos\varphi + i\sin\varphi)\right)^n = r^n(\cos n\varphi + i\sin n\varphi)$ называется *формулой Муавра*.

Пример 3. Возведите в степень $\left(-\frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}i\right)^9$.

Решение. Запишем число $z = -\frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}i$

в тригонометрической форме $|z| = r = \sqrt{\frac{1}{4} + \frac{3}{4}} = 1$,

$M\left(-\frac{1}{2}; -\frac{\sqrt{3}}{2}\right) \in \text{III}$ четверти. Следовательно,

$$\arg z = \pi + \operatorname{arctg}\sqrt{3} = \pi + \frac{\pi}{3} = \frac{4\pi}{3}.$$

$$\left(-\frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}i\right)^9 = \left(\cos\frac{4\pi}{3} + i\sin\frac{4\pi}{3}\right)^9 = \cos 12\pi + i\sin 12\pi = 1 + 0i = 1.$$

Ответ: 1.

Извлечение корня из комплексного числа

Определение 2. Корнем n-й степени из комплексного числа называется такое комплексное число, n-я степень которого равна данному комплексному числу.

Корень n-й степени обозначается символом $\sqrt[n]{a+bi}$.

Данное комплексное число запишем в тригонометрической форме $a+bi=r(\cos\varphi+i\sin\varphi)$. Тогда имеем

$\sqrt[n]{a+bi}=\sqrt[n]{r(\cos\varphi+i\sin\varphi)}$.

Пусть $\sqrt[n]{r(\cos\varphi+i\sin\varphi)}=\rho(\cos\alpha+i\sin\alpha)$.

По определению корня получим

$\left(\rho(\cos\alpha+i\sin\alpha)\right)^n=r(\cos\varphi+i\sin\varphi)$.

По формуле Муавра имеем:

$\rho^n(\cos n\alpha+i\sin n\alpha)=r(\cos\varphi+i\sin\varphi)$.

По условию равенства комплексных чисел, заданных в тригонометрической форме, получаем: $\rho^n=r$

и $n\alpha=\varphi+2\pi k,\ k\in Z. \Rightarrow \rho=\sqrt[n]{r},\ \alpha=\dfrac{\varphi+2\pi k}{n},\ k\in Z$.

Таким образом,

$$\sqrt[n]{r(\cos\varphi+i\sin\varphi)}=\sqrt[n]{r}\left(\cos\frac{\varphi+2\pi k}{n}+i\sin\frac{\varphi+2\pi k}{n}\right)=z_k,$$

где k может принимать любые целые значения.

Рассмотрим последовательно значения k:

1) $k=0$, тогда $z_0=\sqrt[n]{r(\cos\varphi+i\sin\varphi)}=\sqrt[n]{r}\left(\cos\dfrac{\varphi}{n}+i\sin\dfrac{\varphi}{n}\right)$;

2) $k=1$, тогда $z_1=\sqrt[n]{r(\cos\varphi+i\sin\varphi)}=$

$=\sqrt[n]{r}\left(\cos\dfrac{\varphi+2\pi}{n}+i\sin\dfrac{\varphi+2\pi}{n}\right)$

3) $k = 2$, тогда $z_2 = \sqrt[n]{r(\cos\varphi + i\sin\varphi)} =$

$$= \sqrt[n]{r}\left(\cos\frac{\varphi+4\pi}{n} + i\sin\frac{\varphi+4\pi}{n}\right);$$

n) $k = n - 1$, тогда $z_{n-1} = \sqrt[n]{r(\cos\varphi + i\sin\varphi)} =$

$$= \sqrt[n]{r}\left(\cos\frac{\varphi+2\pi(n-1)}{n} + i\sin\frac{\varphi+2\pi(n-1)}{n}\right);$$

$n + 1$) $k = n$, тогда

$$z_n = \sqrt[n]{r(\cos\varphi + i\sin\varphi)} = \sqrt[n]{r}\left(\cos\frac{\varphi+2\pi n}{n} + i\sin\frac{\varphi+2\pi n}{n}\right) =$$

$$= \sqrt[n]{r}\left(\cos\left(\frac{\varphi}{n}+2\pi\right) + i\sin\left(\frac{\varphi}{n}+2\pi\right)\right) = \sqrt[n]{r}\left(\cos\frac{\varphi}{n} + i\sin\frac{\varphi}{n}\right) = z_0 .$$

При $k = n + 1$ получим $z_{n+1} = z_1$ и т.д.

Таким образом, получили, что **корень *n*-й степени из комплексного числа имеет ровно *n* различных значений.**

Пример 4. Найдите все значения корня.

$$\sqrt[3]{27i} = \sqrt[3]{27\left(\cos\frac{\pi}{2} + i\sin\frac{\pi}{2}\right)} = 3\left(\cos\frac{\frac{\pi}{2}+2\pi k}{3} + i\sin\frac{\frac{\pi}{2}+2\pi k}{3}\right) =$$

$$= 3\left(\cos\left(\frac{\pi}{6}+\frac{2\pi k}{3}\right) + i\sin\left(\frac{\pi}{6}+\frac{2\pi k}{3}\right)\right),\ k = 0,\ 1,\ 2.$$

$$k = 0 \Rightarrow z_0 = 3\left(\cos\frac{\pi}{6} + i\sin\frac{\pi}{6}\right) = \frac{3\sqrt{3}}{2} + \frac{3i}{2}.$$

$$k = 1 \Rightarrow z_1 = 3\left(\cos\frac{5\pi}{6} + i\sin\frac{5\pi}{6}\right) = -\frac{3\sqrt{3}}{2} + \frac{3i}{2}.$$

$$k = 2 \Rightarrow z_2 = 3\left(\cos\frac{3\pi}{2} + i\sin\frac{3\pi}{2}\right) = -3i.$$

Пример 5. Найдите все значения корня.

$$\sqrt[4]{-2-i2\sqrt{3}}=\sqrt[4]{4\left(\cos\frac{4\pi}{3}+i\sin\frac{4\pi}{3}\right)}=$$

$$=\sqrt{2}\left(\cos\frac{\frac{4\pi}{3}+2\pi k}{4}+i\sin\frac{\frac{4\pi}{3}+2\pi k}{4}\right)=\sqrt{2}\left(\cos\left(\frac{\pi}{3}+\frac{\pi k}{2}\right)+i\sin\left(\frac{\pi}{3}+\frac{\pi k}{2}\right)\right),$$

где k = 0, 1, 2, 3.

$$k=0\Rightarrow z_0=\sqrt{2}\left(\cos\frac{\pi}{3}+i\sin\frac{\pi}{3}\right)=\frac{\sqrt{2}}{2}+i\frac{\sqrt{6}}{2}.$$

$$k=1\Rightarrow z_1=\sqrt{2}\left(\cos\left(\frac{\pi}{3}+\frac{\pi}{2}\right)+i\sin\left(\frac{\pi}{3}+\frac{\pi}{2}\right)\right)=-\frac{\sqrt{6}}{2}+i\frac{\sqrt{6}}{2}.$$

$$k=2\Rightarrow z_2=\sqrt{2}\left(\cos\left(\frac{\pi}{3}+\pi\right)+i\sin\left(\frac{\pi}{3}+\pi\right)\right)=-\frac{\sqrt{2}}{2}-i\frac{\sqrt{6}}{2}.$$

$$k=3\Rightarrow z_3=\sqrt{2}\left(\cos\left(\frac{\pi}{3}+\frac{3\pi}{2}\right)+i\sin\left(\frac{\pi}{3}+\frac{3\pi}{2}\right)\right)=\frac{\sqrt{6}}{2}-i\frac{\sqrt{2}}{2}.$$

Задание 1. Запишите в тригонометрической форме.

а) $1+i$; б) $\frac{1}{2}+i\frac{\sqrt{3}}{2}$; в) $\sqrt{3}+i$; г) $2+i$;

д) 32; е) –7; ж) $-\frac{1}{2}$; з) 3;

и) $-2i$; к) $-3i$; л) $2i$; м) $\frac{1}{2}i$.

Задание 2. Выполните действия.

а) $3\left(\cos\frac{\pi}{6}+i\sin\frac{\pi}{6}\right)\left(\cos\frac{2\pi}{3}+i\sin\frac{2\pi}{3}\right)$;

б) $2\left(\cos\frac{\pi}{5}+i\sin\frac{\pi}{5}\right)\cdot 4\left(\cos\frac{\pi}{10}+i\sin\frac{\pi}{10}\right)$;

в) $2\left(\cos\frac{\pi}{3}+i\sin\frac{\pi}{3}\right)\left(\cos\frac{\pi}{6}+i\sin\frac{\pi}{6}\right)$;

г) $\left(\cos\frac{5\pi}{7}+i\sin\frac{5\pi}{7}\right):\left(\cos\frac{\pi}{14}+i\sin\frac{\pi}{14}\right)$;

д) $2\left(\cos\frac{\pi}{3}+i\sin\frac{\pi}{3}\right):3\left(\cos\frac{2\pi}{3}+i\sin\frac{2\pi}{3}\right)$;

е) $6\left(\cos\frac{2\pi}{3}+i\sin\frac{2\pi}{3}\right):3\left(\cos\frac{\pi}{3}+i\sin\frac{\pi}{3}\right)$;

ж) $\left(\cos\frac{\pi}{3}+i\sin\frac{\pi}{3}\right)^4$; з) $\left(2\left(\cos\frac{\pi}{7}+i\sin\frac{\pi}{7}\right)\right)^8$;

и) $\left(\sqrt{2}\left(\cos\frac{\pi}{15}+i\sin\frac{\pi}{15}\right)\right)^{30}$.

Задание 3. Выполните действия.

а) $(1+i)^7$; б) $(3-3i)^8$;

в) $\left(\frac{1}{2}-i\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^{11}$; г) $(1-i\sqrt{3})^5$.

Задание 4. Найдите все комплексные значения корня.

а) $\sqrt[4]{-1}$; б) $\sqrt[3]{i}$; в) $\sqrt[4]{-i}$; г) $\sqrt[4]{16}$;

д) $\sqrt[3]{1-i}$; е) $\sqrt[4]{4+4i}$; ж) $\sqrt{-2+2i}$; з) $\sqrt[5]{-\sqrt{3}-i}$.

Занятие 65.

УРАВНЕНИЯ НАД ПОЛЕМ КОМПЛЕКСНЫХ ЧИСЕЛ

Двучленные уравнения

Двучленные уравнения имеют вид:

$$Ax^n \pm B = 0 . \qquad (1)$$

Обозначим $x = z \cdot \sqrt[n]{\frac{B}{A}}$, где $\sqrt[n]{\frac{B}{A}}$ – арифметическое значение корня. Тогда уравнение (1) примет вид:

$$z^n \pm 1 = 0 \qquad (2)$$

Отсюда $z = \sqrt[n]{-1}$ или $z = \sqrt[n]{1}$.

Чтобы решить уравнение (1) или, что то же самое, уравнение (2), нужно найти n значений корня n-й степени из 1 или из –1.

Пример 1. Решите уравнение $3x^5 + 2 = 0$.

Решение. Обозначим $x = z \cdot \sqrt[5]{\frac{2}{3}}$. Тогда данное уравнение преобразуется следующим образом:

$$3\left(z \cdot \sqrt[5]{\frac{2}{3}}\right)^5 + 2 = 0 \Rightarrow \ 2z^5 + 2 = 0 \ \Rightarrow \ z^5 + 1 = 0 \Rightarrow \ z^5 = -1 \Rightarrow$$

$z = \sqrt[5]{\cos\pi + i\sin\pi} = \cos\frac{\pi + 2\pi k}{5} + i\sin\frac{\pi + 2\pi k}{5}$, $k = 0, 1, 2, 3, 4$. Находим пять комплексных значений корня z_0, z_1, z_2, z_3, z_4, а затем по формуле $x = z \cdot \sqrt[5]{\frac{2}{3}}$ пять значений x.

Пример 2. Решите уравнение $2x^7-5=0$.

Решение. Обозначим $x=z\cdot\sqrt[7]{\frac{5}{2}}$, тогда $5z^7-5=0\Rightarrow$

$z^5-1=0\Rightarrow z=\sqrt[7]{1}=\sqrt[7]{\cos 0+i\sin 0}=\cos\frac{2\pi k}{7}+i\sin\frac{2\pi k}{7}$,

k = 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6. Находим семь комплексных значений z, а затем семь значений x.

Частные случаи

Двучленные уравнения 3-й степени вида $Ax^3\pm B=0$

После подстановки $x=z\cdot\sqrt[3]{\frac{B}{A}}$ получаем уравнения вида $z^3+1=0$ или $z^3-1=0$.

1) $z^3+1=0 \Leftrightarrow (z+1)(z^2-z+1)=0 \Rightarrow z_1=-1$; $z_2=\frac{1-i\sqrt{3}}{2}$; $z_3=\frac{1+i\sqrt{3}}{2}$.

2) $z^3-1=0 \Leftrightarrow (z-1)(z^2+z+1)=0 \Rightarrow z_1=1$; $z_2=\frac{-1-i\sqrt{3}}{2}$; $z_3=\frac{-1+i\sqrt{3}}{2}$.

Двучленные уравнения 6-й степени вида $z^6-1=0$

$$z^6-1=0 \Leftrightarrow (z^3+1)(z^3-1)=0\Rightarrow z^3+1=0 \text{ или } z^3-1=0.$$

Двучленные уравнения 4-й степени вида

$$z^4-1=0 \quad (z^2-1)(z^2+1)=0\Rightarrow z^2-1=0 \text{ или } z^2+1=0,$$

$$z_1=1,\ z_2=-1,\ z_3=i,\ z_4=-i.$$

Трехчленные уравнения

Трехчленные уравнения имеют вид: $Ax^{2n} + Bx^n + C = 0$.

Решение. Обозначим $x^n = y$, получим квадратное уравнение $Ay^2 + By + C = 0$. Находим y_1 и y_2, затем решаем двучленные уравнения *n*-й степени: $x^n = y_1$ и $x^n = y_2$.

Пример 3. Решите уравнение $x^{10} - 3x^5 + 2 = 0$.

Решение. Обозначим $x^5 = y$. Имеем: $y^2 - 3y + 2 = 0$. Отсюда $y_1 = 2; y_2 = 1$.

Решаем двучленные уравнения: а) $x^5 = 2$ и б) $x^5 = 1$.

а) $x = \sqrt[5]{2} = \sqrt[5]{2(\cos 0 + i\sin 0)} = \sqrt[5]{2}\left(\cos\frac{2\pi k}{5} + i\sin\frac{2\pi k}{5}\right)$,

$k = 0, 1, 2, 3, 4$.

б) $x = \sqrt[5]{1} = \sqrt[5]{\cos 0 + i\sin 0} = \cos\frac{2\pi k}{5} + i\sin\frac{2\pi k}{5}$, $k = 0, 1, 2, 3, 4$.

Задание 1. Решите уравнения.

а) $x^6 + 1 = 0$;	б) $x^6 - 1 = 0$;
в) $x^4 - 16 = 0$;	г) $x^4 + 81 = 0$;
д) $x^5 + 1 = 0$;	е) $9x^2 - 6x + 1 = 0$;
ж) $x^2 + 2x + 4 = 0$;	з) $8x^6 - 9x^3 + 1 = 0$;
и) $8x^6 + 7x^3 - 1 = 0$;	к) $x^4 + 2x^2 - 9 = 0$.

Основная теорема алгебры (теорема Гаусса)

Каждое алгебраическое уравнение (многочлен) имеет в множестве комплексных чисел по крайней мере один корень (без доказательства).

Теорема. Пусть $z_1 \in \boldsymbol{C}$ – корень многочлена

$$P_n(z) = z^n + a_1 z^{n-1} + ... + a_{n-1} z + a_n \tag{1}$$

с комплексными коэффициентами. Тогда $P_n(z)$ делится нацело на $z–z_1$. Иными словами, это значит, что существует многочлен $Q_{n-1}(z)$ степени $n–1$ такой, что

$$P_n(z)=(z–z_1)\cdot Q_{n-1}(z). \qquad (2)$$

По основной теореме алгебры многочлен $Q_{n-1}(z)$ имеет корень $z\in \boldsymbol{C}$, назовем его z_2 . Следовательно, как и в предыдущем случае, многочлен $Q_{n-1}(z)$ можно представить в виде произведения $(z–z_2)\cdot Q_{n-2}(z)$, где $Q_{n-2}(z)$ – многочлен степени $n–2$. В силу (2)

$$P_n(z)=(z–z_1)\cdot(z–z_2)\, Q_{n-2}(z).$$

Продолжив эти рассуждения, можно представить многочлен $P_n(z)$ как произведение линейных множителей, которое принято называть разложением многочлена на простейшие множители, т.е.

$$P_n(z)=(z–z_1)\cdot (z–z_2)\cdot (z–z_3)\cdots (z–z_n), \qquad (3)$$

где z_1, ... z_n – корни $P_n(z)$. Среди корней многочлена $P_n(z)$ могут быть и повторяющиеся, их принято называть кратными, а количество повторений называют кратностью соответствующего корня z_k. В этом случае будем говорить, что многочлен $P_n(z)$ имеет k совпадающих корней, равных z_k . Разложение (28) можно тогда записать в виде:

$$P_n(z) \;= (z–z_1)^p\cdot(z–z_2)^q \cdots (z–z_k)^r, \qquad (4)$$

причем $p+q+...+r = n$. Можно сформулировать теперь следующую теорему:

любой многочлен $P_n(z) = z^n + a_1\, z^{n-1} + ...+ a_{n-1}\, z +a_n$
с комплексными коэффициентами имеет на множестве комплексных чисел ровно n корней.

Замечание. Разложение (4) однозначно определено для каждого многочлена $P_n(z)$ с точностью до нумерации корней.

Ранее было произведено расширение множества действительных чисел $\boldsymbol{R}$ до множества комплексных чисел $\boldsymbol{C}$. Учитывая последнюю теорему, рассмотрим «приобретения» в связи с ним. Для этого решим уравнение типа $w^2 + A = 0$, $A \in \boldsymbol{R}_+$. Во множестве $\boldsymbol{R}$ такие уравнения решения не имели.

Теперь двучленное уравнение $w^2 + 1 = 0$ имеет два корня $w_1 = i$, $w_2 = -i$, так как $w \in \boldsymbol{C}$.

Уравнение же $w^2 + A = 0$, $w^2 = -A$ также имеет два корня $w_{1,2} = \pm i\sqrt{A}$

Утверждение. Квадратное уравнение $az^2+bz+c = 0$ в множестве комплексных чисел всегда имеет два корня $z_{1,2} = \dfrac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$, причем:

– если $D=b^2-4ac=0$, имеем $z_1 = z_2$, $z_1, z_2 \in \mathbf{R}$;

– если $D > 0$, имеем $z_1 \neq z_2$, $z_1, z_2 \in \mathbf{R}$;

– если $D < 0$, имеем пару z_1, z_2 комплексно-сопряженных корней, т.е. $z_1 = \overline{z_2}$.

Пример 4. $z^2 - 4z + 13 = 0$

$$z_{1,2} = \frac{4 \pm \sqrt{16-52}}{2} = \frac{4 \pm \sqrt{-36}}{2} = \frac{4 \pm 6i}{2} = 2 \pm 3i.$$

Справедлива **теорема Виета**. Если z_1 и z_2 – корни уравнения

$az^2 + bz + c = 0$, то $z_1 + z_2 = -b/a$, $z_1 \cdot z_2 = c/a$.

Упражнение 1. Докажите теорему Виета.

Упражнение 2. Составьте квадратное уравнение по его корням:

1) $z_1 = z_2 = 3$; 2) $z_{1,2} = 1 + \mathrm{i}$;

3) $z_{1,2} = \pm 3\mathrm{i}$; 4) $z_1 = z_2 = -2 - \mathrm{i}$.

Являются ли ваши ответы в каждом отдельном случае единственно возможными?

Для практики оказывается весьма полезной следующая **теорема:** целые корни любого алгебраического уравнения с целыми коэффициентами являются делителями свободного члена.

Докажем её.

Пусть $z = k$ – целый корень уравнения $a_0 z^n + a_1 z^{n-1} + ...+ a_n z^0 = 0$ с целыми коэффициентами. Тогда $a_0 k^n + a_1 k^{n-1} + ...+ a_n k^0 = 0$ и, следовательно, $-k(a_0 k^{n-1} + a_1 k^{n-1} + ...+a_{n-1}) = a_n$.

Понятно, число в левой части последнего равенства делится на k, причем число, стоящее в скобках, является целым, поэтому число a_n делится нацело на k.

Примеры.

1) Решите уравнение $z^5 - 2z^4 - 13z^3 + 26z^2 + 36z - 72 = 0$.

Решение. Делителями свободного члена являются числа: $\pm 1, \pm 2, \pm 3, \pm 4, \pm 6, \pm 9, \pm 12, \pm 18, \pm 24, \pm 36, \pm 72$.

Среди этих чисел с помощью испытаний мы отберем только два числа ± 2, обращающих равенство в истинное высказывание, т.е. корни уравнения. Разделим многочлен в левой части равенства на $z^2 - 4$. Получим:

$$z^5 - 2z^4 - 13z^3 + 26z^2 + 36z - 72 = \left(z^2 - 4\right)\left(z^3 - 2z^2 - 9z + 18\right).$$

Корнем уравнения $z^3 - 2z^2 - 9z + 18 = 0$ является $z = 2$, разделив уравнение на $z - 2$, мы получим $z^2 - 9$. Таким образом, многочлен в левой части уравнения раскладывается на множители: $(z+3)(z+2)(z-2)^2(z-3)$.

Следовательно, уравнение имеет три простых корня $z = -3$, $z = -2$, $z = 3$ и один двукратный $z = 2$.

2) Докажем, что если уравнение $a_0 z^n + a_1 z^{n-1} + ...+ a_n z^0 = 0$ с действительными коэффициентами имеет корень z_0, то число $\overline{z_0}$ также является корнем этого уравнения.

Доказательство. Так как z_0 корень уравнения, то справедливо равенство

$$P(z_0) = a_0 z_0{}^n + a_1 z_0{}^{n-1} + a_2 z_0{}^{n-2} + \ldots + a_n = 0.$$

Рассмотрим $P(\overline{z_0}) = a_0 \overline{z_0}^{\,n} + a_1 \overline{z_0}^{\,n-1} + a_2 \overline{z_0}^{\,n-2} + \ldots + a_n = 0.$

Учитывая, что коэффициенты многочлена – действительные числа, т.е. $a_i = \overline{a_i}$, последнее равенство можно переписать таким образом:

$$P(\overline{z_0}) = \overline{a_0}\,\overline{z_0{}^n} + \overline{a_1}\,\overline{z_0{}^{n-1}} + \overline{a_2}\,\overline{z_0{}^{n-2}} + \ldots + \overline{a_n} =$$

$$\overline{a_0 z_0{}^n + a_1 z_0{}^{n-1} + a_2 z_0{}^{n-2} + \ldots + a_n} = \overline{0} = 0.$$

3) Убедитесь в том, что число $i + 1$ является корнем уравнения $3z^4 - 5z^3 + 3z^2 + 4z - 2 = 0$, и найдите остальные корни.

Решение. Используя результат предыдущего пункта, можно утверждать, что корнем уравнения также является $1 - i$. Применим теорему Виета и получим многочлен $z^2 - 2z + 2$, на который разделим многочлен $3z^4 - 5z^3 + 3z^2 + 4z - 2$. Частное равно $3z^2 + z - 1$. Решение же уравнения $3z^2 + z - 1 = 0$ даёт действительные корни $z_{1,2} = \dfrac{-1 \pm \sqrt{13}}{6}$. Таким образом, уравнение имеет четыре корня – два комплексно-сопряженных и два действительных.

Задание 2. Решите уравнения.

а) $27x^3 - 8 = 0$; б) $x^4 + 1 = 0$;
в) $x^4 - 1 = 0$; г) $x^4 + 4 = 0$;
д) $16x^4 - 9 = 0$; е) $x^6 + 64 = 0$;
ж) $5x^2 - 3x - 10 = 0$; з) $x^4 - 8x^2 - 9 = 0$;
и) $8x^6 - 9x^3 + 8 = 0$; к) $x^3 - 2x^2 - 3x - 20 = 0$;
л) $x^3 + 3x^2 + 50 = 0$; м) $x^3 - 6x^2 + 12x - 9 = 0$;
н) $x^3 - x^2 - 4x - 6 = 0$.

Занятие 66.

МАТЕМАТИЧЕСКАЯ ИНДУКЦИЯ

Рассматриваемые в математике утверждения можно условно разделить на общие и частные.

Общие утверждения	*Частные утверждения*
1) Площадь треугольника вычисляется по формуле $S_\Delta = \sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}$, где $p = \dfrac{a+b+c}{2}$.	1) Если $a = b = c$, то $s_\Delta = \dfrac{a^2\sqrt{3}}{4}$.
2) На два делятся числа, которые оканчиваются четной цифрой.	2) 1576 делится на 2, так как 6 – чётное число.

Переход от общего утверждения к частному называется дедукцией. Дедукцией очень часто пользуются в математике. Все теоремы, которые мы доказываем, необходимы для того, чтобы решать различные частные задачи.

Вывод общих утверждений часто связан с анализом большого числа частных задач.

Пример 1. Изучая арифметическую прогрессию $a_2 = a_1 + d$, $a_3 = a_1 + 2d$, $a_4 = a_1 + 3d, \dots$, мы замечаем, что $a_n = a_1 + d(n-1), n \in N, n \ge 2$.

Переход от частных утверждений к общему называется **индукцией.**

Но если верны отдельные случаи, то общее утверждение верно не всегда.

Пример 2. Рассмотрим значение функции $f(n) = n^2 + n + 41$, где $n \in N$. Имеем: $f(1) = 43$, $f(2) = 47$, $f(3) = 53$, $f(4) = 61$, … . Мы замечаем, что значения $f(n)$ при

n = 1, 2, 3, 4, … – простые числа. Можно предположить, что значения $f(n)$ простые числа при всех $n \in N$. Но это не верно, так как $f(41) = 41^2 + 41 + 41 = 41 \cdot 43$ – составное число.

История математики знает много примеров таких заблуждений.

Пример 3. Рассмотрим значения $2^{2^n} + 1$. При n = 1, 2, 3 и 4 это простые числа. Действительно, $2^{2^1} + 1 = 5$, $2^{2^2} + 1 = 17$, $2^{2^3} + 1 = 257$, $2^{2^4} + 1 = 2^{16} + 1 = 65537$. Но при n = 5 значение $2^{2^5} + 1 = 2^{32} + 1$ оказалось настолько большим, что великий математик Ферма (1600 г.) не смог выяснить, простое оно или составное, и сделал заключение, что значения $2^{2^n} + 1, n \in Z$ – простые числа.

Но другой математик Эйлер в 1700 г. посчитал, что $2^{2^5} + 1 = 2^{32} + 1 = 4294967297 = 641 \cdot 6700417$ – составное число.

Итак, если верны частные случаи, то общее утверждение верно не всегда.

О том, когда верно общее утверждение, в математике говорит аксиома математической индукции.

Аксиома. Пусть некоторое утверждение $A(n)$ верно при n = 1 ($A(1)$ – верно). Если из того, что $A(n)$ верно при $n = k$ (где k любое натуральное число), следует, что оно верно и при следующем значении $n = k + 1$, то утверждение $A(n)$ верно при любом $n \in N$.

Пример 4. Докажите, что

$$S_n = \frac{1}{1 \cdot 2} + \frac{1}{2 \cdot 3} + \frac{1}{3 \cdot 4} + \ldots + \frac{1}{n(n+1)} = \frac{n}{n+1}.$$

Доказательство.

1. Проверяем, что формула верна при n = 1

$$S_1 = \frac{1}{1+1} = \frac{1}{1 \cdot 2}.$$

2. Предположим, что формула верна для некоторого числа n, т.е. $S_n = \dfrac{n}{n+1}$.

3. Рассмотрим $S_{n+1} = S_n + \dfrac{1}{(n+1)(n+2)} =$

$$= \frac{n}{n+1} + \frac{1}{(n+1)(n+2)} = \frac{n(n+2)+1}{(n+1)(n+2)} = \frac{n^2+2n+1}{(n+1)(n+2)} =$$

$\dfrac{(n+1)^2}{(n+1)(n+2)} = \dfrac{n+1}{n+2}$. Получили то же правило.

Итак, формула верна при $n = 1$, для некоторого n и при $n + 1$, следовательно, по аксиоме математической индукции она верна при любых $n \in N$.

Задание 1. Используя метод математической индукции, докажите, что:

1. $1+2+3+\ldots+n = \dfrac{n(n+1)}{2}$.
2. $1^3+2^3+3^3+\ldots+n^3 = \left(\dfrac{n(n+1)}{2}\right)^2$.
3. $1+3+5+\ldots+(2n-1) = n^2$.
4. $1^2+2^2+3^2+\ldots+n^2 = \dfrac{n(n+1)(2n+1)}{6}$.

Задание 2. Докажите, что при любом натуральном ***k*** верны равенства:

1. $\dfrac{1}{1\cdot 10} + \dfrac{1}{10\cdot 19} + \dfrac{1}{19\cdot 28} + \dfrac{1}{28\cdot 37} + \cdots + \dfrac{1}{(9k-8)(9k+1)} = \dfrac{k}{9k+1}$;

2. $1\cdot 4 + 2\cdot 7 + 3\cdot 10 + \cdots + k(3k+1) = k(k+1)^2$;

3. $\dfrac{1}{2} + \dfrac{2}{4} + \dfrac{3}{8} + \dfrac{4}{16} + \cdots + \dfrac{k}{2^k} = 2 - \dfrac{k+2}{2^k}$;

4. $\dfrac{1}{2\cdot 3} + \dfrac{1}{3\cdot 4} + \dfrac{1}{4\cdot 5} + \dfrac{1}{5\cdot 6} + \cdots + \dfrac{1}{(k+1)(k+2)} = \dfrac{k}{2(k+2)}$;

5. $\frac{1}{6\cdot 7}+\frac{1}{7\cdot 8}+\frac{1}{8\cdot 9}+\frac{1}{9\cdot 10}+\cdots+\frac{1}{(k+5)(k+6)}=\frac{k}{6(k+6)}$;

6. $\frac{1}{3\cdot 5}+\frac{1}{5\cdot 7}+\frac{1}{7\cdot 9}+\frac{1}{9\cdot 11}+\cdots+\frac{1}{(2k+1)(2k+3)}=\frac{k}{3(2k+3)}$;

7. $1^2-2^2+3^2-4^2+\cdots+(-1)^{k-1}k^2=(-1)^{k-1}\frac{k(k+1)}{2}$;

8. $2\cdot 2^2+3\cdot 2^3+4\cdot 2^4+\cdots+(k+1)\cdot 2^{k+1}=k\cdot 2^{k+2}$.

Задание 3. Докажите:

а) неравенство Бернулли $(1+x)^k \geq 1+kx, \quad (x>-1,\, k\in N)$.

б) $|\sin nx| \leq n|\sin x| \quad (n\in N)$;

в) $(1+h)^n > 1+nh+\frac{n(n-1)}{2}h^2$ для любого натурального $n \geq 3$ и $h>0$.

Задание. 4 Докажите равенства методом математической индукции:

а) $1^2+3^2+5^2+\ldots+(2n-1)^2=\frac{n(2n-1)(2n+1)}{3}$;

б) $1^3+3^3+5^3+\ldots+(2n-1)^3=n^2(2n^2-1)$;

в) $1\cdot 1!+2\cdot 2!+3\cdot 3!+\ldots+n\cdot n!=(n+1)!-1$.

г) $\frac{1}{4\cdot 5}+\frac{1}{5\cdot 6}+\frac{1}{6\cdot 7}+\ldots+\frac{1}{(n+3)(n+4)}=\frac{n}{4(n+4)}$;

д) $2^2+6^2+\ldots+(4n-2)^2=\frac{4n(2n-1)(2n+1)}{3}$

е) $\frac{7}{1\cdot 8}+\frac{7}{8\cdot 15}+\frac{7}{15\cdot 22}+\ldots+\frac{7}{(7n+6)(7n+1)}=1-\frac{1}{7n+1}$;

и) $\frac{1}{4\cdot 8}+\frac{1}{8\cdot 12}+\frac{1}{12\cdot 16}+\ldots+\frac{1}{4n(4n+4)}=\frac{1}{16}-\frac{1}{16(n+1)}$.

Занятие 67.

ЧИСЛОВАЯ ПОСЛЕДОВАТЕЛЬНОСТЬ

Определение. Функция от натурального аргумента называется числовой последовательностью.

Например, если функция $f(x) = 2x + 1$ определена на множестве натуральных чисел, то это числовая последовательность. Частные значения функции $f(1) = 3$, $f(2) = 5$, $f(3) = 7$, …, $f(n) = 2n + 1$, … называются членами последовательности. Каждый член последовательности имеет свой номер.

Последовательности обозначают: $\{u_n\}$; $\{x_n\}$; $\{a_n\}$; $\{b_n\}$ и т.д.

Задать числовую последовательность – это указать правило нахождения члена последовательности по его номеру.

Способы задания последовательности

1. С помощью формулы, когда по номеру члена находим этот член. Например, $u_n = n^2 - 1$. Имеем:
$u_1 = 0, u_2 = 3, u_3 = 8$ и т.д. Формула, по которой находим любой член последовательности по его номеру, называется формулой общего члена последовательности.

2. С помощью описания его членов. Например, приближенные значения $\sqrt{2}$ с точностью до 0,1; 0,01; 0,001; … с недостатком: 1,4; 1,41; 1,414; 1,4142; 1,41421; …, с избытком: 1,5; 1,42; 1,415; 1,4153; 1,41422; ….

3. Рекуррентный способ. Указывается несколько первых членов последовательности, а все остальные члены определяются по заданному правилу. Например, $u_1 = 1$;
$u_2 = 1$; $u_{n+2} = \dfrac{u_n + u_{n+1}}{2}$.

Задание 1. Напишите 4 первых члена последовательности.

а) $u_n = \dfrac{n-1}{2+n}$; б) $u_n = (-1)^n$; в) $u_n = \cos\dfrac{\pi n}{3}$; г) $u_n = \sin\dfrac{\pi n}{6}$.

Задание 2. По заданным первым членам последовательности напишите формулу n-го члена.

а) 1, 3, 5, 7, 9, …; б) $\dfrac{1}{2}, \dfrac{1}{4}, \dfrac{1}{8}, \ldots$; в) 2, 4, 6, 8, …;

г) $\dfrac{1}{2}, \dfrac{3}{4}, \dfrac{5}{8}, \dfrac{7}{16} \ldots.$ д) $-1, 0, -\dfrac{1}{2}, 0. -\dfrac{1}{3}, \cdots$

Графическое изображение числовой последовательности

Постройте график $u_n = \dfrac{2n}{n+1}$.

1-й способ. На координатной плоскости (рис. 1).

n	1	2	3	4
u_n	1	$\dfrac{1}{3}$	$\dfrac{3}{2}$	$\dfrac{8}{5}$

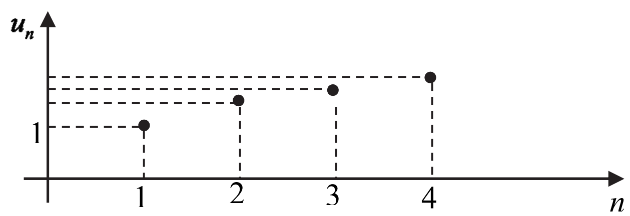


Рис. 1.

График последовательности – дискретные точки на координатной плоскости.

2-й способ. На числовой прямой (рис. 2).

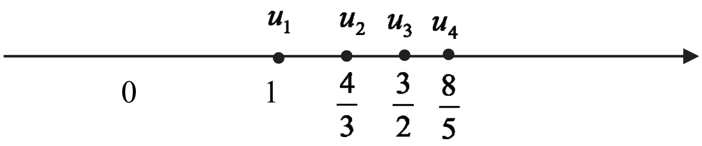


Рис. 2.

Задание 3. Напишите первые семь членов последовательности, n-й член которой задается формулой.

а) $u_n = \dfrac{n+1}{n+2}$; б) $u_n = 4$; в) $u_n = 2^n$; г) $u_n = \dfrac{n+1}{1-2^n}$.

Задание 4. Напишите первые пять членов последовательности и изобразите их на координатной плоскости.

а) $u_n = \dfrac{n}{n+1}$; б) $u_n = \dfrac{(-1)^n}{n}$; в) $u_n = \sqrt[3]{n+1}$.

Задание 5. Напишите первые шесть членов последовательности и изобразите их на числовой прямой.

а) $u_n = \dfrac{2n-1}{n+1}$; б) $u_n = \dfrac{1}{n}$; в) $u_n = 2-n$.

Занятие 68.

ЧИСЛОВАЯ ПОСЛЕДОВАТЕЛЬНОСТЬ
(продолжение 1)

Монотонные последовательности

Определение 1. Числовая последовательность u_1, $u_2, u_3, \ldots$ называется *монотонно возрастающей*, если для любого n $u_{n+1} > u_n$ ($n = 1, 2, 3, \ldots$).

Определение 2. Числовая последовательность называется *монотонно убывающей*, если для любого n $u_{n+1} < u_n$ ($n = 1, 2, 3, \ldots$).

Последовательности: $u_n = (-1)^n$; $u_n = \dfrac{(-1)^{n+1}}{n}$ называются *колеблющимися последовательностями*.

Задание 1. Какие последовательности являются возрастающими, какие убывающими и какие колеблющимися?

а) $1, \dfrac{1}{2}, \dfrac{1}{3}, \ldots, \dfrac{1}{n}, \ldots$; б) 1, 3, 5, …, $2n$-1, …;

в) $1, 4, 9, \ldots, n^2, \ldots$; г) $1, -\dfrac{1}{2}, \dfrac{1}{3}, -\dfrac{1}{4}, \ldots, \dfrac{(-1)^{n+1}}{n}, \ldots$;

д) $\sin 1, \sin 2, \sin 3, \ldots, \sin n, \ldots$.

Задание 2. Докажите, что последовательность $u_n = \dfrac{2n}{2n+1}$ возрастающая.

Задание 3. Докажите, что последовательность $u_n = \dfrac{2n+1}{7n-6}$ убывающая.

Ограниченные и неограниченные последовательности

Определение 3. Числовая последовательность $\{u_n\}$ называется *ограниченной сверху*, если все её члены меньше некоторого числа *M*. $u_n < M \quad (n = 1, 2, 3, \ldots)$.

Например, последовательность $\frac{1}{2}, \frac{2}{3}, \frac{3}{4}, \ldots, \frac{n}{n+1}, \ldots$ ограничена сверху, так как все её члены меньше 1 ($u_n < 1$).

Мы взяли $M = 1$. Можно взять $M = 2$ или 3. Важно то, что такое число существует.

Определение 4. Числовая последовательность $\{u_n\}$ называется *ограниченной снизу*, если все её члены больше некоторого числа *m*. $u_n > m \quad (n = 1, 2, 3, \ldots)$.

Например, последовательность 1, 3, 5, …, $2n$-1, … ограничена снизу, так как все её члены больше $m = \frac{1}{2}$.

Мы взяли $m = \frac{1}{2}$. Можно взять $m = 0$ или $\frac{1}{3}$. Важно то, что такое число существует.

Если последовательность $m \le u_n \le M$, то она ограничена и сверху и снизу.

Например, последовательность $1, \frac{1}{2}, \frac{1}{4}, \frac{1}{8}, \ldots, \frac{1}{n^2}, \ldots$ ограничена сверху и снизу: $0 < \frac{1}{n^2} \le 1$.

Пример 1. Определите, является ли последовательность (u_n): $\frac{5}{1}, \frac{7}{2}, \frac{9}{3}, \ldots, \frac{2n+3}{n}, \ldots$ ограниченной или не ограниченной.

Решение. При возрастании n члены последовательности приближаются к числу 2. Рассмотрим разность

$u_n - 2 = \frac{2n+3}{n} - 2 = \frac{3}{n}$, т.е. при $n \to \infty$ разность $u_n - 2 \to 0$.

$\{u_n\} > 2$ ограничена снизу.

Задание 4. Определите, какие из данных последовательностей ограничены и какие не ограничены.

а) $\frac{1}{2}, \frac{2}{3}, \frac{3}{4}, \ldots, \frac{n}{n+1}, \ldots$; б) $\{u_n\} : \frac{\sin\frac{2\pi}{n}}{n}$;

в) $\frac{1}{2}, \frac{3}{4}, \frac{5}{6}, \ldots, \frac{2n-1}{2n}, \ldots$; г) $2, -3, 4, -5, \ldots, (-1)^{n+1}(n+1), \ldots$.

Предел последовательности

Рассмотрим числовую последовательность

$1, \frac{4}{3}, \frac{6}{4}, \frac{8}{5}, \ldots, \frac{2n}{n+1}, \ldots$. Её общий член $u_n = \frac{2n}{n+1}$. Изобразим члены последовательности на числовой прямой (рис. 1).

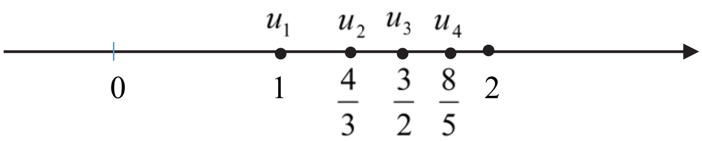


Рис. 1.

При возрастании n члены последовательности приближаются к числу 2. Рассмотрим расстояние между общим членом и числом 2. $|u_n - 2| = \left|\frac{2n}{n+1} - 2\right| = \left|\frac{-2}{n+1}\right| = \frac{2}{n+1}$.

С увеличением n это расстояние приближается к нулю.

В этом случае говорят, что число 2 является пределом данной последовательности при $n \to \infty$, и пишут $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{2n}{n+1}=2$. Читается: предел отношения $2n$ к $n+1$ при n стремящемся к бесконечности равен двум.

Если $\lim\limits_{n\to\infty} u_n = a$, то $|u_n - a|$ – расстояние от точки a до точки u_n при $n \to \infty$ может быть сколь угодно малым. Изобразим члены последовательности на числовой прямой (рис. 2).

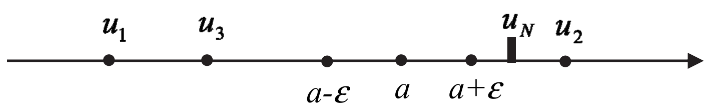


Рис. 2.

Возьмем сколь угодно малое положительное число ε и построим интервал ($a - \varepsilon$; $a + \varepsilon$). Неравенство $|u_n - a| < \varepsilon$ выполняется при $n > N$, т.е. все члены последовательности с номерами $n > N$ находятся внутри интервала ($a - \varepsilon$; $a + \varepsilon$).

Определение 5. Число a называется пределом числовой последовательности $u_1,\ u_2, u_3, \ldots,\ u_n,\ \ldots$ при $n \to \infty$, если для любого положительного числа ε существует число N такое, что все члены последовательности, начиная с номера $n = N + 1$, находятся в интервале ($a - \varepsilon$; $a + \varepsilon$).

Определение 6. Число a называется пределом числовой последовательности $u_1,\ u_2, u_3, \ldots,\ u_n,\ \ldots$ при $n \to \infty$, если для любого положительного числа ε существует число N такое, что для всех $n > N$ выполняется неравенство $|u_n - a| < \varepsilon$.

Записываем $\lim\limits_{n\to\infty} u_n = a$.

Пример 2. Докажите, что предел числовой последовательности $\frac{3}{2}, \frac{6}{3}, \frac{9}{4}, \ldots, \frac{3n}{n+1}, \ldots$ равен 3.

*Доказательство***.** Если $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{3n}{n+1}=3$, то по определению 2, для любого положительного числа $\varepsilon > 0$, существует такое число N, что для всех $n > N$ выполняется неравенство $\left|\frac{3n}{n+1}-3\right|<\varepsilon$. Решаем это неравенство. $\left|\frac{3n}{n+1}-3\right|<\varepsilon \Rightarrow$ $\left|\frac{3n-3n-3}{n+1}\right|<\varepsilon \Rightarrow \left|\frac{-3}{n+1}\right|<\varepsilon \Rightarrow \frac{3}{n+1}<\varepsilon \Rightarrow n+1 > \frac{3}{\varepsilon} \Rightarrow n >$ $\frac{3}{\varepsilon}-1$. Значит, если мы возьмем $N=\frac{3}{\varepsilon}-1$, то при $n > N$ будет выполняться $\left|\frac{3n}{n+1}-3\right|<\varepsilon$. А это и означает, что число 3 является пределом последовательности $\frac{3}{2}, \frac{6}{3}, \frac{9}{4}, \ldots, \frac{3n}{n+1}, \ldots$.

Пусть, например, $\varepsilon=\frac{1}{100}$, тогда $N =$ 299, и при $n > 300$ выполняется $\left|\frac{3n}{n+1}-3\right|<\frac{1}{100}$.

Задание 5. Докажите, что:

а) $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{1-n}{n+2}=-1$; б) $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{1-n^2}{n^2+1}=-1$.

Занятие 69.

ЧИСЛОВАЯ ПОСЛЕДОВАТЕЛЬНОСТЬ (продолжение 2)

Сходящиеся и расходящиеся последовательности

Теорема. Если числовая последовательность имеет предел, то он единственный.

Доказательство. Будем доказывать эту теорему методом от противного. Предположим, что последовательность имеет два предела. $\lim\limits_{n\to\infty} u_n = a$ и $\lim\limits_{n\to\infty} u_n = b$ ($a \neq b$). Тогда, по определению 1 для любого $\varepsilon > 0$ существуют такие числа N_1 и N_2, что при $n > N_1$ все члены последовательности находятся в интервале $(a-\varepsilon; a+\varepsilon)$, а при $n > N_2$ все члены последовательности находятся в интервале $(b-\varepsilon; b+\varepsilon)$ (рис. 1).

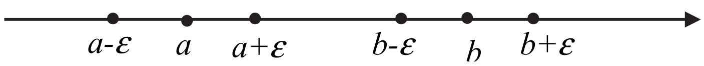


Рис. 1.

Возьмем $N = \max(N_1, N_2)$, тогда члены одной последовательности будут находиться одновременно в разных интервалах, что невозможно. Следовательно, наше предположение не верно, и если $\lim\limits_{n\to\infty} u_n$ существует, то он единственный.

Определение 1. Числовая последовательность, которая имеет предел, называется *сходящейся*, а которая не имеет предела, называется *расходящейся*.

Теорема Вейерштрасса. Любая монотонная и ограниченная числовая последовательность имеет предел (без доказательства).

Например, последовательность $u_n = \dfrac{4n}{n+1}$ возрастающая, так как $u_{n+1} > u_n$, и ограниченная, следовательно, она имеет предел.

Теоремы о пределах

Теорема 1. $\lim\limits_{n\to\infty} c = c$.

Теорема 2. $\lim\limits_{n\to\infty} c \cdot u_n = c \cdot \lim\limits_{n\to\infty} u_n$.

Теорема 3. Если $\lim\limits_{n\to\infty} u_n$ и $\lim\limits_{n\to\infty} v_n$ существуют, то $\lim\limits_{n\to\infty}(u_n + v_n) = \lim\limits_{n\to\infty} u_n + \lim\limits_{n\to\infty} v_n$.

Теорема 4. $\lim\limits_{n\to\infty}(u_n \cdot v_n) = \lim\limits_{n\to\infty} u_n \cdot \lim\limits_{n\to\infty} v_n$.

Теорема 5. $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{u_n}{v_n} = \dfrac{\lim\limits_{n\to\infty} u_n}{\lim\limits_{n\to\infty} v_n} \quad \left(\lim\limits_{n\to\infty} v_n \neq 0\right)$.

Определение 2. Если $\lim\limits_{n\to\infty} u_n = 0$, то последовательность называется бесконечно малой.

Определение 3. Если $\lim\limits_{n\to\infty} u_n = \infty$, то последовательность называется бесконечно большой.

Сумма и произведение бесконечно малых величин есть величина бесконечно малая.

Сумма и произведение бесконечно больших величин есть величина бесконечно большая.

Вычисление пределов

1. Сумма двух бесконечно больших последовательностей есть бесконечно большая последовательность. Условная запись $\infty + \infty = \infty$.

2. Частное постоянной величины и бесконечно большой последовательности есть бесконечно малая последовательность. Условная запись $\frac{c}{\infty} = 0$.

3. Частное постоянной величины и бесконечно малой последовательности есть бесконечно большая последовательность. Условная запись $\frac{c}{0} = \infty$.

4. Частное двух бесконечно больших последовательностей есть *неопределенность* типа $\frac{\infty}{\infty}$. В случае когда в числителе и знаменателе имеются многочлены, для раскрытия такой неопределенности числитель и знаменатель дроби делим на наибольшую степень переменной n.

Пример 1. Найдите $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{n^2-3n+1}{3n^2+2n-1}$.

Решение. Имеем *неопределенность* типа $\frac{\infty}{\infty}$. Раскрываем ее, поделив числитель и знаменатель на n^2.

$$\lim_{n\to\infty}\frac{n^2-3n+1}{3n^2+2n-1}=\lim_{n\to\infty}\frac{\left(1-\frac{3}{n}+\frac{1}{n^2}\right)}{\left(3+\frac{2}{n}-\frac{1}{n^2}\right)}=\frac{\lim\limits_{n\to\infty}\left(1-\frac{3}{n}+\frac{1}{n^2}\right)}{\lim\limits_{n\to\infty}\left(3+\frac{2}{n}-\frac{1}{n^2}\right)}=$$

$$=\frac{1-3\lim\limits_{n\to\infty}\frac{1}{n}+\lim\limits_{n\to\infty}\frac{1}{n^2}}{3+2\lim\limits_{n\to\infty}\frac{1}{n}-\lim\limits_{n\to\infty}\frac{1}{n^2}}=\frac{1-3\cdot 0+0}{3+2\cdot 0-0}=\frac{1}{3}.$$

Ответ: $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{n^2-3n+1}{3n^2+2n-1}=\frac{1}{3}$.

5. Частное двух бесконечно малых последовательностей есть *неопределенность* типа $\frac{0}{0}$. Раскрытие такой неопределенности рассмотрим на примере.

Пример 2. Найдите $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{u_n}{v_n}$, где $u_n=\frac{1}{n}$, $v_n=\frac{2}{n-1}$.

Решение. Имеем *неопределенность* типа $\frac{0}{0}$.

Преобразуем ее. $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{u_n}{v_n}=\lim\limits_{n\to\infty}\frac{\frac{1}{n}}{\frac{2}{n-1}}=\lim\limits_{n\to\infty}\frac{n-1}{2n}=\lim\limits_{n\to\infty}\frac{1-\frac{1}{n}}{2}=\frac{1}{2}$.

Ответ: $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{u_n}{v_n}=\frac{1}{2}$.

6. Разность двух бесконечно больших последовательностей есть неопределенность типа $\infty-\infty$.

Пример 3. Найдите $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\sqrt{n^2+1}-n\right)$.

Решение. Имеем неопределенность типа $\infty-\infty$. Для раскрытия этой неопределенности умножим и разделим на сопряженное выражение. Имеем $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\sqrt{n^2+1}-n\right)=$

$$=\lim_{n\to\infty}\frac{\left(\sqrt{n^2+1}-n\right)\left(\sqrt{n^2+1}+n\right)}{\sqrt{n^2+1}+n}=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{\sqrt{n^2+1}+n}=$$

$$=\frac{1}{\lim\limits_{n\to\infty}\left(\sqrt{n^2+1}+n\right)}=\frac{1}{\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt{n^2+1}+\lim\limits_{n\to\infty}n}=\frac{1}{\infty}=0.$$

Ответ: 0.

Задание 1. Найдите пределы.

а) $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{3-n^2}{2n^2+6n-3}$; б) $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{3n^2-n}{n^2-5}$;

в) $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{2n-7}{n^2+4n-1}$; г) $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{n^2+700}{n^2+1}$.

Занятие 70.

АРИФМЕТИЧЕСКАЯ ПРОГРЕССИЯ

Определение. ***Арифметическая прогрессия*** – это числовая последовательность $\{a_n\}$, заданная рекуррентной формулой $a_n = a_{n-1} + d$, $n = 2,3,4,\ldots$.

a_n – последующий член, a_{n-1} – предыдущий член, число d называется разностью прогрессии.

Чтобы задать арифметическую прогрессию, нужно задать ее первый член и разность.

Теорема. Общий член арифметической прогрессии находится по формуле $a_n = a_1 + d(n-1), n = 1,2,3,\ldots$.

Доказательство. Для доказательства утверждения теоремы будем использовать метод математической индукции.

Формула верна при $n = 1$, $a_1 = a_1$.

Предположим, что формула верна для некоторого n, и проверим ее справедливость для $n + 1$. Имеем $a_{n+1} = a_n + d = = a_1 + d(n-1) + d = a_1 + d \cdot n$. Итак, формула верна при $n = 1$, при n и при $n + 1$, следовательно, по аксиоме математической индукции, она верна при любом $n \in N$.

Формула $a_n = a_1 + d(n-1)$ показывает, что арифметическая прогрессия есть последовательность значений линейной функции $f(x) = a_1 + d(x-1)$ при $x =1, 2, 3, \ldots, n, \ldots$.

Если множество значений аргумента $x = 1, 2, 3, \ldots, n$ – конечное множество, то члены прогрессии образуют конечное множество $f(1), f(2), \ldots, f(n)$, которое называется конечной арифметической прогрессией. Обозначение: $\div$ – арифметическая прогрессия.

Свойство 1. В конечной арифметической прогрессии $a_1, a_2, a_3, \ldots, a_k, \ldots, a_{n+1-k}, \ldots, a_{n-2}, a_{n-1}, a_n$ выполняется свойство $a_1 + a_n = a_2 + a_{n-1} = \ldots = a_k + a_{n+1-k}$ – сумма крайних членов равна сумме членов, равноудалённых от концов.

a_k и a_{n+1-k} – члены, равноудаленные от концов.

a_k – k-й член от начала, a_{n+1-k} – k-ый член от конца.

Доказательство. $a_1 + a_n = 2a_1 + d(n-1)$.

$$+\begin{array}{l} a_k = a_1 + d(k-1), \\ a_{n+1-k} = a_1 + d(n+1-k-1) \\ \hline a_k + a_{n+1-k} = 2a_1 + d(n-1) \end{array}.$$

Свойство 2. В арифметической прогрессии

$$a_n = \frac{a_{n-1} + a_{n+1}}{2}.$$

Доказательство.

$$+\begin{array}{l} a_{n-1} = a_1 + d(n-2), \\ a_{n+1} = a_1 + dn \\ \hline a_{n-1} + a_{n+1} = 2a_1 + 2d(n-1) \end{array} \quad \Rightarrow \quad a_n = \frac{a_{n-1} + a_{n+1}}{2}.$$

$\dfrac{a_1 + a_2}{2}$ – *среднее арифметическое* двух чисел.

Итак: любой член арифметической прогрессии есть среднее арифметическое предыдущего и последующего членов.

Обратно, любая последовательность $\{u_n\}$, которая удовлетворяет условию $u_n = \dfrac{u_{n-1} + u_{n+1}}{2}$, есть арифметическая прогрессия.

Свойство 3. Сумма первых *n* членов арифметической прогрессии вычисляется по формуле

$$S_n = \frac{a_1 + a_n}{2} \cdot n \text{ или } S_n = \frac{2a_1 + d(n-1)}{2} \cdot n.$$

Доказательство.

$$\begin{array}{l} + \begin{array}{l} S_n = a_1 + a_2 + \ldots + a_{n-1} + a_n, \\ S_n = a_n + a_{n-1} + \ldots + a_2 + a_1 \end{array} \\ \hline 2S_n = (a_1 + a_n) + (a_2 + a_{n-1}) + \ldots + (a_{n-1} + a_2) + (a_n + a_1) \end{array}.$$

На основании свойства 1 имеем

$2S_n = (a_1 + a_n) \cdot n \quad \Rightarrow \quad S_n = \dfrac{a_1 + a_n}{2} \cdot n$. Подставив значение $a_n = a_1 + d(n-1)$, получим $S_n = \dfrac{2a_1 + d(n-1)}{2} \cdot n$.

Задание 1.

а) ÷ $a_1 = 2, d = 2$. Найдите S_{40};

б) ÷ $a_9 = 12, d = 1{,}5$. Найдите a_1;

в) ÷ $a_3 + a_5 = 8$. Найдите S_7;

г) ÷ $S_7 = 28$. Найдите $a_3 + a_5$;

д) Найдите сумму всех двузначных натуральных чисел, каждое из которых при делении на 3 дает остаток, равный 2;

е) ÷ $u_1, u_2, u_3, u_1 + u_2 = 171, \dfrac{u_3}{u_1} = 6$. Найдите u_1, u_2, u_3.

Занятие 71.

ГЕОМЕТРИЧЕСКАЯ ПРОГРЕССИЯ

Определение. ***Геометрическая прогрессия*** – это числовая последовательность, заданная рекуррентной формулой $b_n = b_{n-1} \cdot q$, где $q \neq 0$, $n \in N, n \geq 2$.

b_{n-1} – предыдущий член, b_n – последующий член, число $q \neq 0$ называется знаменателем прогрессии.

Теорема. Общий член геометрической прогрессии находится по формуле $b_n = b_1 \cdot q^{n-1}, n = 1,2,3,...$.

Доказательство (методом математической индукции).

1. Формула верна при $n = 1$, т.е. $b_1 = b_1$.

2. Предположим, что формула верна для некоторого числа n, т.е. $b_n = b_1 \cdot q^{n-1}$. Тогда $b_{n+1} = b_n \cdot q = b_1 \cdot q^{n-1} \cdot q = b_1 q^n$.

Итак: формула верна при $n = 1$, при n и при $n + 1$, следовательно, по аксиоме математической индукции она верна при любом $n \in N$.

Формула $b_n = b_1 \cdot q^{n-1}$ показывает, что геометрическая прогрессия есть последовательность значений показательной функции $f(x) = b_1 \cdot q^{x-1}$ при x =1, 2, 3, …, n, … .

Если множество значений аргумента x =1, 2, 3, …, n – конечное множество, то множество значений функции образует конечную геометрическую прогрессию.

Обозначение: $\div\div$ – геометрическая прогрессия.

Если знаменатель $q > 0$, то прогрессия называется *знакопостоянной*. У неё все члены имеют один и тот же знак.

Пример 1. $\div\div$ $b_1 = -4, q = 2$, то $\div\div$ -4; -8; -16; … – знакопостоянная последовательность.

Пример 2. $\div\div$ $b_1 = 4, q = \frac{1}{2}$, то $\div\div$ 4; 2; 1; $\frac{1}{2}, \ldots$ – знакопостоянная последовательность.

Если знаменатель $q < 0$, то прогрессия называется *знакочередующейся*.

Пример 3. $\div\div$ $b_1 = -1, q = -2$, то $\div\div$ -1; 2; -4; 8; … – знакочередующаяся последовательность.

Свойство 1. В конечной геометрической прогрессии произведение двух членов, равноудаленных от концов, равно произведению крайних членов:

$$b_1 \cdot b_n = b_2 \cdot b_{n-1} = \ldots = b_k \cdot b_{n+1-k}.$$

b_k – k-й член от начала, b_{n+1-k} – k-й член от конца.

Доказательство. $b_1 \cdot b_n = b_1 \cdot b_1 \cdot q^{n-1} = b_1^2 \cdot q^{n-1}$.

$$\begin{array}{l} b_k = b_1 \cdot q^{k-1}, \\ b_{n+1-k} = b_1 \cdot q^{n-k} \end{array} \Rightarrow b_k \cdot b_{n+1-k} = b_1^2 \cdot q^{n-1}.$$

Свойство 2. У знакоположительной геометрической прогрессии $b_n = \sqrt{b_{n-1} \cdot b_{n+1}}$.

Доказательство. $\sqrt{b_{n-1} \cdot b_{n+1}} = \sqrt{b_1 \cdot q^{n-2} \cdot b_1 \cdot q^n} =$
$= \sqrt{b_1^2 \cdot q^{2(n-1)}} = b_1 \cdot q^{n-1} = b_n$.

Итак, любой член $b_n, n > 1$ у знакоположительной геометрической прогрессии есть *среднее геометрическое* между предыдущим членом b_{n-1} и последующим членом b_{n+1}.

Отсюда, $b_n^2 = b_{n-1} \cdot b_{n+1}$.

Обратно: если знакоположительная последовательность $\{b_n\}$ удовлетворяет условию $\sqrt{b_{n-1} \cdot b_{n+1}} = b_n$, или $\frac{b_n}{b_{n-1}} = \frac{b_{n+1}}{b_n}$, то последовательность $\{b_n\}$ есть геометрическая прогрессия.

Свойство 3. Сумма первых n членов геометрической прогрессии $S_n = \dfrac{b_1\left(q^n - 1\right)}{q - 1}$, $q \neq 1$.

Доказательство.

$$+\begin{array}{l} S_n = b_1 + b_2 + \ldots + b_{n-1} + b_n, \quad \Big| \cdot(-q) \\ \underline{S_n = b_n + b_{n-1} + \ldots + b_2 + b_1 \qquad} \end{array}$$

$$S_n - S_n q = b_1 - b_n q \;\Rightarrow\; S_n(1-q) = b_1 - b_1 \cdot q \cdot q^{n-1} \;\Rightarrow$$

$$S_n = \frac{b_1\left(q^n - 1\right)}{q - 1} = \frac{b_1\left(1 - q^n\right)}{1 - q}, \; q \neq 1.$$

Задание.

а) $\div\div\; b_1 = 729,\, q = \dfrac{1}{3}$. Найдите b_7;

б) $\div\div\; b_1 = 1280,\, q = 0{,}5$. Найдите S_7;

в) $\div\div\; S_5 = 88,\, q = -\dfrac{1}{2}$. Найдите b_5;

г) $\div\div\; b_1 + b_4 = 35,\, b_2 + b_3 = 30$. Найдите b_4.

Занятие 72.

БЕСКОНЕЧНО УБЫВАЮЩАЯ ГЕОМЕТРИЧЕСКАЯ ПРОГРЕССИЯ

Пусть дана последовательность $\{u_n\}$, и рассмотрим бесконечную сумму $u_1 + u_2 + u_3 + \ldots + u_n + \ldots$. Такая сумма называется *рядом*. Числа последовательности $\{u_n\}$ называются членами ряда. Сумма $S_n = u_1 + u_2 + u_3 + \ldots + u_n$ называется n-й *частичной суммой* ряда.

Определение. Ряд $u_1+u_2+u_3+\ldots+u_n+\ldots$ называется сходящимся, если последовательность его частичных сумм сходится.

Суммой ряда называется $\lim\limits_{n\to\infty} S_n$.

Если $\lim\limits_{n\to\infty} S_n = S$, то $S=u_1+u_2+u_3+\ldots+u_n+\ldots$.

Бесконечно убывающая геометрическая прогрессия

Рассмотрим бесконечный ряд, члены которого образуют геометрическую прогрессию $u_1+u_1q+u_1q^2+\ldots+u_1q^{n-1}+\ldots$, где $|q|<1$. n-я частичная сумма определяется формулой $S_n=\dfrac{u_1\left(1-q^n\right)}{1-q}$. Найдем

$$\lim_{n\to\infty} S_n=\lim_{n\to\infty}\frac{u_1(1-q^n)}{1-q}=\frac{u_1}{1-q}\lim_{n\to\infty}\left(1-q^n\right)=\frac{u_1}{1-q}\left(\lim_{n\to\infty}1-\lim_{n\to\infty}q^n\right);$$

$$\lim_{n\to\infty} q^n=0, |q|<1 \;\Rightarrow\; \lim_{n\to\infty} S_n=\frac{u_1}{1-q}.$$

Бесконечно убывающая геометрическая прогрессия сходится, так как $\lim\limits_{n\to\infty} S_n$ существует и его принимаем за сумму ряда $u_1+u_1q+u_1q^2+\ldots+u_1q^{n-1}+\ldots=\dfrac{u_1}{1-q}$, $|q|<1$.

Вывод правила «Преобразование бесконечной периодической дроби в обыкновенную дробь»

На уроке № 72, исходя из приведенных примеров, вы сформулировали правило перевода бесконечной периодической дроби в обыкновенную дробь. Знание бесконечной геометрической прогрессии поможет нам обосновать сделанный ранее вывод.

Задача. Запишите периодическую дробь 0,(16) в виде обыкновенной дроби.

Решение. $0,(16) = 0,161616\ldots = 0,16 + 0,0016 +$
$+ 0,000016 + \ldots = \dfrac{0,16}{1-0,01} = \dfrac{0,16}{0,99} = \dfrac{16}{99}$. Это сумма бесконечно убывающей геометрической прогрессии, где
$b_1 = 0,16,\ q = 0,01$.

Ответ: $\dfrac{16}{99}$.

Задание. Найдите сумму бесконечно убывающей геометрической прогрессии, если:

а) $b_1 = 1,\ q = \dfrac{9}{10}$;　　б) $b_1 = 1,\ q = \dfrac{3}{4}$;

в) $b_1 = 1,\ q = \dfrac{2}{3}$;　　г) $b_3 = 2,\ b_6 = 0,25$.

Занятие 73.
ЭЛЕМЕНТЫ КОМБИНАТОРИКИ

Соединения

Из конечного числа предметов, например, букв, чисел, деталей и т.д., составляют по заданному правилу различные группы и затем делают подсчет этих групп.

Такие задачи называются комбинаторными, а раздел математики – комбинаторикой.

Группы, составленные из каких-либо предметов, называются соединениями. Предметы, из которых составляют соединения, называются элементами.

Различают три основных типа соединений: перестановки, сочетания и размещения.

В отношении этих трех соединений могут быть поставлены две основные задачи:

1. Как из конечного числа элементов составляются эти соединения?

2. Как, не составляя эти соединения, определить, сколько таких соединений существует?

Перестановки

Определение 1. *Перестановками* из n элементов называются такие соединения из n элементов, которые отличаются друг от друга только порядком элементов.

Сколько различных перестановок можно получить из n элементов?

Число перестановок из n элементов обозначают P_n (читаем: число перестановок из n элементов) и вычисляется по формуле $P_n = n \cdot (n-1) \cdot (n-2) \cdot (n-3) \cdot \ldots \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1$.

Обоснование этой формулы можно получить следующим образом.

Имеем n элементов. Первый элемент можно выбрать n способами. Осталось $n - 1$ элементов. Второй можно выбрать $(n - 1)$ способом, третий – $(n - 2)$ способами и т.д. последний одним способом. Таким образом $P_n = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot \ldots \cdot n$.

Произведение n первых чисел натурального ряда обозначают $n!$ (читаем: эн факториал). $1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot \ldots \cdot n = n!$ Следовательно, $P_n = n!$

Строгое доказательство можно провести методом математической индукции.

Теорема. Число всех перестановок из n элементов равно произведению n первых натуральных чисел $P_n = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot \ldots \cdot n$.

Доказательство (методом математической индукции).

1. $n = 1$, то $P_1 = 1$ формула верна.

2. Предположим, что формула верна при $n = k$, т.е. $P_k = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot \ldots \cdot k$. Докажем, что она верна при $n = k + 1$.

Но $P_{k+1} = (k+1)P_k = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot \ldots \cdot k \cdot (k+1)$, т.е. формула верна при $n = k + 1$. Следовательно, по аксиоме математической индукции формула верна при любом $n \in N$.

Свойства перестановок.

1) $P_n = n!$. 2) $P_n = nP_{n-1}$. 3) $P_0 = 1$.

Задание 1.

1) Сколько трехзначных чисел можно составить из цифр 2, 3, 5 (без повторения)?

2) Из цифр 1, 2, 3, 4 и 5 составляют пятизначные числа.

а) Сколько таких чисел?

б) Сколько из них будет начинаться с цифры 2; с цифры 5?

в) Сколько среди них будут начинаться с 24; с 245?

3) Сколько пятизначных чисел можно составить из цифр 0, 1, 2, 3, 4, используя цифру один раз?

4) Буквы о, с, л, ч, и располагаются в ряд в случайном порядке. Как определить вероятность того, что в результате получится слово «число»?

Задание 2.

1) Выполните действия:

а) $\frac{10!}{8!}$; б) $\frac{(n+2)!}{(n+1)!}$; в) $\frac{18!}{16!}$; г) $\frac{134! \cdot 15!}{135!}$.

2) Решите уравнения:

а) $\frac{(n+2)!}{n!} = 72$; б) $\frac{n! - (n-1)!}{(n+1)!} = \frac{1}{6}$;

в) $\frac{(n+3)!}{n!} = 720$; г) $n! = 42(n-2)!$.

Занятие 74.

ЭЛЕМЕНТЫ КОМБИНАТОРИКИ (продолжение 1)

Подмножества конечного множества

Определение 1. Множество B называется подмножеством множества A, если каждый элемент множества B принадлежит множеству A.

Если B подмножество A, то записывают $B \subset A$.

Размещения

Определение 2. *Размещениями* из n элементов по m элементов называются такие соединения из n элементов по m элементов, которые отличаются друг от друга или порядком элементов, или самими элементами.

Число размещений из n элементов по m обозначают A_n^m (читается: число размещений из n элементов по m) и вычисляют по формуле $A_n^m = n(n-1)(n-2)\ldots(n-(m-1))$, где $m \le n$.

В правой части этой формулы имеется m сомножителей.

Вывод формулы числа размещений

Имеем n элементов $a_1, a_2, a_3, \ldots, a_n$. Число размещений из n элементов по одному $A_n^1 = n$.

Чтобы найти число размещений из n элементов по два, составим эти размещения. Для этого возьмем размещения по одному (таких размещений n) и к каждому из них присоединим по очереди остальные n – 1 элемента. Тогда получим.

$\{a_1, a_2\}; \{a_1, a_3\}; \ldots; \{a_1, a_{n-1}\}; \{a_1, a_n\}$ – первая строка.

$\{a_2, a_1\}; \{a_2, a_3\}; \ldots; \{a_2, a_{n-1}\}; \{a_2, a_n\}$ – вторая строка.

. . . .

$\{a_n, a_1\}; \{a_n, a_2\}; \ldots; \{a_n, a_{n-2}\}; \{a_n, a_{n-1}\}$ – n-я строка.

Число размещений в каждой строке n – 1, строк – n. Таким образом, $A_n^2 = n(n-1)$.

Чтобы найти число размещений из n элементов по три, составим эти размещения. Упорядочим все размещения по два и к каждому из них присоединим по очереди остальные n – 2 элемента.

$\{a_1, a_2, a_3\}; \{a_1, a_2, a_4\}; \ldots; \{a_1, a_2, a_{n-1}\}; \{a_1, a_2, a_n\}$ – первая строка.

$\{a_1, a_3, a_2\}; \{a_1, a_3, a_4\}; \ldots; \{a_1, a_3, a_{n-1}\}; \{a_1, a_3, a_n\}$ – вторая строка.

. . . .

$\{a_n, a_{n-1}, a_1\}; \{a_n, a_{n-1}, a_2\}; \ldots; \{a_n, a_{n-1}, a_{n-3}\}; \{a_n, a_{n-1}, a_{n-2}\}$ – $n(n$-1)-я строка.

Число размещений в каждой строке n – 2, строк $n(n$ - 1).

Получаем $A_n^3 = n(n-1)(n-2)$.

Методом математической индукции докажем следующую теорему.

Теорема. $A_n^m = n(n-1)(n-2)\ldots(n-(m-1))$, где $m \le n$.

Доказательство. При m = 1 $A_n^1 = 1$ – верно. Предположим, что утверждение теоремы верно при n = k, т.е. $A_n^k = n(n-1)(n-2)\ldots(n-(k-1))$. Докажем, что формула верна при $m = k + 1$.

Возьмем одно из размещений k-го порядка и присоединим к нему по очереди каждый из оставшихся n – k элементов, которые не вошли во взятые нами размещения. Тогда мы получим n – k размещений k + 1 порядка. Таким образом, из каждого размещения k-го порядка можно образовать n – k размещений k + 1-го порядка. Имеем: $A_n^{k+1} = n(n-1)(n-2)\ldots(n-(k-1))(n-k)$. То есть формула оказалась верной и при $m = k + 1$. Следовательно, она верна при любом m.

$$\boxed{A_n^m = n(n-1)(n-2)\ldots(n-m+1)}$$

Следствие. $\boxed{A_n^m = \dfrac{n!}{(n-m)!}}$

Свойства размещений.

1. $A_n^m = n(n-1)(n-2)\dots(n-m+1)$.

2) $A_n^m = \dfrac{P_n}{P_{n-m}}$. 3) $A_n^0 = 1$. 4) $A_n^n = A_n^{n-1} = P_n = n!$

Примеры. $A_8^3 = 8\cdot 7\cdot 6 = 336$. $A_8^5 = 8\cdot 7\cdot 6\cdot 5\cdot 4 = 6720$.

$A_n^n = n\cdot(n-1)\cdot(n-2)\cdot\ldots\cdot 3\cdot 2\cdot 1 = n! = P_n$.

$A_n^{n-1} = n\cdot(n-1)\cdot(n-2)\cdot\ldots\cdot 3\cdot 2 = n! = A_n^n$.

Сочетания

Определение. ***Сочетаниями*** из n элементов по m элементов называются такие размещения из n элементов по m элементов, которые отличаются друг от друга только самими элементами.

Число сочетаний из n элементов по m элементов обозначают C_n^m (читается: число сочетаний из n элементов по m) и вычисляют по формуле $C_n^m = \dfrac{A_n^m}{P_m}$.

Формулы для вычислений:

1) $C_n^m = \dfrac{A_n^m}{P_m}$. 2) $C_n^m = \dfrac{P_n}{P_m\cdot P_{n-m}}$. 3) $C_n^m = \dfrac{n!}{m!\cdot(n-m)!}$.

4) $C_n^m = \dfrac{n\cdot(n-1)\cdot\ldots\cdot(n-m+1)}{1\cdot 2\cdot\ldots\cdot m}$ (в числителе и знаменателе по m сомножителей).

5) $C_n^0 = 1$.

Свойства сочетаний:

1) $C_n^m = C_n^{n-m}$. 2) $C_n^m + C_n^{m+1} = C_{n+1}^{m+1}$.

3) $C_n^0 + C_n^1 + C_n^2 + \ldots + C_n^n = 2^n$.

Задание 1. Вычислите.

а) C_{10}^3; б) A_5^2; в) $A_7^4 - P_3$.

Задание 2. Упростите.

а) $A_x^2 \cdot C_x^{x-1}$; б) $A_x^{x-2} : P_{x-2}$.

Занятие 75.
ЭЛЕМЕНТЫ КОМБИНАТОРИКИ (продолжение 2)

Основные свойства сочетаний

Свойство 1. $C_n^m = C_n^{n-m}$.

Доказательство. $C_n^m = \dfrac{n!}{m!(n-m)!}$

и $C_n^{n-m} = \dfrac{n!}{(n-m)!(n-(n-m))!} = \dfrac{n!}{(n-m)!m!}$.

Пример. $C_{100}^{98} = C_{100}^2 = \dfrac{100 \cdot 99}{1 \cdot 2} = 4950$.

Свойство 2. $C_n^m + C_n^{m+1} = C_{n+1}^{m+1}$.

Доказательство.

$$C_n^m + C_n^{m+1} = \frac{n!}{m!(n-m)!} + \frac{n!}{(m+1)!(n-m-1)!} =$$

$$= \frac{n!}{m!(n-m-1)!} \cdot \left(\frac{1}{n-m} + \frac{1}{m+1} \right) = \frac{n!}{m!(n-m)!} \cdot \frac{m+1+n-m}{(n-m)(m+1)} =$$

$$\frac{(n+1)!}{(m+1)!(n-m)!} = C_{n+1}^{m+1}.$$

Свойство 3. $C_n^0 + C_n^1 + C_n^2 + \ldots + C_n^n = 2^n$.

Доказательство (методом математической индукции).

1. Если множество состоит из одного элемента, то оно содержит два подмножества: пустое множество $\varnothing$ и само себя. Имеем $C_1^0 + C_1^1 = 1 + 1 = 2 = 2^1$ – верно.

2. Предположим, что множество, состоящее из k элементов, содержит 2^k подмножеств, и докажем, что множество $A = \{a_1, a_2, \ldots, a_k, a_{k+1}\}$, состоящее из k + 1 элементов, содержит 2^{k+1} подмножеств.

Любое подмножество множества A получается так: берется какое-либо подмножество, например, $A_1 = \{a_1\}$ и к нему присоединяется элемент a_{k+1}. В результате число всех подмножеств удвоится. Получим $2^k \cdot 2 = 2^{k+1}$ подмножеств множества A. По аксиоме математической индукции утверждение теоремы верно при любом $n \in N$.

Треугольник Паскаля

Числа C_n^m (число всех подмножеств множества из n элементов) расположим в таблицу.

0-я строка	C_0^0								
1-я строка	C_1^0	C_1^1							
2-я строка	C_2^0	C_2^1	C_2^2						
3-я строка	C_3^0	C_3^1	C_3^2	C_3^3					
4-я строка	C_4^0	C_4^1	C_4^2	C_4^3	C_4^4				
5-я строка	C_5^0	C_5^1	C_5^2	C_5^3	C_5^4	C_5^5			
6-я строка	C_6^0	C_6^1	C_6^2	C_6^3	C_6^4	C_6^5	C_6^6		
7-я строка	C_7^0	C_7^1	C_7^2	C_7^3	C_7^4	C_7^5	C_7^6	C_7^7	
8-я строка	C_8^0	C_8^1	C_8^2	C_8^3	C_8^4	C_8^5	C_8^6	C_8^7	C_8^8

. . . .

Если числа C_n^m записать в явном виде, то таблица примет вид:

0-я строка	1								
1-я строка	1	1							
2-я строка	1	2	1						
3-я строка	1	3	3	1					
4-я строка	1	4	6	4	1				
5-я строка	1	5	10	10	5	1			
6-я строка	1	6	15	20	15	6	1		
7-я строка	1	7	21	35	35	21	7	1	
8-я строка	1	8	28	56	70	56	28	8	1

. . . .

Эта таблица называется треугольником Паскаля по имени французского ученого Паскаля (1623–1662).

Некоторые свойства треугольника Паскаля

1. Числа каждой строки треугольника Паскаля, равноудаленные от концов, равны между собой. Выполняется первое свойство сочетаний $C_n^m = C_n^{n-m}$.

Например, в 6-й строке равны: первое и последнее числа (1); второе от начала и второе от конца (6); третье от начала и третье от конца (15). В 7-й строке равны средние числа (35).

2. Обратим внимание на обведенные числа в таблице, где выполняется второе свойство сочетаний

$$C_n^m + C_n^{m+1} = C_{n+1}^{m+1}.$$

Например, $C_5^3 = C_4^2 + C_4^3$, $C_8^7 = C_7^6 + C_7^7$.

3. Обозначим через S_n сумму всех чисел треугольника Паскаля, стоящих в *n*-й строке.

$$S_0 = 1 = 2^0$$

$$S_1 = 1 + 1 = 2^1$$

$$S_2 = 1 + 2 + 1 = 4 = 2^2$$

$S_3 = 1+3+3+1 = 8 = 2^3$

. . . .

$S_8 = 1+8+28+56+70+56+28+8+1 = 256 = 2^8$.

Выполняется третье свойство сочетаний

$S_n = C_n^0 + C_n^1 + C_n^2 + \ldots + C_n^n = 2^n$.

Задание 1.

1. Сколько пятизначных чисел можно образовать из цифр 0, 1, 2, 5, 6?

2. Известно, что через три точки, не лежащие на одной прямой, можно провести плоскость и притом только одну. Сколько различных плоскостей можно провести через: четыре точки? 7 точек? 10 точек? n точек, если никакие три точки не лежат на одной прямой и никакие четыре точки не лежат на одной плоскости?

3. Сколькими способами можно выбрать три книги из пяти книг, стоящих на полке?

4. Из колоды, содержащей 52 карты, вынули 10 карт. Во скольких случаях среди этих карт окажется хотя бы один туз? Во скольких случаях ровно один туз? Во скольких случаях не менее двух тузов? Ровно два туза?

Задание 2.

1. Дано множество, состоящее из 10 различных элементов. Сколько подмножеств имеет это множество?

2. Напишите девятую и десятую строки треугольника Паскаля.

3. Проверьте равенства:

а) $C_{10}^5 + C_{10}^6 = C_{11}^6$; б) $C_{20}^5 + C_{20}^6 = C_{21}^6$; в) $C_{100}^{97} = C_{100}^3$;

г) $C_6^0 + C_6^1 + C_6^2 + C_6^3 + C_6^4 + C_6^5 + C_6^6 = 2^6$.

4. Решите уравнения:

а) $A_x^2 = C_x^3$; б) $A_x^3 = 20C_{x-2}^2$; в) $A_{x-1}^2 - C_x^1 = 79$;

г) $3C_{x+1}^2 - 2A_x^2 = x,\ x \in N$.

5. Из урны, содержащей 5 белых и 10 черных шаров, извлекаются одновременно 7 шаров.

а) Сколькими способами это можно сделать?

б) Сколькими способами можно выбрать 3 белых и 4 черных шара?

6. В полуфинальном турнире участвуют восемь команд. В финал попадают только три команды. Сколько существует различных вариантов выхода команд в финал?

7. В финальном турнире участвуют 8 команд. Разыгрываются три медали: золотая, серебряная и бронзовая. Сколько существует различных вариантов распределения медалей?

8. Сколько трехзначных чисел можно написать с помощью цифр 1, 2, 3, 4, 5? Каждая цифра используется один раз.

9. В шахматном турнире приняли участие 15 шахматистов, каждый из которых сыграл только одну партию с каждым из остальных игроков. Сколько всего сыграно партий?

10. Сколько участников было в шахматном турнире, если известно, что каждый из них сыграл только одну партию с каждым из остальных и всего было сыграно 105 партий?

11. Сколькими способами группу из 15 студентов можно разделить на две группы так, чтобы в одной группе было 4 студента, а в другой 11?

12. Сколькими способами можно выбрать четырех человек на четыре различные должности из девяти кандидатов на эти должности?

13. В группе 35 человек. Они обменялись друг с другом фотокарточками. Сколько всего было роздано фотокарточек?

14. В хирургическом отделении работает 40 врачей. Сколькими способами можно образовать бригаду в составе:

а) хирурга и ассистента;

б) хирурга и четырех ассистентов?

Занятие 76.
БИНОМ НЬЮТОНА

С треугольником Паскаля связана задача о возведении бинома (двучлена) $a + b$ в степень n, $n \in N$.

Рассмотрим разложения бинома:

0. $(a+b)^0 = 1$
1. $(a+b)^1 = 1 \cdot a + 1 \cdot b$
2. $(a+b)^2 = 1 \cdot a^2 + 2 \cdot ab + 1 \cdot b^2$
3. $(a+b)^3 = 1 \cdot a^3 + 3 \cdot a^2 b + 3ab^2 + 1 \cdot b^3$
4. $(a+b)^4 = 1 \cdot a^4 + 4 \cdot a^3 b + 6 \cdot a^2 b^2 + 4 \cdot ab^3 + 1 \cdot b^4$.

Для получения последнего равенства используем свойства степеней $(a+b)^4 = (a+b)^3 (a+b)$.

В этих формулах результат записан в виде суммы убывающих степеней a и возрастающих степеней b.

Составим таблицу из коэффициентов.

0-я степень	1				
1-я степень	1	1			
2-я степень	1	2	1		
3-я степень	1	3	3	1	
4-я степень	1	4	6	4	1

Мы видим, что эта таблица является началом треугольника Паскаля.

Теорема. При любом натуральном n верно равенство
$(a+b)^n = C_n^0 a^n + C_n^1 a^{n-1} b + C_n^2 a^{n-2} b^2 + \ldots + C_n^{n-1} ab^{n-1} + C_n^n b^n$

или короче $(a+b)^n = \sum_{i=0}^{n} C_n^i a^{n-i} b^i$.

Доказательство (методом математической индукции).

1. При $n = 1$ $(a+b)^1 = C_1^0 a + C_1^1 b$ – верно.
2. Предположим, что формула верна при $n = k$, т.е.

$(a+b)^k = C_k^0 a^k + C_k^1 a^{k-1} b + C_k^2 a^{k-2} b^2 + \ldots + C_k^{k-1} ab^{k-1} + C_k^k b^k$ (1).

Докажем, что формула верна при $n = k + 1$.

Умножим обе части равенства (1) на $a + b$. Имеем

$$(a+b)^{k+1} = C_k^0 a^{k+1} + C_k^1 a^k b + C_k^2 a^{k-1} b^2 + \ldots +$$
$$+ C_k^m a^{k-m+1} b^m + C_k^{m+1} a^{k-m} b^{m+1} + \ldots +$$
$$+ C_k^k ab^k + C_k^0 a^k b + C_k^1 a^{k-1} b^2 + C_k^2 a^{k-2} b^3 + \ldots +$$
$$+ C_k^m a^{k-m} b^{m+1} + C_k^{m+1} a^{k-m-1} b^{m+2} + \ldots + C_k^{k-1} ab^k + C_k^k b^{k+1} =$$
$$= C_k^0 a^{k+1} + \left(C_k^0 + C_k^1\right) a^k b + \ldots + \left(C_k^{m-1} + C_k^m\right) a^{k-m+1} b^m +$$
$$+ \left(C_k^m + C_k^{m+1}\right) a^{k-m} b^{m+1} + \ldots + \left(C_k^{k-1} + C_k^k\right) ab^k + C_k^k b^{k+1}.$$

Так как $C_k^0 = C_{k+1}^0 = C_k^k = C_{k+1}^{k+1} = 1$, $C_k^{m-1} + C_k^m = C_{k+1}^m$, $C_k^m + C_k^{m+1} = C_{k+1}^{m+1}$, имеем: $(a+b)^{k+1} =$

$$= C_{k+1}^0 a^{k+1} + C_{k+1}^1 a^k b + \ldots + C_{k+1}^m a^{k-m} b^{m+1} + \ldots + C_{k+1}^{k+1} b^{k+1}.$$

Итак, формула верна при $n = 1$, и из предположения, что она верна при $n = k$, доказали, что она верна при $n = k + 1$, следовательно, формула верна при любом $n \in N$.

Формула $(a+b)^n = \sum_{i=0}^{n} C_n^i a^{n-i} b^i$ называется **формулой бинома Ньютона** по имени английского физика и математика Исаака Ньютона (1643–1727).

Пример. Напишите разложение бинома $(1+x)^7$.

Решение. Выбираем седьмую строку треугольника Паскаля. Имеем:

$$(1+x)^7 = 1 + 7x + 21x^2 + 35x^3 + 35x^4 + 21x^5 + 7x^6 + x^7.$$

Свойства бинома Ньютона

Из разложения

$$(a+b)^n = C_n^0 a^n + C_n^1 a^{n-1} b + C_n^2 a^{n-2} b^2 + \ldots + C_n^{n-1} ab^{n-1} + C_n^n b^n$$

следует:

1. Число всех членов разложения на единицу больше показателя степени бинома.

2. Показатели степени первого слагаемого a убывают от n до 0, а второго слагаемого b возрастают от 0 до n.

3. Сумма показателей обоих слагаемых в каждом члене разложения равна показателю степени бинома.

4. Сумма биномиальных коэффициентов

$C_n^0 + C_n^1 + C_n^2 + \ldots + C_n^{n-1} + C_n^n = 2^n$.

5. Биномиальные коэффициенты, равноудаленные от начала и конца разложения, равны между собой:

$C_n^0 = C_n^n;\ C_n^1 = C_n^{n-1};\ C_n^2 = C_n^{n-2};\ \ldots;\ C_n^k = C_n^{n-k}$.

6. Сумма биномиальных коэффициентов, стоящих на четных местах, равна сумме коэффициентов, стоящих на нечетных местах.

Пусть $a = 1$, $b = -1$, тогда

$0 = C_n^0 - C_n^1 + C_n^2 - C_n^3 + \ldots + (-1)^n C_n^n \Rightarrow$

$C_n^0 + C_n^2 + C_n^4 + \ldots = C_n^1 + C_n^3 + C_n^5 + \ldots$.

7. Член разложения $C_n^k a^{n-k} b^k$ есть $k + 1$ член разложения бинома. Он обозначается T_{k+1}. Формула $T_{k+1} = C_n^k a^{n-k} b^k$ называется формулой общего члена разложения бинома Ньютона.

В разложении $(a-b)^n = \sum_{i=0}^{n} (-1)^i C_n^i a^{n-i} b^i$ формула общего члена имеет вид: $T_{k+1} = (-1)^k C_n^k a^{n-k} b^k$.

Задание.

1. Напишите разложения биномов:

а) $(x+2)^6$; б) $\left(a^2 + \frac{1}{a^4}\right)^5$; в) $\left(x^2 - \frac{1}{x^2}\right)^4$; г) $\left(\sqrt{6} - \sqrt{3}\right)^5$.

2. Найдите средний член разложения $\left(\sqrt{a} + \sqrt[3]{a}\right)^{12}$.

3. Найдите два средних члена разложения $\left(\sqrt{a} - \sqrt[3]{a}\right)^{13}$.

4. Найдите член, содержащий x^4 в разложении $\left(\sqrt{x} + \sqrt[3]{x}\right)^9$.

5. Найдите член, содержащий x^3 в разложении бинома $\left(\sqrt{x}+\frac{1}{\sqrt[3]{x}}\right)^{16}$.

6. Найдите член разложения бинома $\left(\frac{1}{\sqrt{x}}+\sqrt{x}\right)^{12}$, не содержащий x.

7. Найдите член разложения бинома $\left(\sqrt[3]{x}-\frac{1}{\sqrt{x}}\right)^{15}$, не содержащий x.

8. Найдите член разложения бинома $\left(x+\frac{1}{x}\right)^{8}$, не содержащий x.

9. Найдите член разложения бинома $\left(\sqrt[3]{x^{-2}}+x\right)^{7}$, содержащий x во второй степени.

Занятие 77.

ПРЕДЕЛ ФУНКЦИИ

Понятие предела

Любой интервал, содержащий точку $a \in R$, называется окрестностью этой точки.

Назовем δ-окрестностью точки a ($a \in R$) интервал $]a-\delta; a+\delta[$ длины 2δ с центром в точке a, т.е. содержащий все значения $x \in R$, удовлетворяющие неравенству $|x-a| < \delta$.

Пусть числовая функция определена в некоторой окрестности точки a, за исключением, быть может, самой точки a.

Число A называется пределом функции f в точке a (или при x, стремящемся к a), если для любого $\varepsilon > 0$ существует число $\delta > 0$ такое, что для всех x, удовлетворяющих условию $0 < |x - a| < \delta$, выполняется неравенство $|f(x) - A| < \varepsilon$.

В этом случае пишут $\lim\limits_{x \to a} f(x) = A$ или $f(x) \to A$ при $x \to a$.

Пример 1. Пользуясь определением предела функции, доказать, что $\lim\limits_{x \to 1} \dfrac{x^2 - 1}{x - 1} = 2$.

Решение. Пусть задано произвольное число $\varepsilon > 0$. Найдем число $\delta > 0$ такое, что для всех x, удовлетворяющих неравенству $0 < |x - 1| < \delta$, соответствующие значения функции будут удовлетворять неравенству $\left| \dfrac{x^2 - 1}{x - 1} - 2 \right| < \varepsilon$. Имеем $\left| \dfrac{x^2 - 1}{x - 1} - 2 \right| = |x + 1 - 2| = |x - 1| < \varepsilon$. Следовательно, если выберем $\delta = \varepsilon$, то из неравенства $0 < |x - 1| < \delta$ будет следовать $\left| \dfrac{x^2 - 1}{x - 1} - 2 \right| < \varepsilon$.

Односторонние пределы

Пусть a – действительное число.

Число A_1 называется пределом слева функции $f(x)$ в точке a, если $\forall \varepsilon > 0$ $\exists \delta > 0$ такое, что $\forall x \in \left] a - \delta; a \right[$ выполняется неравенство $|f(x) - A_1| < \varepsilon$.

В этом случае пишут $\lim\limits_{x \to a - 0} f(x) = A_1$.

Число A_2 называется пределом справа функции $f(x)$ в точке a, если $\forall \varepsilon > 0 \ \exists \delta > 0$ такое, что $\forall x \in]a; a+\delta[$ выполняется неравенство $|f(x) - A_2| < \varepsilon$.

В этом случае пишут $\lim\limits_{x \to a+0} f(x) = A_2$.

При $a = 0$ принята краткая запись $x \to -0$ ($x \to +0$) вместо $x \to 0-0$ ($x \to 0+0$).

Числа A_1 и A_2 называются односторонними пределами.

Функция $f(x)$ имеет предел в точке $a \in R$ тогда и только тогда, когда в этой точке она имеет односторонние пределы и эти пределы равны.

Пример 2. Рассмотрим функцию $y = \begin{cases} -1, & \text{если} \quad x < 0, \\ x, & \text{если} \quad x \geq 0. \end{cases}$

Эта функция не имеет предела в точке $x = 0$. Если $x \to +0$, то $y \to 0$. Значит $\lim\limits_{x \to +0} f(x) = 0$. Если $x < 0$, то $y = -1$, и поэтому $\lim\limits_{x \to -0} f(x) = -1$.

Бесконечные пределы в конечной точке

Функция $f(x)$, определенная в некоторой окрестности точки $a \in R$, кроме, быть может, самой точки a, имеет в этой точке бесконечный предел, если
$\forall \varepsilon > 0 \ \exists \delta > 0 \colon \forall x \in R \colon 0 < |x - a| < \delta \Rightarrow |f(x)| > \varepsilon$.

В этом случае пишут $\lim\limits_{x \to a} f(x) = \infty$, и функция $f(x)$ называется бесконечно большой при $x \to a$, а прямая $x = a$ – вертикальной асимптотой.

Множество $U_\varepsilon(\infty) =]-\infty; -\varepsilon[\bigcup]\varepsilon; +\infty[$ называется ε-окрестностью бесконечности.

Пример 3. Рассмотрим функцию $f(x) = \frac{1}{x}$.

Эта функция определена при $x \neq 0$. Если $x \to 0$, то $|f(x)|$ неограниченно возрастает: $\lim\limits_{x \to 0} f(x) = \infty$.

Если $\forall \varepsilon > 0 \ \exists \delta > 0 \colon \forall x \in R \colon 0 < |x - a| < \delta \Rightarrow f(x) > \varepsilon$, то говорят, что функция $f(x)$ имеет в точке a предел, равный $+\infty$, и пишут $\lim\limits_{x \to a} f(x) = +\infty$.

Множество $U_\varepsilon(+\infty) = \left]\varepsilon; +\infty\right[$ называется ε – окрестностью символа $+\infty$.

Пример 4. Рассмотрим функцию $f(x) = \frac{1}{(x-1)^2}$. Она определена при $x \neq 1$. Если $x \to 1$, то $\lim\limits_{x \to 1} f(x) = +\infty$.

Если $\forall \varepsilon > 0 \ \exists \delta > 0 \colon \forall x \in R \colon 0 < |x - a| < \delta \Rightarrow f(x) < -\varepsilon$, то говорят, что функция $f(x)$ имеет в точке a предел, равный $-\infty$, и пишут $\lim\limits_{x \to a} f(x) = -\infty$.

Множество $U_\varepsilon(-\infty) = \left]-\infty; -\varepsilon\right[$ называется ε – окрестностью символа - ∞.

Пример **5**. Рассмотрим функцию $f(x) = \lg(x-2)^2$. Покажем, что $\lim\limits_{x \to 2} f(x) = -\infty$. Зададим $\varepsilon > 0$. Будем искать $\delta > 0$ такое, чтобы при $|x-2| < \delta \Rightarrow \lg(x-2)^2 < -\varepsilon$. Имеем $\lg(x-2)^2 < -\varepsilon \Rightarrow (x-2)^2 < 10^{-\varepsilon} \Rightarrow |x-2| < 10^{-\frac{\varepsilon}{2}}$. Таким образом, если взять $\delta = 10^{-\frac{\varepsilon}{2}}$, то при $0 < |x-2| < \delta \Rightarrow$ $\lg(x-2)^2 < -\varepsilon$.

Предел в бесконечности

Число A называется пределом функции $f(x)$ при $x \to +\infty$, и пишут $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = A$, если $\forall \varepsilon > 0 \;\; \exists \delta > 0\colon \forall x \in R\colon x > \delta \Rightarrow |f(x) - A| < \varepsilon$.

Число A называется пределом функции $f(x)$ при $x \to -\infty$, и пишут $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = A$, если $\forall \varepsilon > 0 \;\; \exists \delta > 0\colon \forall x \in R\colon x < -\delta \Rightarrow |f(x) - A| < \varepsilon$.

Число A называется пределом функции $f(x)$ при $x \to \infty$, и пишут $\lim\limits_{x \to \infty} f(x) = A$, если $\forall \varepsilon > 0 \;\; \exists \delta > 0 : \forall x \in R : |x| > \delta \Rightarrow |f(x) - A| < \varepsilon$.

***Пример* 6**. Рассмотрим функцию $f(x) = \dfrac{x-1}{x}$. Покажем, что $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = 1$.

Решение. Зададим произвольное число $\varepsilon > 0$ и найдем $\delta > 0$ такое, что при $x > \delta$ будет выполняться неравенство $\left|\dfrac{x-1}{x} - 1\right| < \varepsilon$. Имеем $\left|\dfrac{x-1}{x} - 1\right| = \left|1 - \dfrac{1}{x} - 1\right| = \left|-\dfrac{1}{x}\right| = \left|\dfrac{1}{x}\right| < \varepsilon$. Если выбрать $\delta = \dfrac{1}{\varepsilon}$, то при $x > \delta$ будет следовать, что $\left|\dfrac{1}{x}\right| < \varepsilon$, и поэтому $\left|\dfrac{x-1}{x} - 1\right| < \varepsilon$.

Свойства пределов функций

1. Если $\exists \delta > 0\colon \forall x \in R\colon 0 < |x - a| < \delta \Rightarrow g(x) \le f(x) \le h(x)$ и если $\lim\limits_{x \to a} g(x) = \lim\limits_{x \to a} h(x) = A$, то существует $\lim\limits_{x \to a} f(x) = A$.

2. Если функции $f(x)$ и $g(x)$ имеют конечные пределы в точке a, причем $\lim\limits_{x\to a} f(x) = A$, $\lim\limits_{x\to a} g(x) = B$, то

$$\lim_{x\to a}\big(f(x)+g(x)\big) = A+B,$$

$$\lim_{x\to a}\big(f(x)g(x)\big) = AB,$$

$$\lim_{x\to a}\left(\frac{f(x)}{g(x)}\right) = \frac{A}{B},$$

при условии, что $B \neq 0$ и $g(x) \neq 0$ при $x \in \left]a-\delta; a+\delta\right[$.

Бесконечно малые и бесконечно большие функции

Функция $\alpha(x)$ называется бесконечно малой при $x \to a$, если $\lim\limits_{x\to a} \alpha(x) = 0$.

Свойства бесконечно малых функций

1. Сумма (разность) двух бесконечно малых функций при $x \to a$ есть бесконечно малая функция при $x \to a$.

2. Произведение бесконечно малой функции при $x \to a$ на ограниченную в некоторой окрестности точки a функцию есть бесконечно малая функция при $x \to a$.

Из определения предела функции следует, что число A является пределом функции $f(x)$ в точке a тогда и только тогда, когда эта функция представима в виде $f(x) = A + \alpha(x)$, где $\alpha(x)$ – бесконечно малая функция при $x \to a$.

Напомним, что функция $f(x)$ называется бесконечно большой при $x \to a$, если $\lim\limits_{x\to a} f(x) = \infty$.

Пример 7. Найдите $\lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{3x^2-4x+5}{(2x+1)^2}$.

Решение. Разделив числитель и знаменатель дроби на x^2, получим $\dfrac{3x^2-4x+5}{(2x+1)^2} = \dfrac{3-\frac{4}{x}+\frac{5}{x^2}}{4+\frac{4}{x}+\frac{1}{x^2}}$. Так как $\dfrac{1}{x} \to 0$

и $\frac{1}{x^2} \to 0$ при $x \to \infty$, то, следовательно, предел искомой функции при $x \to \infty$ равен $\frac{3}{4}$.

Задание. Покажите (задачи 1-4), что функция $f(x)$ является бесконечно большой при $x \to a$, если:

1. $f(x) = \frac{1}{x-1}$, $a = 1$.
2. $f(x) = \frac{1}{(x+1)^2}$, $a = -1$.
3. $f(x) = \frac{x+2}{x+1}$, $a = -1$.
4. $f(x) = \frac{x-1}{2x-3}$, $a = \frac{3}{2}$.

Пусть $f(x) = \frac{3}{x-1}$. Покажите (задачи 5-6), что:

5. $\lim\limits_{x \to 1-0} f(x) = -\infty$.
6. $\lim\limits_{x \to 1+0} f(x) = +\infty$.
7. Пусть $f(x) = \frac{3}{(x+2)^2}$. Покажите, что $\lim\limits_{x \to -2} f(x) = +\infty$.
8. Пусть $f(x) = \frac{2x+3}{x-1}$. Покажите, что $\lim\limits_{x \to \infty} f(x) = 2$.
9. Пусть $f(x) = \frac{3x+1}{1-x}$. Покажите, что $\lim\limits_{x \to \infty} f(x) = -3$.

Найдите (задачи 10-13) $\lim\limits_{x \to \infty} f(x)$, если:

10. $f(x) = \frac{2x-1}{x-1}$.
11. $f(x) = \frac{1-4x}{3x+1}$.
12. $f(x) = \frac{x^2-1}{x^2+1}$.
13. $f(x) = \frac{1-x^2}{3x^2+1}$.
14. Пусть $\exists \delta > 0 \colon \forall x \in R \colon |x-a| < \delta \Rightarrow f(x) \le g(x)$ и пусть $\lim\limits_{x \to a} f(x) = A$, $\lim\limits_{x \to a} g(x) = B$. Докажите, что $A \le B$.

Занятие 78.
НЕПРЕРЫВНОСТЬ ФУНКЦИИ

Понятие непрерывности функции

Функция $f(x)$ называется непрерывной в точке a, если выполняются следующие условия:

а) функция $f(x)$ определена в некоторой окрестности точки a;

б) существует $\lim\limits_{x\to a} f(x)$;

в) $\lim\limits_{x\to a} f(x) = f(a)$.

Функция $f: X \to R$ называется непрерывной на множестве $X_1 \subseteq X$, если она непрерывна в каждой точке множества X_1.

Понятие непрерывности тесно связано с понятием приращения функции $y = f(x)$. Назовем разность $x - a$ приращением аргумента и обозначим Δx, а разность $f(x) - f(a)$ назовем приращением функции $y = f(x)$ и обозначим Δy. Таким образом, $\Delta x = x - a$; $\Delta y = f(x) - f(a) = f(a + \Delta x) - f(a)$. При этих обозначениях равенство $\lim\limits_{x\to a} f(x) = f(a)$ примет вид $\lim\limits_{\Delta x\to 0} \Delta y = 0$.

Непрерывность функции в точке означает, что бесконечно малому приращению аргумента соответствует бесконечно малое приращение функции.

Пример 1. Покажите, что функция $f(x) = x^2$ непрерывна в точке $x = 1$.

Решение. Заданная функция определена в любой окрестности точки 1. Имеем $\lim\limits_{x\to 1} f(x) = 1$, $f(1) = 1$. Таким образом, $\lim\limits_{x\to 1} f(x) = f(1) = 1$, и, следовательно, функция непрерывна в точке $x = 1$.

По аналогии с понятием предела слева (справа) вводится понятие непрерывности слева (справа). Если функция $f(x)$ определена на полуинтервале $]a-\delta; a]$ и если $\lim\limits_{x\to a-0} f(x) = f(a)$, то эту функцию называют непрерывной слева в точке a. Аналогично, если функция $f(x)$ определена на полуинтервале $[a; a+\delta[$ и $\lim\limits_{x\to a+0} f(x) = f(a)$, то эту функцию называют непрерывной справа в точке a.

Например, функция $f(x) = [x]$ (целая часть от x) непрерывна справа в точке $x = 1$, но не является непрерывной слева в этой точке.

Функция непрерывна в точке a тогда и только тогда, когда она непрерывна как слева, так и справа в этой точке.

Если функция $f(x)$ либо не определена в точке a, либо определена, но не является непрерывной в этой точке, то точку a называют точкой разрыва функции $f(x)$. Так, в рассмотренном выше примере $y = [x]$ точка $x = 1$ является точкой разрыва функции.

Свойства функций, непрерывных в точке

1. Если функции $f(x)$ и $g(x)$ непрерывны в точке a, то функции $f(x) + g(x)$, $f(x) \cdot g(x)$, $\dfrac{f(x)}{g(x)}$ $(g(x) \neq 0)$ непрерывны в точке a.

2. Если функция $f(y)$ непрерывна в точке y_0, а функция $y=\varphi(x)$ непрерывна в точке x_0, причем $y_0 = \varphi(x_0)$, то в некоторой окрестности точки x_0 определена сложная функция $f(\varphi(x))$, и эта функция непрерывна в точке x_0.

Пример 2. Покажите, что функция $f(x) = \dfrac{1}{x^2}$ непрерывна в точке $x = 1$.

Решение. $\lim\limits_{x\to 1} f(x) = 1$, $f(1) = 1$. Таким образом, предел функции в точке 1 равен значению функции в этой точке, т.е. функция непрерывна в точке 1.

Некоторые замечательные пределы

Первый замечательный предел

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{x} = 1.$$

Второй замечательный предел

$$\lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{1}{x}\right)^x = e \text{ или } \lim_{y\to 0}(1+y)^{\frac{1}{y}} = e.$$

Пример 3. Найдите $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{x^2+4}{x^2+1}\right)^{x^2}$.

Решение. Так как $\left(\dfrac{x^2+4}{x^2+1}\right)^{x^2} = \dfrac{\left(1+\dfrac{4}{x^2}\right)^{x^2}}{\left(1+\dfrac{1}{x^2}\right)^{x^2}}$

и $\left(1+\dfrac{4}{x^2}\right)^{x^2} = \left[\left(1+\dfrac{1}{x^2/4}\right)^{x^2/4}\right]^4$,

то $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{x^2+4}{x^2+1}\right)^{x^2} = \lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{\left(1+\dfrac{4}{x^2}\right)^{x^2}}{\left(1+\dfrac{1}{x^2}\right)^{x^2}} = \dfrac{e^4}{e} = e^3$.

Вычисление пределов функций

Раскрытие неопределенностей

Вычисление предела функции часто сводится к нахождению предела частного $\frac{f(x)}{g(x)}$, где $f(x)$ и $g(x)$ – бесконечно малые функции при $x \to a$, т.е. $\lim\limits_{x\to a} f(x) = 0$ и $\lim\limits_{x\to a} g(x) = 0$. В этом случае говорят, что вычисление предела $\lim\limits_{x\to a} \frac{f(x)}{g(x)}$ сводится к раскрытию неопределенности вида $\frac{0}{0}$.

Например, если $f(x) = (x-a)^k f_1(x)$, $g(x) = (x-a)^k g_1(x)$, где $f_1(x)$ и $g_1(x)$ – непрерывные функции в точке a и $g_1(a) \neq 0$, то $\lim\limits_{x\to a} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim\limits_{x\to a} \frac{f_1(x)}{g_1(x)} = \frac{f_1(a)}{g_1(a)}$.

В случае, когда $f(x)$ и $g(x)$ – бесконечно большие функции при $x \to a$, т.е. $\lim\limits_{x\to a} f(x) = \infty$, $\lim\limits_{x\to a} g(x) = \infty$, то говорят, что $\lim\limits_{x\to a} \frac{f(x)}{g(x)}$ представляет собой неопределенность вида $\frac{\infty}{\infty}$.

Например, если $f(x)$ и $g(x)$ многочлены второй степени, т.е. $f(x) = ax^2 + bx + c$, $g(x) = a_1x^2 + b_1x + c_1$, $a \neq 0$, $a_1 \neq 0$, то $\lim\limits_{x\to\infty} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim\limits_{x\to\infty} \frac{a + \frac{b}{x} + \frac{c}{x^2}}{a_1 + \frac{b_1}{x} + \frac{c_1}{x^2}} = \frac{a}{a_1}$.

Замена переменной при вычислении предела

Если $\lim\limits_{x\to a}\varphi(x)=b$, $\lim\limits_{y\to b}f(y)=c$, то $\lim\limits_{x\to a}f(\varphi(x))=\lim\limits_{y\to b}f(y)=c$.

Пример 4. Вычислить $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\arcsin x}{x}$.

Решение. Пусть $y=\arcsin x$, тогда $x=\sin y$ и поэтому $\dfrac{\arcsin x}{x}=\dfrac{y}{\sin y}$. При этом, если $x\to 0$, то $y\to 0$. Следовательно, $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\arcsin x}{x}=\lim\limits_{y\to 0}\dfrac{y}{\sin y}=1$.

Задания. Покажите (задачи 1-4), что функция $f(x)$ непрерывна в точке a, если:

1. $f(x)=x^2$, $a=1$.
2. $f(x)=\sqrt{x}$, $a=0$.
3. $f(x)=\dfrac{1}{x^2}$, $a=1$.
4. $f(x)=\dfrac{x^2+1}{x^2-1}$, $a=0$.

Выясните (задачи 5-8), является ли функция $f(x)$ непрерывной слева или непрерывной справа в точке a, если:

5. $f(x)=\begin{cases}|x| & \text{при } x<1,\\ 2 & \text{при } x\ge 1,\end{cases}$ $a=1$.
6. $f(x)=\begin{cases}1-x^2 & \text{при } x<-1,\\ (x+1)^2 & \text{при } x\ge -1,\end{cases}$ $a=-1$.
7. $f(x)=\left\{\dfrac{x}{2}\right\}$, $a=2$.
8. $f(x)=\left[\dfrac{x}{2}\right]$, $a=2$.

Покажите (задачи 9-12), что функция $f(x)$ непрерывна на *R*, если:

9. $f(x)=x^3$.
10. $f(x)=|x-1|$.
11. $f(x)=e^{2x}$.
12. $f(x)=\sin(x-\alpha)$, где α – постоянная.

Найдите (задачи 13-16) $\lim\limits_{x\to a} f(x)$, если:

13. $f(x)=\dfrac{2x^2-x-1}{x^2-3x+2}$, $a=1.$

14. $f(x)=\dfrac{\sqrt{x+7}-\sqrt{3}\sqrt{x+1}}{x^3-8}$, $a=2.$

15. $f(x)=\dfrac{\operatorname{tg}x-\sin x}{x^3}$, $a=0.$

16. $f(x)=\sqrt{x^2+2x+3}-\sqrt{x^2-x+1}$, $a=\infty$.

17. Докажите, что $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\operatorname{arctg} x}{x}=1$.

18. Найдите $\lim\limits_{x\to 0}(1+\alpha x)^{\frac{1}{\beta x}}$.

Вычислите пределы (19 – 32):

19. $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{x^3-1}{x-1}$.

20. $\lim\limits_{x\to -1}\dfrac{2x^2+x-1}{x^2-6x-7}$.

21. $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{x^5-1}{x^4-1}$.

22. $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{x^3-3x^2+x+1}{x^2-1}$.

23. $\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{\sqrt{x-1}-1}{x-2}$.

24. $\lim\limits_{x\to -3}\dfrac{x+3}{\sqrt{x+4}-1}$.

25. $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{3x^2+4}{x^2+1}$.

26. $\lim\limits_{x\to\infty} x\left(\sqrt{x^2+1}-x\right)$.

27. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1-\sqrt{1-x}}{1-\sqrt[3]{1+x}}$.

28. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin x}{\sin 6x-\sin 4x}$.

29. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin 5x-\sin x}{\sin 3x-\sin x}$.

30. $\lim\limits_{x\to 0}\left(\dfrac{1+x}{1-x}\right)^{\frac{1}{x}}$.

31. $\lim\limits_{x\to 0}\left(\dfrac{1-2x}{1+3x}\right)^{\frac{1}{x}}$.

32. $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{2x^2+3}{2x^2-1}\right)^{x^2}$.

Занятие 79.
ПРОИЗВОДНАЯ

Пусть функция $f(x)$ определена на некотором интервале $]a;\, b[$. Рассмотрим отношение $\dfrac{f(x_0+\Delta x)-f(x_0)}{\Delta x}$, где x_0 – некоторая точка данного интервала, в которой функция $f(x)$ непрерывна. Пусть Δx меняется так, что $x_0+\Delta x$ также принадлежит интервалу $]a;\, b[$. Если существует конечный предел $\lim\limits_{\Delta x\to 0}\dfrac{f(x_0+\Delta x)-f(x_0)}{\Delta x}$, то он называется производной функции $f(x)$ в точке x_0 и его обозначают $f'(x_0)$, т.е. $f'(x_0)=\lim\limits_{\Delta x\to 0}\dfrac{f(x_0+\Delta x)-f(x_0)}{\Delta x}$.

Если функция $f(x)$ имеет производную в некоторой точке x_0, то ее называют дифференцируемой в этой точке. Если $f(x)$ имеет производную в каждой точке интервала $]a;\, b[$, то ее называют дифференцируемой на этом интервале.

Таблица производных элементарных функций

$(C)'=0$, $\quad C$ – const;

$(kx+b)'=k$; $\quad k$ – const, b – const;

$\left(x^n\right)'=nx^{n-1}$, $x\in R$ при $n\in N$; $x>0$ при $n\in R$;

$\left(e^x\right)'=e^x$, $x\in R$;

$\left(a^x\right)'=a^x\ln a$, $a>0, a\neq 1, x\in R$;

$(\ln x)'=\dfrac{1}{x}$, $x>0$;

$$\left(\log_a x\right)' = \frac{1}{x\ln a},\ a > 0, a \neq 1, x > 0;$$

$$\left(\sin x\right)' = \cos x,\ x \in R;$$

$$\left(\cos x\right)' = -\sin x,\ x \in R;$$

$$\left(\mathrm{tg} x\right)' = \frac{1}{\cos^2 x},\ x \neq \frac{\pi}{2} + \pi n, n \in Z;$$

$$\left(\mathrm{ctg} x\right)' = -\frac{1}{\sin^2 x},\ x \neq \pi n, n \in Z;$$

$$\left(\arcsin x\right)' = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}},\ |x| < 1;$$

$$\left(\arccos x\right)' = -\frac{1}{\sqrt{1-x^2}},\ |x| < 1;$$

$$\left(\mathrm{arctg} x\right)' = \frac{1}{1+x^2},\ x \in R;$$

$$\left(\mathrm{arcctg} x\right)' = -\frac{1}{1+x^2},\ x \in R.$$

Правила дифференцирования

1. Производная суммы равна сумме производных

$$\left(f(x) + g(x)\right)' = f'(x) + g'(x).$$

Подробно это свойство может быть сформулировано следующим образом: если каждая из функций f и g имеет производную в точке x, то их сумма также имеет производную в этой точке, и справедлива указанная формула.

2. Постоянный множитель можно выносить за знак производной

$$\left(Cf(x)\right)' = Cf'(x).$$

3. Производная произведения

$$\left(f(x) \cdot g(x)\right)' = f'(x) \cdot g(x) + g'(x) \cdot f(x).$$

4. Производная частного

$$\left(\frac{f(x)}{g(x)}\right)' = \frac{f'(x)\cdot g(x) - g'(x)\cdot f(x)}{g^2(x)} \quad \left(g(x)\neq 0\right).$$

5. Производная сложной функции

$$\left(f\left(\varphi(x)\right)\right)' = f'\left(\varphi(x)\right)\varphi'(x).$$

6. Производная обратной функции

$$\left(f^{-1}(x)\right)' = \frac{1}{f'(y)} = \frac{1}{f'\left(f^{-1}(x)\right)}.$$

7. Производная корня

$$\left(\sqrt[n]{x}\right)' = \frac{1}{n}\sqrt[n]{x^{1-n}} = \frac{1}{n}x^{\frac{1-n}{n}}; \qquad \left(\sqrt[n]{x^m}\right)' = \frac{m}{n}\sqrt[n]{x^{m-n}}.$$

Пример 1. Найти производную функции $y = xe^x\sin x$.

Решение. $\left(xe^x\sin x\right)' = \left(xe^x\right)'\sin x + xe^x\left(\sin x\right)' =$

$$=\left(x'e^x + x\left(e^x\right)'\right)\sin x + xe^x\cos x = \left(e^x + xe^x\right)\sin x + xe^x\cos x.$$

Экстремумы функции

Обозначим $X = \left]a;b\right[\subseteq R$.

Точка $x_0 \in X \subseteq R$ называется точкой локального максимума (минимума) функции $f: X \to R$, если

$\exists\delta > 0: \forall x \in X: |x - x_0| < \delta \Rightarrow f(x) \le f(x_0)$ $\left(f(x) \ge f(x_0)\right)$.

Точки локального максимума и минимума функции называются точками локального экстремума или локальными экстремальными точками, а значения функции в них – локальными экстремумами функции. Если

$\exists\delta > 0: \forall x \in X: 0 < |x - x_0| < \delta \Rightarrow f(x) < f(x_0)$ $\left(f(x) > f(x_0)\right)$, то точка $x_0 \in X$ называется точкой строгого локального максимума (минимума), а значение функции в ней – строгим локальным максимумом (минимумом) функции $f : X \to R$.

Пример 1. Пусть $f(x) = \begin{cases} -x^2 + 4, \text{ если } x \in [-2;1[, \\ \quad 3, \text{ если } x \in [1;+\infty[\end{cases}$ (рис. 1).

Для этой функции $x_1 = -2$ – точка строго локального минимума; $x_2 = 0$ – точка строгого локального максимума; $x_3 = 1$ – точка локального минимума; $x > 1$ – точки экстремума, являющиеся одновременно точками и локального минимума и локального максимума, поскольку здесь функция локально постоянна.

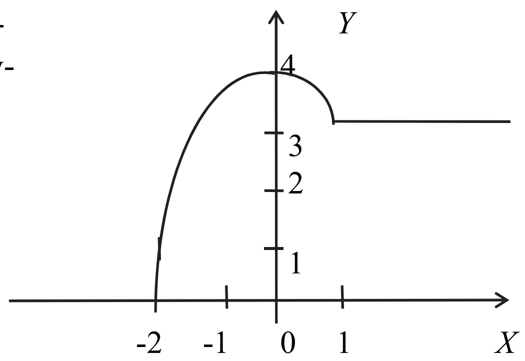


Рис. 1.

В дальнейшем будем часто опускать слово «локальный».

Необходимые условия экстремума получаются из теоремы Ферма, согласно которой точки экстремума функции $f : \;]a;b[\to R$ необходимо искать среди тех точек $x \in \;]a;b[$, в которых либо $f'(x) = 0$, либо производная этой функции в x не существует.

Отметим, что для дифференцируемой при $x = x_0$ функции f условие $f'(x_0) = 0$ не является достаточным условием наличия экстремума в точке x_0. Например, функция $f(x) = -x^3$, $x \in R$ имеет при $x = 0$ производную, равную нулю. Однако $x = 0$ не является экстремальной точкой.

Перейдем к рассмотрению достаточных условий экстремума функций.

Отметим, что если функция $f: U_\delta(x_0) \to R$ строго возрастает на промежутке $\left]x_0 - \delta; x_0\right]$ и строго убывает на промежутке $\left[x_0; x_0 + \delta\right[$, то, следовательно, точка x_0 является точкой строгого максимума функции $f(x)$.

Аналогично формулируется достаточное условие строгого минимума.

В дальнейшем нам понадобится понятие смены знака функции.

Пусть функция $g(x)$ определена в проколотой окрестности $\dot{U}_\delta(x_0)$ точки x_0. Если $\forall x \in \left]x_0 - \delta; x_0\right[\Rightarrow g(x) > 0$, а $\forall x \in \left]x_0; x_0 + \delta\right[\Rightarrow g(x) < 0$, то говорят, что функция $g(x)$ меняет знак с плюса на минус при переходе через точку x_0.

Аналогично вводится понятие смены знака с минуса на плюс при переходе через точку x_0.

Заметим, что, во-первых, если x_0 – точка строгого экстремума функции $f(x)$, то разность $f(x) - f(x_0)$ сохраняет знак в проколотой δ-окрестности точки x_0.

Во-вторых, если разность $f(x) - f(x_0)$ сохраняет знак в $\dot{U}_\delta(x_0)$, то x_0 – точка строгого экстремума функции $f(x)$.

В-третьих, если разность $f(x) - f(x_0)$ меняет знак при переходе через точку x_0, то функция $f(x)$ не имеет экстремума в точке x_0.

Перейдем к вопросу о точках экстремума дифференцируемой функции $f(x)$. Для их вычисления необходимо решить уравнение $f'(x) = 0$, все корни которого называются стационарными точками функции $f(x)$. Среди них могут быть точки экстремума.

Множеству возможных экстремальных точек принадлежат и те, в которых $f'(x)$ не существует. Так, функция

$f(x)=|x|, x\in[-2;2]$ имеет минимум в точке $x=0$, в которой она не дифференцируема.

Точки, в которых функция $f(x)$ непрерывна, а её производная либо равна нулю, либо не существует, называются критическими точками.

Отметим, что все точки экстремума функции содержатся среди её критических точек. Однако не каждая критическая точка является точкой экстремума функции.

Поэтому приведем следующее достаточное условие строгого экстремума.

Пусть $f: \,]a;b[\, \to R$ – непрерывная функция, причем $\exists f'$ в каждой точке x из некоторой δ-окрестности $U_\delta(x_0)\subset\,]a;b[$, за исключением, быть может, лишь самой точки x_0. Тогда:

1) если $f'(x)$ меняет знак с – на + при переходе через точку x_0, то x_0 – точка строгого локального минимума функции f (рис. 2);

2) если $f'(x)$ меняет знак с + на – при переходе через точку x_0, то x_0 – точка строгого локального максимума функции f (рис. 3).

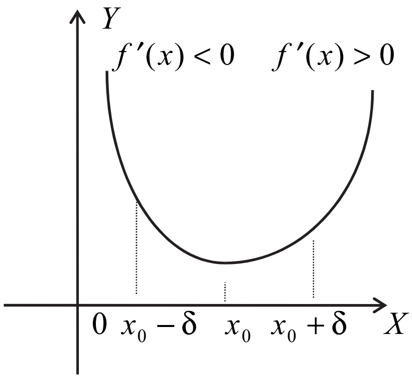


Рис. 2

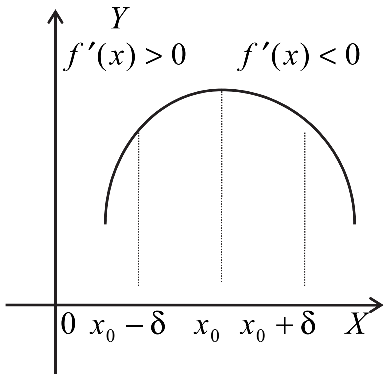


Рис. 3

Пример 2. Найдите точки экстремума функции
$y = \frac{x^5}{5} - x^4 - 5, x \in R$.

Решение. $y' = x^4 - 4x^3 = x^3(x-4)$. Стационарными точками заданной функции являются точки $x_1 = 0$ и $x_2 = 4$. При переходе через точку 0 y' меняет знак с + на –, так как $y'(-1) = 5 > 0$, а $y'(1) = -3 < 0$. Значит, точка $x_1 = 0$ является точкой строгого максимума. При переходе через точку 4 производная y' меняет знак с – на + , значит, точка $x_2 = 4$ является точкой строгого минимума.

Ответ: 0; 4.

Пример 3. Найдите точки экстремума функции $y = x^3$.

Решение. Имеем $y' = 3x^2$, $x = 0$ – стационарная точка, $y'(-1) = 3 > 0$, $y'(1) = 3 > 0$. Таким образом, при переходе через точку 0 производная $f'(x)$ не меняет знака. Поскольку разность $x^3 - 0^3$ меняет знак при переходе через точку 0, то точка 0 не является экстремальной точкой.

Ответ: функция не имеет экстремумов.

Наибольшее и наименьшее значения функции

Пусть задано множество *Y* из *R*. Элемент $y_0 \in R$ называется наибольшим, или максимальным (наименьшим, или минимальным), элементом множества *Y*, если $y \le y_0$ (соответственно $y \ge y_0$) $\forall\ y \in Y$.

Пусть функция $f(x)$ непрерывна на отрезке $[a; b] = X$. Тогда она всегда достигает своего наибольшего и наименьшего значений на отрезке *X*, т.е. существует точка $x_M \in [a; b]$, в которой функция принимает максимальное значение *M*, и есть точка $x_m \in [a; b]$, где она принимает минимальное значение m. При этом соответственно записывают: $\max\limits_X f(x) = M$, $\min\limits_X f(x) = m$.

Пример 4. Найдите наибольшее и наименьшее значения функции $y = \dfrac{x^4}{2} - 2x + \dfrac{3}{2}$ на отрезке $[-1; 2]$.

Решение. 1. Найдем экстремальные точки заданной функции. Имеем $y' = 2x^3 - 2 = 0$. Отсюда $x = 1$. 2. Найдем значение функции в этой точке: $y(1) = 0$. 3. Найдем значения функции на концах отрезка $[-1; 2]$. Имеем $y(-1) = 4$, $y(2) = \dfrac{11}{2}$. Значит, наименьшее значение функция принимает в точке $x = 1$ и оно равно 0, а наибольшее значение – в точке $x = 2$ и оно равно $\dfrac{11}{2}$.

Ответ: $\max\limits_{[-1;2]} f(x) = \dfrac{11}{2}; \min\limits_{[-1;2]} f(x) = 0.$

Уравнение касательной

Уравнение касательной к графику функции $y = f(x)$ в точке $(x_0; f(x_0))$ записывается в виде $y - y_0 = f'(x_0)(x - x_0)$, где $y_0 = f(x_0)$, $f'(x_0) = f'(x)\big|_{x=x_0}$.

Пример 5. Составьте уравнение касательной к графику функции $y = \dfrac{3x^2 + 2}{x - 1}$ в точке его пересечения с осью ординат.

Решение. Уравнение касательной записывается в виде $y - y_0 = f'(x_0)(x - x_0)$, где $(x_0; y_0)$ – точка касания. Абсцисса x_0 точки пересечения графика заданной функции с осью OY равна 0, а ордината – $y_0 = f(0) = -2$. Таким образом, получаем точку касания $(0, -2)$.

Найдем производную заданной функции в точке x_0. Имеем $f'(x) =$

$$= \left(\frac{3x^2+2}{x-1}\right)' = \frac{\left(3x^2+2\right)'(x-1) - \left(3x^2+2\right)(x-1)'}{(x-1)^2} =$$

$$= \frac{3\cdot 2x(x-1) - \left(3x^2+2\right)\cdot 1}{(x-1)^2} = \frac{3x^2-6x-2}{(x-1)^2}.$$

В точке $x_0 = 0$ получаем $f'(0) = \dfrac{3\cdot 0^2 - 6\cdot 0 - 2}{(0-1)^2} = -2$.

Искомое уравнение касательной имеет вид $y-(-2) = -2(x-0)$, или $y = -2x-2$.

Ответ: $y = -2x-2$.

Задания. Найдите значения производной функции при заданном значении аргумента (1–18):

1. $f(x) = 4x^3+6x+3,\ x_0 = 1.$
2. $f(x) = \frac{1}{3}x^3 - \frac{1}{2}x^2 - 2x + 3,\ x_0 = 3.$
3. $f(x) = x^2 - 4\sqrt{x},\ x_0 = 4.$
4. $f(x) = \dfrac{x}{1+x^2},\ x_0 = 0.$
5. $f(x) = \dfrac{\sqrt{x}+1}{\sqrt{x}},\ x_0 = 1.$
6. $f(x) = 3\sin x + 2,\ x_0 = \dfrac{\pi}{3}.$
7. $f(x) = x\sin x,\ x_0 = \dfrac{\pi}{2}.$
8. $f(x) = 2\,\mathrm{tg}x - \sin x,\ x_0 = 0.$
9. $f(x) = 2x + \cos 2x,\ x_0 = \dfrac{\pi}{12}.$
10. $f(x) = 2^x,\ x_0 = \log_2\left(\dfrac{1}{\ln 2}\right).$
11. $f(x) = 3x^2 - \ln x,\ x_0 = 1.$
12. $f(x) = 3^x\,\dfrac{2}{\ln 3} - 2x^3 - 3,\ x_0 = 2.$
13. $f(x) = -\dfrac{2}{3}\sin x + \dfrac{x^3}{\pi^2} - 3,\ x_0 = \dfrac{\pi}{3}.$

14. $f(x) = \operatorname{ctg} x + \dfrac{12x^3}{\pi^2}, \ x_0 = \dfrac{\pi}{6}.$

15. $f(x) = \left(3x^2 + 5x - 7\right)\operatorname{tg} x, \ x_0 = 0.$

16. $f(x) = \left(x^2 - 3x + 1\right)e^x, \ x_0 = 0.$

17. $f(x) = \sqrt{\dfrac{1 + \sin^2 x}{6}}, \ x_0 = \dfrac{\pi}{6}.$

18. $f(x) = \sqrt{2\left(1 - \cos^2 x\right)}, \ x_0 = \dfrac{\pi}{4}.$

Найдите экстремумы функций (19 – 22):

19. $f(x) = 7x^2 - 56x + 8.$

20. $f(x) = \dfrac{x}{1 + x^2}.$

21. $f(x) = x \ln x.$

22. $f(x) = x + \dfrac{4}{x^2}.$

Найдите наибольшее и наименьшее значения функций на заданных отрезках или на естественной области определения (23 – 26):

23. $f(x) = x + \dfrac{1}{x}, \ x \in \left[-2; \dfrac{1}{2}\right].$

24. $f(x) = x^3 + 3x, \ x \in [0; 2].$

25. $f(x) = x^4 - 2x^2 + 3, \ x \in [-4; 3].$

26. $f(x) = \sqrt{(4 + x)^3} + 2\sqrt{(1 - x)^3}.$

Напишите уравнение касательной к графику функции $y = f(x)$ в точке с абсциссой x_0 (27 – 32):

27. $f(x) = \sqrt[3]{x}, \ x_0 = -8.$

28. $f(x) = \sqrt[5]{x^4}, \ x_0 = -1.$

29. $f(x) = 5 \cdot \sqrt[5]{x - 1} - 3 \cdot \sqrt[3]{x - 1}, \ x_0 = 0.$

30. $f(x) = 6 \cdot \sqrt[6]{(x - 1)^4} - 4 \cdot \sqrt[4]{(x - 1)^2}, \ x_0 = 0.$

31. $f(x) = \arcsin x, \ x_0 = \dfrac{1}{2}.$

32. $f(x) = \ln \dfrac{1 + x}{1 - x}, \ x_0 = 0.$

Занятие 80.
ИНТЕГРАЛ

Неопределенный интеграл

Функция $F(x)$ называется первообразной для функции $f(x)$ на некотором промежутке, если для всех x из этого промежутка $F'(x) = f(x)$. Ясно, что если $F(x)$ – первообразная для функции $f(x)$, то и $F(x)+C$, где C – произвольная постоянная, также будет первообразной для этой же функции $f(x)$. При этом записывают $\int f(x)dx = F(x) + C$. Символ $\int$ называется знаком интеграла, а $f(x)$ – подынтегральной функцией. Операцию нахождения первообразной для данной функции называют неопределенным интегрированием, а запись $\int f(x)dx$ – неопределенным интегралом от функции $f(x)$ на заданном промежутке.

Таблица неопределенных интегралов

$$\int x^n dx = \frac{x^{n+1}}{n+1} + C \ \ (n \neq -1).$$

$$\int \frac{dx}{x} = \ln|x| + C \ \ (x \neq 0).$$

$$\int e^x dx = e^x + C.$$

$$\int a^x dx = \frac{a^x}{\ln a} + C \ \ (a > 0,\ a \neq 1).$$

$$\int \sin x dx = -\cos x + C.$$

$$\int \cos x dx = \sin x + C.$$

$$\int \frac{dx}{\sin^2 x} = -\operatorname{ctg} x + C.$$

$$\int \frac{dx}{\cos^2 x} = \operatorname{tg} x + C.$$

$$\int \frac{dx}{1+x^2} = \begin{cases} \operatorname{arctg} x + C, \\ -\operatorname{arcctg} x + \widetilde{C}. \end{cases}$$

$$\int \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} = \begin{cases} \arcsin x + C, \\ -\arccos x + \widetilde{C}. \end{cases}$$

Основные свойства неопределенного интеграла

1. Метод введения нового аргумента. Если $\int f(x)dx = F(x) + C$, то $\int f(u)du = F(u) + C$, где $u = \varphi(x)$.

2. Метод разложения. Если $f(x) = f_1(x) + f_2(x)$, то $\int f(x)dx = \ = \int f_1(x)dx + \int f_2(x)dx$.

3. Метод замены переменной. Если функция $f(x)$ непрерывна, то, полагая $x = \varphi(t)$, где функция $\varphi(t)$ непрерывна вместе со своей производной $\varphi'(t)$, получим $\int f(x)dx = \int f(\varphi(t))\ \varphi'(t)\ dt$.

4. Метод интегрирования по частям. Если $f(x)$ и $g(x)$ – некоторые дифференцируемые функции от x, то $\int f(x)g'(x)dx = f(x)g(x) - \int g(x)f'(x)dx$.

Пример 1. Найдите интеграл $\int \left(e^x + \sin x\right)dx$.

Решение.

$$\int \left(e^x + \sin x\right)dx = \int e^x dx + \int \sin x dx = e^x - \cos x + C.$$

Ответ: $e^x - \cos x + C$.

Пример 2. Найдите интеграл $\int xe^{-x}dx$.

Решение. Применим метод интегрирования по частям. Пусть $f(x)=x$, $g'(x)=e^{-x}$, тогда $f'(x)=1$, $g(x)=-e^{-x}$. Имеем $\int xe^{-x}dx=-xe^{-x}-\int 1\cdot\left(-e^{-x}\right)dx=$

$$=-xe^{-x}+\int e^{-x}dx=-xe^{-x}-e^{-x}+C=-(x+1)e^{-x}+C.$$

Ответ: $-(x+1)e^{-x}+C$.

Определенный интеграл

1. Формула Ньютона – Лейбница. Пусть функция $f(x)$ определена и непрерывна на отрезке $[a;b]$ и $F(x)$ – её первообразная, т.е. $F'(x)=f(x)$. Определенным интегралом от функции $f(x)$ на отрезке $[a;b]$ называется разность $F(b)-F(a)$, для которой вводится обозначение $\int\limits_a^b f(x)dx$. Таким образом,

$$\int\limits_a^b f(x)dx=F(b)-F(a). \qquad (1)$$

Числа a и b называются соответственно нижним и верхним пределами интегрирования. Соотношение (1) называют формулой Ньютона – Лейбница и записывают также в виде $\int\limits_a^b f(x)dx=F(x)\Big|_a^b$.

Определенный интеграл $\int\limits_a^b f(x)dx$ при $f(x)\geq 0$ геометрически представляет собой площадь фигуры, ограниченной кривой $y=f(x)$, осью OX и двумя прямыми, заданными уравнениями $x=a$ и $x=b$ (рис. 1).

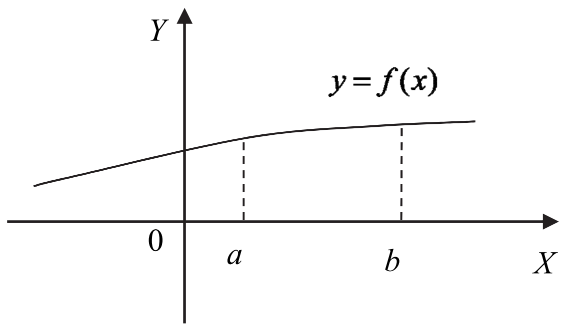


Рис. 1.

2. Интеграл и первообразная. Пусть $f:[a;b]\to R$ – непрерывная функция. Рассмотрим на отрезке $[a;b]$ функцию $F(x)=\int\limits_a^x f(t)dt$, называемую интегралом с переменным верхним пределом. Имеет место формула $F'(x)=f(x)$.

3. Формула интегрирования по частям:

$$\int\limits_a^b f(x)g'(x)dx = f(x)g(x)\Big|_a^b - \int\limits_a^b g(x)f'(x)dx.$$

4. Замена переменной. Если $g:[\alpha;\beta]\to[a;b]$ – строго возрастающая функция, непрерывная вместе со своей производной $g'(x)$ на отрезке $[\alpha;\beta]$, где $a=g(\alpha)$, $b=g(\beta)$, то для любой непрерывной на отрезке $[a;b]$ функции $f(x)$ функция $f(g(t))g'(t)$ определена и непрерывна на $[\alpha;\beta]$ и

$$\int\limits_a^b f(x)dx = \int\limits_\alpha^\beta f\big(g(t)\big)g'(t)dt. \qquad (1)$$

Пример 3. Вычислите интеграл $\int\limits_0^1 \frac{dx}{1+x^2}$.

Решение. $\int\limits_0^1 \frac{dx}{1+x^2} = \operatorname{arctg} x\Big|_0^1 = \operatorname{arctg}1 - \operatorname{arctg}0 = \frac{\pi}{4}$.

Ответ: $\pi/4$.

Пример 4. Вычислите интеграл $\int\limits_0^{\pi} x\sin x dx$.

Решение. Применим формулу интегрирования по частям. Пусть $f(x)=x$, $g'(x)=\sin x$. Тогда $g(x)=-\cos x$, $f'(x)=1$.

Имеем $\int\limits_0^{\pi} x\sin x\, dx = -x\cos x\Big|_0^{\pi} - \int\limits_0^{\pi}(-\cos x)\ dx =$

$= -\pi\cos\pi - 0 + \int\limits_0^{\pi}\cos x\ dx = \pi + \sin x\Big|_0^{\pi} = = \pi + \sin\pi$

$-\sin 0 = \pi$.

Ответ: π.

Пример 5. Вычислитье интеграл $\int\limits_0^{\ln 2}\sqrt{e^x-1}\,dx$.

Решение. Сделаем замену переменной $x=\ln\left(t^2+1\right)$.

Тогда $\sqrt{e^x-1} = \sqrt{e^{\ln\left(t^2+1\right)}-1} = \ = \sqrt{t^2+1-1} = t$.

$\left(\ln\left(t^2+1\right)\right)' = \frac{2t}{t^2+1}$. Если $x=0$, то $t=\sqrt{e^x-1}\big|_{x=0}=0$. Если $x=\ln 2$, то $t=\sqrt{e^x-1}\big|_{x=\ln 2}=\sqrt{e^{\ln 2}-1}=\sqrt{2-1}=1$.

Имеем $\int\limits_0^{\ln 2}\sqrt{e^x-1}\,dx=\int\limits_0^1 t\,\frac{2tdt}{t^2+1}=2\int\limits_0^1\frac{t^2dt}{t^2+1}=$

$2\int\limits_0^1\frac{t^2+1-1}{t^2+1}dt=2\int\limits_0^1 dt-2\int\limits_0^1\frac{dt}{t^2+1}==2t\Big|_0^1-2\operatorname{arctg}\,t\Big|_0^1$

$=2(1-0)-2(\operatorname{arctg}1-\operatorname{arctg}0)=2-2\cdot\frac{\pi}{4}==2-\frac{\pi}{2}.$

Ответ: $2-\frac{\pi}{2}$.

Задания. Найдите интеграл (1 – 7):

1. $\int\left(5x^4+2x^3\right)dx.$

2. $\int\left(-\frac{3}{x}-\frac{2}{x^3}\right)dx.$

3. $\int\left(4\cdot\sqrt[3]{x}-2\cdot\sqrt{x}\right)dx.$

4. $\int\left(5\sin x+2\cos x\right)dx.$

5. $\int\left(1+e^x-4\cos x\right)dx.$

6. $\int\left(\frac{3}{1+x^2}-\frac{4}{\sqrt{1-x^2}}\right)dx.$

7. $\int\left(5\cos x-\frac{4}{\sin^2 x}\right)dx.$

Для функции $f(x)$ найдите первообразную, график которой проходит через точку $M(x_0;y_0)$ (8 – 11):

8. $f(x)=4x-1,\ M(-1;3)$. 9. $f(x)=\frac{1}{\sqrt{x+3}},\ M(-2;-1)$.

10. $f(x)=\cos 3x,\ M(0;0)$. 11. $f(x)=\frac{1}{(x+1)^2},\ M(-2;2)$.

Вычислите интеграл (12 – 19):

12. $\int\limits_0^3 x^2dx.$ 13. $\int\limits_1^2\frac{dx}{x^3}$. 14. $\int\limits_4^9\frac{dx}{\sqrt{x}}$. 15. $\int\limits_0^{\ln 3}e^xdx$.

16. $\int\limits_0^{\pi}\sin x\,dx$.

17. $\int\limits_0^2\left(3x^2-4x+5\right)dx$.

18. $\int\limits_0^{\pi/4} \mathrm{tg}^2\, x\, dx$.

19. $\int\limits_{-0,5}^{-0,25} \left(\frac{1}{x} + \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} \right) dx$.

Найдите площадь криволинейной трапеции, ограниченной прямыми $x = a$, $x = b$, осью OX и графиком функции $y = f(x)$ (20 – 26):

20. $a = 4, b = 9, f(x) = \sqrt{x}$.

21. $a = 0, b = 2, f(x) = x^3 + 1$.

22. $a = \frac{\pi}{6}, b = 0, f(x) = \cos x$.

23. $a = 0, b = \frac{1}{2}, f(x) = \frac{6}{\sqrt{1-x^2}}$.

24. $a = -2, b = 0, f(x) = \frac{1}{x-1}$.

25. $a = \frac{\pi}{4}, b = \frac{3\pi}{4}, f(x) = \frac{1}{\sin^2 x}$.

26. $a = -1, b = 0, f(x) = \frac{4x-3}{1+x^2}$.

Вычислите интеграл (27 – 34):

27. $\int\limits_0^1 xe^x dx$.

28. $\int\limits_1^2 \ln x\, dx$.

29. $\int\limits_0^{\pi} x \cos x\, dx$.

30. $\int\limits_0^{\pi} e^x \sin x\, dx$.

31. $\int\limits_0^{\pi} x \cos 2x\, dx$.

32. $\int\limits_0^{\pi} x^2 \sin 2x\, dx$.

33. $\int\limits_0^2 \ln(x+1) dx$.

34. $\int\limits_0^{\pi} x \cos^2 x\, dx$.

ОТВЕТЫ К ПОУРОЧНЫМ ЗАДАНИЯМ

Занятие 1

Задание 1 (по горизонта́ли). 21; –45; 375; –160; –1485; 198; –36; 1215; 6.

Задание 2. а) 6672; б) 299; в) 1508; г) –858; д) 17; е) 3312; ж) 8.

Занятие 2

Задание 1 (по горизонта́ли). –64; 360; 20; –112; 24; 9; –80; 12.

Задание 2. а) $3x^7$; б) $6a^4$; в) $-12x^5$; г) $-288x^4$; д) $-36x^5$; е) $64x^6$.

Задание 3. а) $3x^4-2x^2-x+6$; б) $2x^3-2x^2+2x$; в) $-3x-7$; г) $3a^2+2$; д) x^2-4x+4; е) x^2-9.

Занятие 1 (дополнительное)

Задание 1. а) $(a+4b)(a-4b)$; б) $x^2(1+ax)(1-ax)$;

в) $4b^2(2b+ax)(2b-ax)$; г) $\left(a^2-b^3\right)^2$;

д) $\left(1+a^2b\right)\left(1-a^2b\right)$; е) $(5x-m)\left(25m^2+5mx+m^2\right)$;

ж) $p^4(1+p)(1-p)\left(1+p^2\right)\left(1-p^2+p^4\right)\left(1+p^2+p^4\right)$;

з) $(2a-4b)\left(4a^2+8ab+16b^2\right)$;

и) $(x+y)(x-y)\left(x^2-xy+y^2\right)\left(x^2+xy+y^2\right)$;

к) $\frac{1}{8}(2-x)\left(4+2x+x^2\right)$;

л) $(1+a)(1-a)\left(1-a+a^2\right)\left(1+a+a^2\right)$;

м) $\left(x^2+1\right)\left(4x^2+1\right)$; н) $(x+1)(x-1)\left(x^2-ab\right)$;

о) $\left(x^4+x^2+1\right)\left(x^4+x^2+1\right)$; п) $(x+a)(x-a)\left(x^2+ax+a^2\right)$;

р) $x(x+1)\left(x^2+x+7\right)$.

Задание 2. а) $4a^2$; б) $x^2+4x+49$; в) $4ac-5c^2$; г) $12x$;

д) a^2+b^2+6x; е) $2a\left(a^2+18\right)$; ж) $5\left(a+\sqrt{10}\right)\left(a-\sqrt{10}\right)$;

з) $2(x+y)\left(3a^2+(x+y)^2\right)$.

Задание 3. а) 600; б) 2436; в) 5; г) 1.

Задание 4. а) $25a^2-\frac{1}{49}b^2$; б) $\frac{1}{9}y^2-\frac{4}{3}xy+4x^2$;

в) $125x^3-150x^2y+180xy^2-216y^3$;

г) $\frac{1}{z^3}+\frac{8}{y^3}{}^{2}$; д) $\left(\frac{a}{b}\right)^3+\left(\frac{b}{a}\right)^3$; е) $\frac{1}{8z^3}-\frac{64}{y^3}$;

ж) $\left(\frac{1}{5yz}\right)^3-\left(\frac{10}{x}\right)^3$; з) $\frac{1}{y^3}+\frac{3}{y^2}+\frac{3}{y^2}+1$.

Задание 5. а) $(4a+11p)(4a-11p)$; б) $(x-2y)^3$; в) $(7a+2b)^3$;

г) $(3x-2a)(9x^2+6ax+4a^2)$; д) $\left(\frac{1}{9}t+5y^2\right)\left(\frac{1}{9}t-5y^2\right)$;

е) $\left(\frac{3f}{5a}+1\right)\left(\frac{9f^2}{25a^2}-\frac{3f}{5a}+1\right)$.

Задание 8. а) x^2-6x+9; б) $-3(25x^2-10x+1)$; в) $16-x^2$; г) x^4-10x^2+25; д) $16x^2-8x+1$; е) $x^3-12x+16$.

Задание 9. а) 12900; б) 276.

Задание 10. а) $(x+6)^2+4$; б) $(x+8)^2+6$; в) $(x+7)^2-1$;

г) $(x-4)^2-17$; д) $(x+22)^2-384$; е) $(x-10)^2-47$.

Занятие 3

Задание 1 (по вертика́ли). $x(x-2)$; $-2x(x-3)$; $-3x^2(x-1)$; $2(x-4)$; $(x-2)(x+1)$; $(x-4)(2x-1)$; $(x+3)(x-1)$; $-(x+2)(x+1)(x-1)$; $(x+3)(x-3)$; $-(x+4)(x-4)$; $(x+5)(x-5)$; $(2x+1)(2x-1)$; $2(x+1)(x-1)$; $x^2(x-1)$; $3x(x+1)(x-1)$; $(5x+4)(5x-4)$.

Задание 2. $2^3\cdot3^3$; $2\cdot3^4$; $2^4\cdot3^2$; $3^2\cdot5^2$; $3\cdot37$; 3^4; 2^8.

Задание 3 (по горизонта́ли). $(x-3)^2$; $-(x-2)^2$; $2(x-3)^2$; $-2(x+4)^2$; $x(x+1)^2$; $-(x+5)^2$.

Задание 4 (по вертика́ли). $-8;1$; $0;2$; $0;-7$; $0;2$; $-3;0;1$; $3;4$; $-2;0;1$; $2;3$.

Задание 5 (по горизонта́ли). $\{-1\}$; $\left\{-1;-\frac{1}{2}\right\}$; $\{-1;0\}$; $\{-4;0;4\}$; $\{\pm 5\}$; $\{-3;0;3\}$.

Занятие 4

Задание 1. а) $\frac{2}{3}$; $\frac{1}{3}$; $\frac{3}{5}$; $\frac{49}{32}$; $\frac{9}{8}$; $\frac{2}{9}$. б) $\frac{2}{3}$; $\frac{1}{4}$; $\frac{3x}{5}$; $\frac{1}{3}$.

Задание 2. а) $\frac{x+1}{3}$; $\frac{5(x-1)}{7x^2}$; $\frac{x-4}{3}$, $x \neq -4$; -6, $x \neq 2$.

б) x^2, $x \neq 0$; $\frac{x+2}{5}$, $x \neq 2$; -1, $x \neq 2$; $\frac{x+3}{x-2}$.

Занятие 5

Задание 1. а) $\frac{1}{24}$; б) $16\frac{1}{2}$; в) $\frac{3}{4}$; г) $\frac{3}{14}$.

Задание 2. а) 18; б) $1\frac{2}{25}$; в) 15.

Задание 3. а) $\frac{5}{7}$; б) $18\frac{2}{3}$; в) $4\frac{4}{5}$; г) $\frac{1}{4}$; д) $-\frac{30}{43}$; е) $11\frac{2}{5}$; ж) $14\frac{2}{5}$; з) $15\frac{2}{11}$; и) $14\frac{2}{3}$.

Задание 4. а) $\frac{x+2}{3}$; б) $\frac{3x}{5}$; в) $\frac{1}{3}$; г) $\frac{9x-7}{14x}$; д) $-\frac{1}{3}$; е) $\frac{18x}{5}$; ж) $\frac{x+2}{x-2}$; з) 1, $x \neq -3$; и) $\frac{3}{x-1}$.

Задание 5. а) $-2\frac{8}{11}$; б) $\frac{4}{25}$; в) $-\frac{1}{4}$; г) $-1\frac{6}{7}$; д) $3\frac{4}{5}$; е) $\frac{1}{5}$.

Задание 6. а) 1; б) -2.

Занятие 6

Задание 1. а) $1\frac{5}{12}$; б) $-\frac{11}{20}$; в) $\frac{7}{18}$; г) $-\frac{1}{6}$; д) $7\frac{7}{8}$; е) $2\frac{1}{4}$; ж) $1\frac{1}{16}$; з) $-2\frac{15}{16}$.

Задание 2. а) $-\dfrac{a^2-4a-2}{a^2}$; б) $-\dfrac{3x^2-11x+3}{6x}$; в) $\dfrac{x^2+1}{x}$; г) $\dfrac{1}{3}$; д) $\dfrac{3x+5}{4}$; е) $\dfrac{a^2+5a-1}{a}$.

Задание 3. а) $1\dfrac{3}{14}$; б) $\dfrac{1}{77}$; в) $\dfrac{5}{48}$; г) $-\dfrac{7}{30}$; д) $-\dfrac{1}{18}$; е) $\dfrac{99}{110}$.

Задание 4. а) $\dfrac{1}{x+2}$, $x\neq 2$; б) $\dfrac{3}{a-6}$, $a\neq -6$; в) $\dfrac{x^3+3}{x(x-3)}$; г) $\left[\dfrac{6}{(x+3)(x-3)}\right]^2$; д) $\dfrac{x^2-2x+3}{(x-2)^2}$.

Задание 5. а) -1; б) функция не имеет нулей.

Задание 6. а) $25\dfrac{10}{11}$; б) $-1\dfrac{4}{5}$; в) 9; г) $-\dfrac{43}{50}$.

Задание 7. а) $\dfrac{311}{420}$; б) $39\dfrac{31}{36}$; в) $126\dfrac{28}{45}$; г) $198\dfrac{41}{120}$; д) $449\dfrac{7}{39}$; е) $118\dfrac{437}{770}$; ё) $15\dfrac{5}{12}$; ж) $4\dfrac{9}{46}$; з) $20\dfrac{23}{24}$; и) $88\dfrac{89}{336}$; к) $34\dfrac{220}{221}$; л) $17\dfrac{97}{180}$; м) $20\dfrac{131}{165}$; н) $6\dfrac{17}{48}$; о) $26\dfrac{157}{420}$; п) $83\dfrac{31}{120}$; р) 60; с) $16\dfrac{13}{72}$.

Задание 8. а) $\dfrac{5}{12}$; б) $\dfrac{4}{9}$; в) $\dfrac{5}{12}$; г) $1\dfrac{2}{3}$; д) $8\dfrac{1}{3}$; е) $2\dfrac{1}{3}$; ё) $1\dfrac{1}{3}$; ж) $\dfrac{1}{8}$; з) $6\dfrac{1}{2}$; и) $1\dfrac{25}{42}$; к) $2\dfrac{21}{37}$; л) $3\dfrac{27}{29}$; м) $4\dfrac{7}{9}$; н) $30\dfrac{5}{19}$; о) $\dfrac{1}{8}$; р) $2\dfrac{2}{3}$; с) $31\dfrac{1}{2}$; т) $1\dfrac{2}{3}$; у) $9\dfrac{5}{16}$; ф) $22\dfrac{115}{128}$; х) $2\dfrac{32}{41}$; ц) 139; ч) $3\dfrac{2}{7}$; ш) $4\dfrac{5}{28}$; щ) 8.

Задание 9. а) 1; б) 3; в) 2; г) $\frac{1}{2}$; д) $415\frac{3}{7}$; е) 6; ж) 18; з) $\frac{1}{50}$; и) $4\frac{17}{40}$.

Задание 10. Верно.

Задание 11. $\frac{43}{8}$; $\frac{18}{51}$; $\frac{43}{8}$; $\frac{30}{29}$; $\frac{17}{4}$; $\frac{6}{1}$; $\frac{9}{5}$; $\frac{13}{13}$; $\frac{1}{15}$; $\frac{12}{7}$.

Задание 12. Нельзя.

Задание 13. $\frac{25}{3}$; $\frac{3}{25}$. $\frac{29}{2}$; $\frac{2}{29}$. $\frac{29}{9}$; $\frac{9}{29}$. $\frac{49}{17}$; $\frac{17}{49}$. $\frac{61}{3}$; $\frac{3}{61}$. $\frac{68}{9}$; $\frac{9}{68}$. $\frac{55}{13}$; $\frac{13}{55}$. $\frac{111}{16}$; $\frac{16}{111}$. $\frac{67}{12}$; $\frac{12}{67}$.

Занятие 7

Задание 1. а) $2{,}13$; б) 0.045; в) 0.3; г) $0{,}7$; д) $-0{,}36$; е) $-0{,}84$.

Задание 2. а) $-0{,}5$; б) $0{,}04$; в) -200; г) $2{,}5$; д) $-0{,}2$; е) 1.

Задание 3. а) $-1{,}75$; б) $4\frac{4}{15}$; в) $-0{,}7$; г) $-1{,}25$; д) $\frac{13}{30}$; е) $2{,}8$.

Задание 4. а) $\frac{2}{5}$; $1\frac{3}{20}$; $\frac{1}{8}$; $3\frac{98}{125}$; $\frac{37}{99}$; $1\frac{1357}{4950}$; $\frac{17387}{124875}$; $2\frac{12154}{49995}$;

б) $0,(714285)$; $0,(405)$; $1,(571428)$; $3,(461538)$; $2{,}1(6)$.

Занятие 9

Задание 1. а) ±3; б) ±4; в) 0; г) ±0,5.

Задание 2. а) 0,7; б) 0,8; в) 6; г) a; д) $-a$; е) a если $a \geq 0$, $-a$ если $a \leq 0$.

Задание 3. б) $a > 0$; в) $a > 0$; г) $a < 0$; д) $a < 0$; е) $a > 0$; ж) $a > 0$.

Задание 5. а) 11; б) 5,5; в) 21; г) 2.

Занятие 10

Задание 1. а) 2 м больше, чем 15 см, в $13\frac{1}{3}$ раза; б) 1 час больше, чем 1 мин, в 60 раз; б) 36 больше, чем 0,5, в 72 раза; г) $1\frac{3}{4}$ больше, чем 1,4., в 1,25 раза.

Задание 2. а) 12; б) $3\frac{8}{9}$; в) $1\frac{2}{3}$; г) 5,75.

Занятие 11

Задание 1. а) 0,9 кг; б) 0,235 г; в) 0,0672 м; г) 0,036 см; д) 100 т; е) 2 см.

Задание 2. а) 11,2; б) 200 г; в) $51\frac{3}{7}$ м; г) 720 см.

Задание 3. а) $\frac{a}{b}\cdot 100\,\%$; б) 7500%; в) 500%; г) $2333\frac{1}{3}\,\%$; д) $33\frac{1}{3}\,\%$.

Задание 4. а) 46,7%; б) 75,00%; г) 184,615%.

Занятие 12

Задание 1. а) 0,3; б) ±44 в) 0; 42; г) 7; д) Ø; е) -1; -2,25.

Задание 2. а) $t=\frac{2S}{3}$; б) $a=\frac{2Q}{h^2}$; в) $R_1=\frac{RR_2}{R_2-R}$; $R_2=\frac{RR_1}{R_1-R}$.

Задание 3. а) ±4; б) ±25; в) 24. Задание 4. а) Ø; б) Ø; в) 1,5; г) 0; 3,5; д) 3,5; е) $[2;\,\infty)$; ж) $[5;\,\infty)$.

Занятие 13

Задание 1. а) $\left(-\infty;\,-\frac{2}{3}\right]$; б) $(-\infty;\,4)$; в) $\left(-\infty;\,4\frac{2}{3}\right)$; г) $[-20;\,\infty)$; д) $(-3;\,4)$; е) $[2;\,4]$.

Задание 3. а) ±1; б) Ø; в) 0; г) $(-2;\,-1)\cup(1;\,2)$; д) $(-3;\,-2)\cup(2;\,3)$; е) $(-3;\,-1)\cup(1;\,3)$; ж) $(-2;\,2)$; з) $(-3;\,3)$; и) $(-\infty;\,-1)\cup(1;\,\infty)$; к) $(-\infty;\,\infty)$; л) $(-2;\,0)\cup(0;\,2)$; м) $(-4;\,4)$; н) $(-\infty;\,-1{,}5)\cup(1{,}5;\,\infty)$; о) $(-2;\,-1)\cup(1;\,2)$;

п) $-2\pi, -\pi, 0, \pi, 2\pi$; р) $(-5;\ 0)\cup(0;\ 5)$.

Занятие 14

Задание 1. а) 8; б) 50 в) 0,5; г) $\frac{2}{9}$; д) 0,2; е) $\frac{5}{6}$.

Задание 2. а) 72; б) 3,5; в) 1,2; г) 140; д) 1,4; е) 2,4; ж) 2,4; з) 7; и) 0,024.

Занятие 15

Задание 1. а) 0; б) $3(x-2)\sqrt{x-2}$; в) $-\sqrt{10}$; г) $-16x\sqrt{x}$.

Задание 2. а) $\sqrt{3x^3}$; б) $\sqrt{2x}$; в) $\sqrt{5x^2}$; г) $-\sqrt{5x^2}$; д) $-\sqrt{-2x}$; е) $\sqrt{x^3-4x^2}$.

Задание 3. а) $\left(x+\sqrt{7}\right)\left(x-\sqrt{7}\right)$; б) $\left(x+\sqrt{5}\right)\left(x-\sqrt{5}\right)$; в) $\sqrt{x}\left(1-\sqrt{2}\right)$; г) $\left(x+\sqrt{3}\right)\left(x-\sqrt{3}\right)$; д) $\sqrt{x}\left(\sqrt{x}+1\right)$; е) $\left(\sqrt{x}+3\right)\left(\sqrt{x}-3\right)$, если $x>0$.

Задание 4. а) $x+\sqrt{2}$; б) $\sqrt{x}+3$; в) $\frac{1}{3}$; г) $\frac{1}{\sqrt{x}+1}$; д) $\frac{-1}{\sqrt{x}+5}$; е) $\sqrt{x}$.

Задание 5. а) $\frac{3\sqrt{x}}{2x}$; б) $\frac{2\left(\sqrt{x}+2\right)}{x-4}$; в) $\frac{x\left(\sqrt{x}-1\right)}{x-1}$; г) $\frac{(x+1)\left(\sqrt{x}+2\right)}{x-4}$; д) $\frac{(x-3)\left(3\sqrt{x}+1\right)}{9x-1}$; е) $\frac{\sqrt{x-2}+\sqrt{2x+2}}{-x-4}$.

Задание 6. а) $\frac{-1}{x\left(\sqrt{x}+\sqrt{x+1}\right)}$; б) $\frac{-1}{4\left(\sqrt{x-4}+\sqrt{x-3}\right)}$; в) $\frac{5}{\sqrt{x-1}+\sqrt{x-6}}$; г) $\frac{-4}{\sqrt{x^2-1}+\sqrt{x^2+3}}$.

Задание 7. а) $3\sqrt{15}$; б) $3\sqrt{42}$; в) $\sqrt{38}$.

Задание 8. а) $\frac{1}{9}$; б) 0,45.

Задание 9. а) $1-x,\ x\ge 0$; б) 1; в) $\frac{\sqrt{x}+1}{1-x}$; г) $\frac{3}{\sqrt{x}-6}$.

Задание 10. а) $\sqrt{2x(x-2)}$; б) $-\sqrt{2x(x-2)}$; в) $-\sqrt{2x(2-x)}$.

Занятие 16

Задание 2. а) $2\sqrt{5}$; б) $\sqrt{29}$.

Занятие 17

Задание 2. а) $(3,5)$; б) $(10,-5)$; в) $(12,0)$; г) $(5,2)$; д) $(-2{,}5,3)$; е) $(31{,}8,6{,}6)$; ж) $(2,1)$; з) $(3,4)$; и) $(3,4)$; к) $(5,-2)$; л) $(5,-3)$; м) $(125,-47)$; н) $(1,-2)$; о) $(7,5)$; п) $(5,-2)$.

Задание 3. а) $(4,3)$; б) $(2,1)$; в) $\left(\frac{1}{2},-1\frac{1}{6}\right)$; г) $(3,-2)$; д) $(0,5)$; е) $(0{,}5,-2)$; ж) $(9,2)$; з) $(-5,-6)$; и) $(3,2)$; к) $\left(-\frac{7}{10},\frac{1}{40}\right)$; л) Ø; м) $(2,5)$; н) $\left(-\frac{2}{3},0\right)$; о) $(59,369)$.

Задание 6. Да. Общее решение $(t,9-t)$, $t\in R$. Частные решения, например, $(0,9)$; $(-2,11)$.

Задание 8. а) $(4,2)$; б) $(-3,1)$; в) $(-19,-3)$; г) $(21,1)$; д) $(8,9)$; е) $(8,4)$; ж) $(36,12)$; з) $(5,-2)$; и) $(4,-3)$; к) $(5,8)$; л) $(-2,-4)$; м) $(3,2)$; н) $(-1,1)$; о) $(4,-1)$; п) $(11,6)$; р) $\left(\frac{9}{5},\frac{32}{35}\right)$; с) $\left(\frac{523}{75},\frac{76}{15}\right)$; т) $(4,4)$; у) $(4,2)$: ф) $\left(\frac{905}{208},\frac{295}{52}\right)$; х) $(3,1)$; ц) $(7,5)$; ч) $(6,8)$; ш) $(10,6)$; щ) $(5,4)$; э) $(2,1)$.

Задание 9. а) $(2,3)$; б) $\left(\frac{1}{10},\ 4\right)$; в) $(0{,}2,\ 0{,}25)$; г) $\left(\frac{1}{2},\frac{1}{3}\right)$; д) $(5,3)$; е) $(10,-3)$; ж) $(7,3)$; з) $(5,3)$; и) $(3,\ 2{,}5)$.

Занятие 3 (*дополнительное*)

Задание 1. а) $a-b$; б) $2-a$; в) $2+a$; г) $-a-1$; д) $-a^2-a-1$; е) $\frac{(b-1)(b^2+b+1)}{b^2-b+1}$.

Задание 2. а) $\frac{1+a}{1-a^2}$; $\frac{1}{1-a^2}$. б) $\frac{b(1-a^2)}{b(b-a)(1-a^2)}$; $\frac{b-a}{b(b-a)(1-a^2)}$.

в) $\frac{b^2(1-a^2)(1+a^2)}{b^2(b-a)(1-a^2)(1+a^2)}$; $\frac{b(b-a)(1+a^2)}{b^2(b-a)(1-a^2)(1+a^2)}$; $\frac{b-a}{b^2(b-a)(1-a^2)(1+a^2)}$.

г) $\frac{a+b}{(a+b)(a-b)(a^2+ab+b^2)}$; $\frac{a^2+ab+b^2}{(a+b)(a-b)(a^2+ab+b^2)}$; $\frac{(a+b)(a-b)}{(a+b)(a-b)(a^2+ab+b^2)}$.

д) $\frac{2(a-b)}{2(a+b)(a-b)(a^2-ab+b^2)}$; $\frac{2(a^2-ab+b^2)}{2(a+b)(a-b)(a^2-ab+b^2)}$;

$\frac{2(a+b)(a-b)}{2(a+b)(a-b)(a^2-ab+b^2)}$; $\frac{(a-b)(a^2-ab+b^2)}{2(a+b)(a-b)(a^2-ab+b^2)}$.

е) $\frac{b(x+1)(x^2+1)(x^2+x+1)}{(x+1)(x-1)(x^2+1)(x^2+x+1)}$; $\frac{(d+1)(x^2+1)(x^2+x+1)}{(x+1)(x-1)(x^2+1)(x^2+x+1)}$;

$\frac{k(x+1)(x^2+x+1)}{(x+1)(x-1)(x^2+1)(x^2+x+1)}$; $\frac{l(x^2+x+1)}{(x+1)(x-1)(x^2+1)(x^2+x+1)}$.

ж) $\frac{1}{(x+y+z)(x-y-z)}$; $\frac{x-y-z}{(x+y+z)(x-y-z)}$; $\frac{x+y+z}{(x+y+z)(x-y-z)}$.

Задание 3. а) $a \neq 2, b \neq 0, c \neq 0$; б) $a \neq \pm 2, b \neq 0$;

в) $a \neq 0, a \neq \sqrt[3]{4}$; г) $b \neq 0, c \neq 0, b \neq -c$; д) $a \neq -c, b \neq -d$;

е) $a \neq 0, c \neq \pm d$.

Задание 4. а) $\frac{p+5}{p+1}$; б) $\frac{4-5k}{2b+1}$; в) $\frac{2z^2-1}{(z+1)(2z+y)}$;

г) $\frac{2p}{(p+q)(p-q)}$; д) a^2; е) $\frac{x^2}{x^3+y^3}$; ж) 1; з) $\frac{x^3+y^3}{x^3-y^3}$;

и) $\frac{2pq}{p^2-q^2}$; k) $\frac{1}{m+n}$.

Задание 5. а) $\frac{x}{x-y}, x \neq 0, y \neq 0, x \neq -y$; б) $\frac{1}{x}, x \neq y$;

в) $\frac{1}{a^3}, x \neq \pm a$; г) $\frac{11a+x}{6(a-x)}, a \neq c$; д) $4xy, x+y+z \neq 0, z \neq \pm(y-x)$;

е) $\dfrac{4mn}{(m+n)^2}$, $m \neq n$; ж) $\dfrac{2xy}{x^2+y^2}$, $x \neq \pm y$; з) $\dfrac{2y^2}{x}$, $y \neq 0$;

и) 1, $y \neq 0$, $x \neq -\dfrac{z}{yz+1}$; к) 0, $x \neq y$, $x \neq z$, $y \neq z$;

л) 1, $xyz \neq 0$, $x \neq -\dfrac{yz}{y+z}$; м) $(a-b)^2$, $a \neq \pm b$.

Занятие 18

Задание 1. а) 166; 112. б) –5; –3,25.

Задание 2. а) $-\dfrac{1}{3}(x+6)^2+16$; б) $0{,}2(x-5)^2-2$;

в) $-2\left(x+1\dfrac{1}{4}\right)^2+1\dfrac{1}{8}$; г) $-0{,}5(x+0{,}2)^2+1{,}02$; д) $2\left(x-1\dfrac{1}{4}\right)^2-1\dfrac{1}{8}$;

е) $3\left(x-\dfrac{2}{3}\right)^2-2\dfrac{1}{3}$.

Задание 3. а) $(x+3)(x-3)$; б) $(x-1)(x-5)$; в) $6\left(x+1\dfrac{2}{5}\right)\left(x+\dfrac{3}{5}\right)$;

г) $\left(x+\dfrac{3}{4}\right)\left(x+\dfrac{1}{4}\right)$; д) $2\left(x+m+\dfrac{\sqrt{3}}{2}\right)\left(x+m-\dfrac{\sqrt{3}}{2}\right)$;

е) $\left(x+n+\dfrac{\sqrt{5}}{2m}\right)\left(x+n-\dfrac{\sqrt{5}}{2m}\right)$.

Занятие 19

Задание 1. а) $(3x-4)(x-1)$; б) $2\left(x-\dfrac{1}{2}\right)^2$;

в) $-7\left(x+\dfrac{8}{7}\right)(x-1)$ или $-(7x+8)(x-1)$;

г) $3\left(x+\dfrac{2}{3}\right)(x-5)$ или $(3x+2)(x-5)$;

д) $(5x+1)(x-2)$; е) $2(x+1)\left(x-\dfrac{3}{2}\right)$.

Задание 2. а) $x-2,\ x\neq-\frac{1}{5}$; б) $2x-3,\ x\neq-1$;

в) $2x-3,\ x\neq-\frac{1}{2}$; г) $x-3,\ x\neq-\frac{1}{3}$; д) $3x-4,\ x\neq1$;

е) $3x-10,\ x\neq1$.

Задание 3. а) $\frac{x}{x-3},\ x\neq-2,\ x\neq-\frac{1}{2}$; б) $\frac{2x+1}{x-3},\ x\neq2$;

в) $\frac{x}{(x-1)(x-3)},\ x\neq-3$; г) $\frac{4x-16}{4x+1},\ x\neq1$; д) $\frac{4-13x}{x-3},\ x\neq\pm\frac{1}{2}$.

Задание 4. а) $\left[-\frac{1}{3};+\infty\right)$; б) $[-4;+\infty)$; в) $(-\infty;0]$; г) $\left(-\infty;1\frac{1}{24}\right]$.

Задание 5. а) $-1\frac{1}{2}$; б) 12.

Задание 6. а) p^2-2q; б) $-p(p^2-3q)$; в) $(p^2-2q)^2-2q^2$.

Занятие 20

Задание 1. а) $[-3;2]$; б) $[-2;1]$; в) R *или* $(-\infty;+\infty)$; г) R.

Задание 2. а) $(-\infty;4)U[2;3]$; б) $(-\infty;-5)$; в) $(-2;+\infty)$; г) $(-1;+\infty)$.

Задание 3. а) $\frac{1}{2(4x^2-1)}$; б) $-\frac{1}{a+3},\ a\neq3$.

Задание 4. 1. $(0;3)$; б) $\left\{-1;\frac{1}{2};2\right\}$.

Занятие 21

Задание 1. а) $D(f)=(-\infty;1{,}5)U(1{,}5;+\infty)$**;** б) $D(f)=[3;+\infty)$;

в) $D(f)=(-\infty;+\infty)$; г) $D(f)=R$; д) $D(f)=(-\infty;0{,}5)U(0{,}5;+\infty)$;

е) $D(f)=(-\infty;+\infty)$.

Задание 2. а) $D(f)=(-\infty;4)U(4;+\infty)$; б) $D(f)=[-2;0)U(0;+\infty)$;

в) $D(f)=[0;3]$; г) $D(f)=(-\infty;2)U(2;3)U(3;+\infty)$;

д) $D(f)=(-\infty;2]U[4;+\infty)$; е) $D(f)=(-\infty;1)U(5;+\infty)$; ж) $D(f)=R$;

з) $D(f)=(-\infty;0)U(0;+\infty)$; и) $D(f)=(-\infty;0)U(0;+\infty)$;

к) $D(f)=(-\infty;1-\sqrt{3})U(1-\sqrt{3};1]U[2;1+\sqrt{3})U(1+\sqrt{3};+\infty)$;

л) $D(f)=(-\infty;4]$; м) $D(f)=(-\infty;1)U(1;+\infty)$.

***Задание 3**:* а) $[-1;2]$; б) $[-2;1]$; в) $[-1;2]$; г) $\left[-\frac{1}{2};1\right]$;
д) $[-2;1]$; е) $[-1;2]$; ж) $[-1;2]$; з) $[-2;2]$; и) $[-1;2]$; к) $[-2;2]$;
л) $[0;4]$; м) $[-\sqrt{2};\sqrt{2}]$.

Задание 4. 1. Да; 2. Нет.

Задание 5. а) $D(f)=(-\infty;-1)U(-1;+\infty)$, $1\frac{1}{3}-$ *нуль функции*;

б) $D(f)=(-\infty;-2)U(-2;+\infty)$, $-4;1-$ *нули функции*;

в) $D(f)=R$, $-3;0;1-$ *нули функции*;

г) $D(f)=(-\infty;+\infty)$, $-2;2-$ *нули функции*.

Занятие 22

Задание 1. а) $f(x)=0,\ x\in\{-\sqrt{3},\sqrt{3}\}$;
$f(x)<0,\ x\in(-\infty;-\sqrt{3})U(\sqrt{3};+\infty)$; $f(x)>0,\ x\in(-\sqrt{3};\sqrt{3})$;

б) $f(x)=0,\ x\in\{-3,\ 4\}$;
$f(x)>0,\ x\in(-\infty;-3)U(4;+\infty)$; $f(x)<0,\ x\in(-3;\ 4)$;

в) $f(x)=0,\ x\in\{-3{,}5\}$;
$f(x)>0,\ x\in(-\infty;-3{,}5)U(1;+\infty)$; $f(x)<0,\ x\in(-3{,}5;\ -1)U(-1;1)$;

г) $f(x)=0,\ x\in\left\{-\frac{-5\mp\sqrt{37}}{2}\right\}$;

$$f(x)>0,\ x\in\left(-\infty;-\frac{-5-\sqrt{37}}{2}\right)U\left(\frac{-5+\sqrt{37}}{2};+\infty\right);$$

$$f(x)<0,\ x\in\left(\frac{-5-\sqrt{37}}{2};\ \frac{-5+\sqrt{37}}{2}\right);$$

г) $f(x)=0,\ x\in\{-1\}$;
$f(x)<0,\ x\in(-\infty;-1)U(2;+\infty)$; $f(x)>0,\ x\in(-1;\ 2)$;

д) $f(x)=0,\ x\in\{-1\}$;
$f(x)<0,\ x\in(-\infty;-1)U(2;+\infty)$; $f(x)>0,\ x\in(-1;\ 2)$;

е) $f(x)=0,\ x\in\{-2\}$; $f(x)>0,\ x\in(-4;-2)$;
$f(x)<0,\ x\in(-\infty;-4)U(-2;4)U(4;+\infty)$.

Задание 2. а) Нечётная; б) Общего вида; в) Общего вида; г) Общего вида; д) Общего вида; е) Общего вида; ж) Чётная; з) Чётная; и) Общего вида; к) Чётная; л) Общего вида; м) Общего вида; н) Нечётная; о) Чётная.

Занятие 25

Задание 3. а) $(0,\ 0)$, $\left(1\frac{1}{3},\ 5\frac{1}{3}\right)$; б) $\left(-2\sqrt{3},\ 37\right)$, $\left(2\sqrt{3},\ 37\right)$;

в) $(-3,18)$, $(0{,}5,\ 0{,}5)$; г) $(-5,-23)$, $\left(\frac{1}{3},\ -1\frac{2}{3}\right)$.

Задание 4. $f(x)=0,\ x\in\left\{-1,\ \frac{3}{4}\right\}$;

$f(x)>0,\ x\in(-\infty;-1)U\left(\frac{3}{4};+\infty\right)$; $f(x)<0,\ x\in\left(-1;\ \frac{3}{4}\right)$.

Задание 6. а) $-\frac{1}{3(x+5)},\ x\neq 4$; б) $2x+16,\ x\neq\frac{1}{2}$.

Задание 7. а) Ø; б) $\left(-\sqrt{5};\sqrt{5}\right)$; в) $(-\infty;-4)U(4;+\infty)$; г) $\left(-2\sqrt{6};2\sqrt{6}\right)$; д) $(-\infty;0)U(4;+\infty)$; е) $(-0{,}5;0)$.

Задание 8. а) $D(f)=R$; б) $D(f)=(-\infty;-2)U(-2;+\infty)$; в) $D(f)=R\setminus\{11\}$; г) $D(f)=R$.

Задание 9. а) $\frac{4x-16}{4x+1},\ x\neq 1$; б) $\frac{2x+1}{x-3},\ x\neq\frac{1}{2}$; в) $\frac{x-1}{x+1},\ x\neq -2$; г) $2,\ x\neq\pm 3$.

Задание 10. 1. $-\sqrt{a}\le x\le\sqrt{a}$; 2. $-a\le x\le 0$.

Занятие 26

Задание 1. а) $D(x)=x-1$; б) $D(x)=x^4+x^3+x^2+x+1$; в) $D(x)=x^2-4x+4$;

Задание 2. а) $r=2$; б) $r=0$; в) $r=0$; г) $r=0$.

Задание 3. а) $D(x)=x^3+3x^2+7x+17,\ r=36$;

б) $D(x)=x^5-3x^4+5x^3-7x^2+12x-19,\ r=34$;

в) $D(x)=x^2+9x+25,\ r=80$; г) $D(x)=x^3+3x+7,\ r=11$;

д) $D(x)=x^4-2x^3+5x^2-19x+72,\ r=-287$.

Занятие 27

Задание 1. а) $x=1;6$; б) $x=-2$; в) $x=-1$; г) $x=-3;1;1\pm\sqrt{5}$.

Задание 2. а) $(x+1)(x-1)(x^2+1)$; б) $(x+1)(x-2)(x^2+3)$;
в) $(x+2)(x-4)$; г) $(x+2)(x+1)(x-4)$.

Задание 3. а) $f(x)=0,\ x\in\{-3,1,2\}$;
$f(x)<0,\ x\in(-\infty;3)U(1;2);\ f(x)>0,\ x\in(-3;1)U(2;+\infty)$;
б) $f(x)=0,\ x\in\{-1,\ 3\};\ f(x)<0,\ x\in(-1;\ 3)$;
$f(x)>0,\ x\in(-\infty;-1)U(3;+\infty)$;
в) $f(x)=0,\ x\in\{1\};\ f(x)>0,\ x\in(1;+\infty);\ f(x)<0,\ x\in(-\infty;\ 1)$;
г) $f(x)=0,\ x\in\{-2,\ 5\}$;
$f(x)<0,\ x\in(-\infty;-2)U(-2;5);\ f(x)>0,\ x\in(5;\ +\infty)$.

Задание 4. а) $x^2-x+1-\dfrac{2}{x+1}$; б) $2-\dfrac{x-5}{x^2-x-2}$; в) $4-\dfrac{7}{x+1}$;
г) $5x-\dfrac{11x-1}{x^2+1}$.

Занятие 28

Задание 1. а) $\dfrac{2}{x+2}+\dfrac{3}{x-1}$; б) $\dfrac{1}{x}+\dfrac{2}{x-1}$;
в) $\dfrac{2}{3(x-2)}-\dfrac{2}{3(x+1)}-\dfrac{1}{(x-2)^2}$; г) $\dfrac{2}{x-1}+\dfrac{3x-1}{x^2+x+1}$.

Задание 2. а) $\dfrac{2}{x-1}-\dfrac{6}{x+1}+\dfrac{4x-4}{x^2+x+1}$;
б) $\dfrac{3}{11(x+2)}+\dfrac{18x+1}{11(x^2+2x+3)}$.

Задание 3. а) $\dfrac{1}{2(x-1)}-\dfrac{x-1}{2(x^2+1)}$; б) $1+\dfrac{4}{x}-\dfrac{5}{x+1}$;
в) $x+\dfrac{19}{2(x+1)}-\dfrac{1}{2(x-1)}$; г) $x+\dfrac{3}{x-1}+\dfrac{x+2}{x^2+2}$.

Занятие 30

Задание 1. а) 15; б) $\dfrac{10}{3}$; в) 15; г) 4.

Задание 2. а) $\sqrt[9]{b^4}$; б) $\sqrt[4]{x}$; в) $\sqrt[6]{108}$; г) $\sqrt{2-x}$.

Задание 3. а) $\sqrt{3x^2}$; б) $\sqrt[3]{2a^4}$; в) $\sqrt[4]{48c^5}$; г) $-\sqrt[3]{7x^4}$.

Задание 4. а) $\dfrac{3x\left(\sqrt{x+5}+\sqrt{7-x}\right)}{2(x-1)}$;

б) $\sqrt{x-1}+1,\ x\neq 2$; в) $\dfrac{\left(\sqrt{a+3}-2\right)\left(\sqrt{a}-1\right)}{a-1}$;

г) $\dfrac{\sqrt{1+x}+\sqrt{1-x}}{2},\ x\neq 0$.

Задание 5. а) $\dfrac{2}{\sqrt{2+x}+\sqrt{2-x}},\ x\neq 0$; б) $\dfrac{4}{\sqrt{x}\left(\sqrt{x+4}+\sqrt{x}\right)}$;

в) $-\dfrac{4}{\sqrt{x-1}+\sqrt{x-3}}$; г) $\dfrac{x+4}{5+\sqrt{9+x^2}},\ x\neq 4$.

Задание 6. а) 33; б) –115; в) –33; г) –11.

Занятие 31

Задание 1. а) $(0{,}3)^4$; б) 10^{-4}; в) x^{-4}; г) $(9a)^{-2}$.

Задание 2. а) $x^{\frac{1}{6}}$; б) $y^{\frac{1}{6}}$; в) $x^{\frac{20}{9}}$; г) $2^{\frac{11x-5}{3}}$.

Задание 3. а) $\dfrac{|a|^3}{8},\ a\neq 0$; б) $\dfrac{|x|^7\sqrt{|x|}}{128\sqrt{2}},\ x\neq 0$; в) $x^2,\ x>0$; г) $\left(\dfrac{3}{4}\right)^x$;

д) 10^{6x-6}; е) $6^{\frac{x+4}{2}}$.

Задание 4. а) $\dfrac{x}{x-1},\ x>0$; б) $\sqrt{x}+1,\ x\neq 1$; в) $1-x\sqrt{x}+1,\ x\neq 1$;

г) $\sqrt{x}-1$.

Задание 5. а) $5\dfrac{19}{54}$;

б) –17,4; в) 15; г) 25.

Задание 6. а) $a+1,\ a\geq 0$; б) $a\sqrt[3]{a}+9\sqrt[5]{a^2}$; в) $x+1$; г) $a+1$.

Задание 8. 1. Функция не имеет обра́тной. 2. Функция имеет обра́тную (обрати́ма). 3. Не имеет обратной. 4. Обрати́ма. 5. Обрати́ма. 6. Обрати́ма.

Задание 9. 1. $y=\frac{x+1}{3}$, $D(f^{-1})=R$, $E(f^{-1})=R$.

2. $y=1-\sqrt{x}$, $D(f^{-1})=[0;+\infty)$, $E(f^{-1})=(-\infty;1]$.

3. $y=2^x+1$, $D(f^{-1})=R$, $E(f^{-1})=(1;+\infty)$.

4. $y=\log_2(x+1)$, $D(f^{-1})=(-1;+\infty)$, $E(f^{-1})=R$.

5. $y=\frac{x+1}{x}$, $D(f^{-1})=(-\infty;0)U(0;+\infty)$, $E(f^{-1})=(-\infty;1)U(1;+\infty)$.

6. $y=x^{23}+1$, $D(f^{-1})=R$, $E(f^{-1})=R$.

Занятие 32

Задание 1. а) 5; б) 3; в) $\frac{11-\sqrt{133}}{2}$; г) 2; д) 1; е) -1**;**

ж) $\varnothing$; з) $1;2$; и) $-2;0$; к) $-7;6$; л) $-61;30$; м) 0.

Занятие 33

Задание 1. а) $y=0$, при $x=-\frac{1}{2}$; $y<0$, при $x\in\left(-\infty;-\frac{1}{2}\right)$;

$y>0$, при $x\in\left(-\frac{1}{2};\infty\right)$.

б) $y=0$, при $x=1,2$; $y<0$, при $x\in(1;2)$; $y>0$, при $x\in(2;\infty)$;

в) $y=0$, при $x=7$; $y<0$, при $x\in(7;\infty)$; $y>0$, при $x\in(6;7)$.

г) $y=0$, при $x=3$; $y<0$, при $x\in(3;\infty)$; $y>0$, при $x\in\left[-\frac{21}{5};3\right)$.

Задание 2. а) $(2;\infty)$; б) $[1{,}5;3)$; в) $\varnothing$; г) $(-\infty;1]\cup(5;\infty)$; д) $[0;2)$; е) $(4;\infty)$; ж) $[-1;3)$; з) (-2; 1).

Занятие 36

Задание 1. а) 3,5; б) $-\frac{5}{4}$; в) -4; г) –3; д) $-\frac{1}{2}$; е) 2.

Задание 2. а) 0; б) -1; в) 3; г) 3; д) 2; е) 4.

Задание 3. а) 2; б) 3; в) 3; г) 0; д) 1; е) $\pm\sqrt{2};-1;1$.

Задание 4. а) -2; б) 0; $\frac{1}{2}$; в) 1; 2; г) 0; 1; д) 0; е) -2.

Занятие 37

Задание 1. а) -$\left(-\infty; \frac{1}{2}\right)$; б) $\left(-\frac{3}{4}; \infty\right)$; в) $(2; \infty)$;

г) $(-\infty; 2]$; д) $\left(\frac{5}{3}; 2\right)$; е) $(2; \infty)$; ж) $(-1; 1)$; з) $\left(0; \frac{1}{2}\right)$;

и) (1; ∞); к) [0; 0,5].

Задание 2. а) $(-\infty; -0{,}2]$; б) $[3; +\infty)$; в) $[0; 1]$;

г) $[3; +\infty)$; д) $x \le 0$ *или* $x \ge 1$; е) $(-\infty; 0{,}2] U [3; +\infty)$.

Занятие 38

Задание 1. а) $\ln y = 2 + \ln x$; б) $\ln y = \frac{7}{12}\ln x$;

в) $\ln y = 2\ln a + 3\ln b$; г) $\ln y = \ln 5 + 2\ln a - 3\ln x$;

д) $\ln y = \frac{1}{2}\ln a$; е) $\ln y = (1 + \ln x)\ln x$; ж) $\ln y = \ln x - 3$;

з) $\ln y = 2\ln x$.

Задание 2.а) $y = x^2(x-3)$; б) $y = xe^2$; в) $y = \sqrt{x}$; г) $y = \frac{\sqrt{x}}{\sqrt[3]{x+2}}$;

д) $y = \sqrt[4]{\left(\frac{x}{4}\right)^3}$; е) $y = \frac{\sqrt{5x}}{3}$; ж) $y = x^{\ln x}$; з) $y = x^{\ln x + 1}$.

Задание 3. а) $x = 12$; б) $x = \frac{4}{3}$; в) $x = 1$; г) $x = \frac{5}{7}$; д) $x = \frac{2}{15}$;

е) $x = 18\sqrt[3]{3}$; ж) $x = 75$; з) $x = 1{,}5$; и) $x = 35$; к) $x = 1$.

Задание 4. а) 4; б) 4; в) 3; г) $\frac{1}{15}$; д) 7; е) 3.

Занятие 40

Задание 1. а) {-1; 4}; б) {-9; 1}; в) {-8; 2}; г) 11; д) 3; е) 1;

ж) 3; з) 1; и) 13; к) $\frac{1}{2}$; л) $4 - \sqrt{11}$; м) –1.

Задание 2. *Ответ*: а) $\{3^{\sqrt{2}}; 3^{-\sqrt{2}}\}$; б) $\{10^{-1}; 10\}$; в) $\{1; e^{-3}\}$; г) $\log_5 7$; д) $\log_2 \frac{3}{2}$; е) $-2-\sqrt{10}$.

Задание 3. *Ответ*: а) $\{e; e^2\}$; б) 100; в) {3; 27}; г) e^3.

Задание 4. *Ответ*: а) $\{10; 10^{-4,5}\}$; б) -4; в) 16; г) $\left\{-\frac{9}{5}; 23\right\}$; д) 2; е) $1+\sqrt{3}$.

Занятие 41

Задание 1. а) (1; 5); б) (-5; 0); в) (-1; 3); г) (-1; 1); д) (5; 30); е) (0; 2); ж) [-1; 1) ∪ (3; 5]; з) (-1; 0) ∪ (1; 2); и) $\left(-1; \frac{1-\sqrt{5}}{2}\right) \cup \left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}; 2\right)$; к) (-1; 3); л) (0; 1); м) [7; ∞); н) $(-\infty; -2) \cup \left(\frac{5}{8}; \infty\right)$; о) $(3; 4) \cup (4; \infty)$; п) (-1; 2); р) (0; 27).

Задание 2. 1) $\left(\frac{2}{3}; \frac{3-2\log_3 2}{3\log_3 2-1}\right)$; 2) $\left(\frac{1}{2}; 1\frac{1}{21}\right)$;
3) $(-\infty; -2) U (7; +\infty)$; 4) $0{,}001 < x < 1 \, или \, x > 100$; 5) $(2; +\infty)$;
6) $(4; +\infty)$; 7) $\left(1\frac{1}{4}; 3\right)$; 8) $(-4; -3) U (2; +\infty)$;
9) $(4-\sqrt{2}; -3) U (4+\sqrt{2}; +\infty)$; 10) $[-3\sqrt{5}; 1) U [3\sqrt{5}; 4\sqrt{3})$;
11) $[2; +\infty)$; 12) $(-\infty; -1) U (1; +\infty)$.

Задание 4. 1) $[-1;\ 2{,}5) U (2{,}5; 5]$; 2) $(4; +\infty)$; 3) $[6; +\infty)$;
4) $(-1; 0] U [2; 3)$; 5) $\left[18\frac{3}{4}; +\infty\right)$; 6) $[0; 4) U (6; 10]$;
7) $\left(\frac{3-\sqrt{41}}{2}; 1\right) U \left(2; \frac{3+\sqrt{41}}{2}\right)$; 8) $[4-\sqrt{2}; 3) U (5;\ 4+\sqrt{2}]$;
9) $(1; +\infty)$; 10) $\left(0; \frac{1}{100}\right) U \left(\frac{1}{100}; \frac{\sqrt{10}}{10}\right)$.

Занятие 42

Задание 1. а) $\frac{2\pi}{3}$; $\frac{3\pi}{4}$; $\frac{5\pi}{6}$; $\frac{7\pi}{6}$; $\frac{5\pi}{4}$; $\frac{4\pi}{3}$; $\frac{5\pi}{3}$; $\frac{11\pi}{6}$.

б) 54°; 315°; 130°; 150°; 220°; 84°.

Задание 3. а) первая; б) первая; в) третья; д) четвёртая.

Занятие 43

Задание 1. а) $-\cos^2\alpha$; б) 1; в) $2\sin t\cos t$; г) 2;

д) $\cos^2 x$; е) 1; ж) $\sin^2\frac{\alpha}{2}$; з) 0.

Задание 3. а) $\frac{1}{\sin^2\alpha}$; б) $\cos^2\alpha$; в) $2\cos\alpha$; г) $2\cos^2\alpha$; д) 1;

е) 0; ж) 1; з) 1; и) –1; к) $\mathrm{ctg}^2\alpha$; л) $-\mathrm{ctg}^2\alpha$; м) $\cos^2\alpha$;

н) $2(1+\mathrm{tg}\,\alpha)$.

Занятие 44

Задание 1. а) I или II; б) II или III; в) III; г) IV.

Задание 2. а) $\sin\frac{\pi}{5}>0$, $\cos\frac{\pi}{5}>0$; б) sin1>0, cos1>0;

в) sin0,7>0, cos0,7>0; г) sin2>0, cos2<0; д) sin3,2<0, cos3,2<0;

е) $\sin\frac{71\pi}{6}<0$, $\cos\frac{71\pi}{6}>0$; ж) $\sin\left(-\frac{71\pi}{6}\right)>0$, $\cos\left(-\frac{71\pi}{6}\right)>0$;

з) sin3,14>0, cos3,14<0.

Задание 3. а) $\sin\alpha>0$, $\cos\alpha<0$; б) $\sin\alpha<0$, $\cos\alpha<0$;

в) $\sin\alpha<0$, $\cos\alpha>0$.

Задание 4. Может, например, sin(-3,2)<0.

Задание 5. а) $\alpha=\frac{\pi k}{2}, k\in Z$; б) $\alpha=\frac{\pi}{6}+\frac{2\pi k}{3}, k\in Z$;

в) $\alpha=\frac{\pi}{2}+\pi k, k\in Z$; г) $\beta=3\pi+4\pi k, k\in Z$;

д) $\alpha = \frac{\pi}{3} + \frac{2\pi k}{3}, k \in Z$; е) $x = \pi k, k \in Z$ или $x = -\frac{\pi}{2} + 2\pi k, k \in Z$; ж) $x = \pi k, k \in Z$ или $x = \frac{\pi}{2} + \pi k, k \in Z$; з) $x = \frac{\pi}{2} + \pi k, k \in Z$ или $x = \frac{\pi}{6} + \frac{2\pi k}{3}, k \in Z$;

Задание 6. а) –0,6; $\frac{4}{3}$; $\frac{3}{4}$; б) $-\frac{3}{5}; \frac{3}{4}; \frac{4}{3}$; в) $-\frac{40}{41}; \frac{9}{41}; -\frac{40}{9}$; г) $\frac{7}{25}; -\frac{24}{7}; -\frac{7}{24}$; д) $\frac{15}{17}; -\frac{8}{17}; -\frac{15}{8}$.

Занятие 45

Задание 1. а) чётная; б) чётная; в) нечётная; г) чётная; д) нечётная; е) нечётная.

Задание 2. а) $\frac{7\pi}{5}$; б) $\frac{4\pi}{7}$; в) $\frac{\pi}{9}$; г) $\frac{6\pi}{7}$; д) $\frac{2\pi}{3}$; е) $\frac{5\pi}{7}$; ж) $\frac{\pi}{3}$.

Задание 3. а) $T = \pi$; б) $T = 3\pi$; в) $T = \frac{\pi}{2}$; г) $T = \pi$; д) непериодическая; е) $T = 2\pi$; ж) $T = 4\pi$; з) $T = 2\pi$.

Занятие 46

Задание 1. а) $-\sin 2\alpha$; б) $\sin\frac{3\pi}{7}$; в) $\cos 4x$; г) $\cos\alpha$; д) $\operatorname{tg}\left(\alpha + \frac{\pi}{4}\right)$; е) $\operatorname{tg}\frac{\pi}{3}$.

Занятие 47

Задание 1. а) $-\sin\frac{\pi}{6}$; б) $\sin\frac{\pi}{7}$; в) $\operatorname{tg}\frac{3\pi}{7}$; г) $-\sin\frac{\pi}{4}$; д) $-\operatorname{ctg}\frac{\pi}{18}$; е) $-\cos\frac{\pi}{10}$; ж) $\sin\frac{5\pi}{12}$; з) $\cos 0{,}1\pi$; и) $\sin\frac{\pi}{7}$.

Задание 2. а) $2\operatorname{tg}\alpha$; б) –1; в) 1; г) $-\cos\alpha$; д) –1; е) $\sin\alpha$; ж) $\frac{1}{\cos^2\alpha}$.

Задание 3. а) 1; б) 0; в) 0; г) $\frac{1}{2}$; д) $\frac{\sqrt{3}}{3}$; е) 1; ж) $\sqrt{3}$.

Занятие 48

Задание 1. а) $\frac{1}{2}$; б) $\frac{\sqrt{3}}{2}$; в) $\frac{\sqrt{2}}{2}$; г) $\frac{\sqrt{2}}{2}$; д) 1; е) 0;

ж) $-\frac{\sqrt{3}}{2}$.

Задание 2. а) $\cos\alpha$; б) 1; в) 1; г) $\cos\alpha$; д) $2\cos\frac{x}{2}$; е) $\frac{1}{2}\operatorname{tg}2\alpha$.

Задание 4. а) π; б) π; в) 2π; г) $\frac{\pi}{2}$; д) $\frac{\pi}{2}$; е) $\frac{\pi}{2}$.

Задание 5. а) $\frac{1}{2}-\frac{1}{2}\cos 6x$; б) $1+\sin 2x$; в) $2+2\sin 2x$;

г) $\frac{1}{8}-\frac{1}{8}\sin 2x$; д) $1+\cos x$.

Задание 6. а) $2\sin^2\frac{x}{2}$; б) $2\cos^2 2x$; в) $-2\sin^2 x$; г) $2\sin^2\frac{3x}{2}$;

д) $2\sin^2\frac{x}{2}$; е) $-2\cos^2\frac{x}{2}$.

Занятие 49

Задание 1. а) $\frac{1+t^2}{9-t^2}$; б) $\frac{1+t^2}{3t^2-10t+3}$; в) $\frac{t+1}{1-t}$; г) $\frac{1+t^2}{2t}$;

д) $\frac{2t}{(t+1)^2}$; е) $\frac{1+t^2}{2}$.

Задание 2. а) $\cos\frac{3x}{4}+\cos\frac{x}{4}$; б) $\cos(2x-1)+\cos 1$;

в) $\sin\frac{\pi}{3}+\sin\left(\frac{\pi}{6}+2\alpha\right)$; г) $2\sin 6x$; д) $\sin 7x-\sin x$;

е) $\frac{3}{4}\sin x-\frac{1}{4}\sin 3x$; ж) $\frac{1}{4}\sin x+\frac{1}{4}\sin 3x$; з) $\sin x+\sin 3x$.

Занятие 50

Задание 1. а) $2\sin x\cos a$; б) $-\cos 2x$; в) $\operatorname{tg}\frac{x+y}{2}\operatorname{ctg}\frac{x-y}{2}$;

г) $2\cos^2\frac{x}{4}$; д) $\sqrt{2}\sin\left(x+\frac{\pi}{4}\right)$; е) $2\sin^2\frac{x}{4}$;

ж) $2\sin\left(\frac{\pi}{4}+\frac{x}{2}\right)\cos\left(\frac{\pi}{4}-\frac{x}{2}\right)$; з) $2\sin\left(\frac{\pi}{4}-\frac{x}{2}\right)\cos\left(\frac{\pi}{4}+\frac{x}{2}\right)$;

и) $\operatorname{tg}^2 x$; к) $2\sin\left(\frac{\pi}{4}-x\right)\cos\left(\frac{\pi}{4}-x\right)$; л) $\operatorname{ctg}\frac{kx}{2}$; м) $\operatorname{tg}\frac{x-a}{2}$;

н) $\operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{6}+\frac{x}{2}\right)\operatorname{ctg}\left(\frac{\pi}{3}-\frac{x}{2}\right)$; о) $2\sin\left(\frac{\pi}{6}-\frac{x}{2}\right)\cos\left(\frac{\pi}{6}+\frac{x}{2}\right)$;

п) $2\sin\left(\frac{x}{4}+\frac{\pi}{8}\right)\sin\left(\frac{x}{2}-\frac{\pi}{8}\right)$; р) $4\sin\left(\frac{\pi}{6}-x\right)\cos\left(\frac{\pi}{6}+x\right)$;

с) $\sin\left(x+\frac{\pi}{3}\right)\sin\left(x-\frac{\pi}{3}\right)$; т) $\sin\left(\frac{\pi}{3}+\frac{x}{2}\right)\sin\left(\frac{\pi}{3}-\frac{x}{2}\right)$.

Занятие 51

Задание 1. а) $\frac{5\pi}{12}$; б) $\frac{\pi}{6}$; в) $-\frac{5\pi}{12}$.

Задание 2. а) $\frac{2}{9}$; б) $\frac{\pi}{3}$; в) –0,65; г) $-\frac{\pi}{4}$.

Задание 3. а) $(-1)^n\frac{\pi}{6}+\pi n,\ n\in Z$; б) $(-1)^n\frac{\pi}{3}+2\pi n,\ n\in Z$;

в) $\frac{\pi}{24}+(-1)^n\frac{\pi}{24}+\frac{\pi n}{4},\ n\in Z$; г) $(-1)^n\frac{\pi}{6}+\pi n,\ n\in Z$;

$(-1)^{n+1}\arcsin\frac{1}{3}+\pi n,\ n\in Z$; д) $(-1)^n\frac{\pi}{6}+\pi n,\ n\in Z$;

е) $\frac{\pi}{2}+2\pi n, n\in Z$; $(-1)^{n+1}\frac{\pi}{6}+\pi n,\ n\in Z$.

Занятие 52

Задание 1. а) $\frac{19\pi}{12}$; б) $\frac{\pi}{2}$; в) $\frac{\pi}{2}$; г) $\frac{\pi}{2}$.

Задание 2. а) $-\frac{1}{4}$; б) 1; в) $\frac{1}{2}$; г) $\varnothing$; д)1; е) $\frac{1}{2}\cos a, 0 \le a \le \pi$.

Задание 3. а) $\pm\frac{2\pi}{3}+2\pi n, n\in Z$; б) $\pm\frac{\pi}{6}+\pi n, n\in Z$;

в) $\pm\arccos 0{,}7+2\pi n, n\in Z$; г) $\pm\frac{3\pi}{4}+6\pi n, n\in Z$; д)

$\frac{1}{2}\pm\frac{\pi}{3}+\pi n, n\in Z$; е) $\pi n, n\in Z; \pm\frac{\pi}{9}+\frac{2\pi n}{3}, n\in Z$;

ж) $\frac{\pi}{2}+\pi n, n\in Z;\ (-1)^{n+1}\frac{\pi}{6}+\pi n,\ n\in Z$;

з) $\frac{\pi}{2}+2\pi n, n\in Z;\ \pm\frac{2\pi}{3}+2\pi n,\ n\in Z$.

Занятие 53

Задание 1. а) $\frac{7\pi}{12}$; б) $\frac{\pi}{2}$; в) $\frac{3\pi}{4}$; г) $\frac{\pi}{3}$.

Задание 2. а) $\frac{\pi}{4}+\pi n, n\in Z$; б) $-\frac{\pi}{8}+\frac{\pi n}{2}, n\in Z$;

в) $-\frac{2\pi}{3}+2\pi n, n\in Z$; г) $-\frac{\pi}{4}+\pi n, n\in Z; -\operatorname{arctg}4+\pi n, n\in Z$;

д) $\pi n, n\in Z; \operatorname{arctg}3+\pi n, n\in Z$.

Занятие 54

Задание 1. а) $\frac{\pi}{2}$; б) $\frac{\pi}{2}$; в) π; г) π.

Задание 2. а) 2,5; б) –0,2; в) $-\frac{\pi}{3}$; г) $\frac{3\pi}{4}$.

Задание 3. а) $\operatorname{ctg}\frac{\pi}{18}$; б) $5\operatorname{ctg}a,\ 0<a<\pi$; в) 1; г) $\varnothing$.

Задание 4. а) $(-1)^n\frac{\pi}{6}+\pi n, n\in Z$; б) $(-1)^n\frac{\pi}{8}+\frac{\pi n}{2}, n\in Z$;

в) $\pm\frac{\pi}{4}+2\pi n, n\in Z$; г) $\pm\frac{2\pi}{3}+4\pi n, n\in Z$; д) $\pm\frac{9\pi}{4}+6\pi n, n\in Z$;

е) $-\frac{\pi}{12}\pm\frac{5\pi}{24}+\frac{\pi n}{2}, n\in Z$; ж) $\frac{\pi}{4}+\pi n, n\in Z$; з) $\frac{\pi}{4}+\pi n, n\in Z$;

и) $-\frac{\pi}{8}+\frac{\pi n}{2}, n\in Z$; к) $-2\pi+3\pi n, n\in Z$;

л) $-\frac{2\pi}{3}+2\pi n, n\in Z$; м) $-\frac{\pi}{10}+\frac{\pi n}{5}, n\in Z$;

н) $\pm\frac{\pi}{3}+2\pi n,\ n\in Z$; $\pm\left(\pi-\arccos\frac{3}{4}\right)+2\pi n, n\in Z$;

о) $(-1)^n\frac{\pi}{6}+\pi n, n\in Z$; п) $\frac{\pi}{4}+\pi n, n\in Z$; $\operatorname{arctg}3+\pi n, n\in Z$;

р) $\pi n, n\in Z$; $\operatorname{arctg}3+\pi n, n\in Z$.

Задание 5. 1) нет; 2) $\arcsin\left(a\sqrt{1-b^2}-b\sqrt{1-a^2}\right)$;

4) $\arccos\left(ab-\sqrt{1-a^2}\sqrt{1-b^2}\right)$.

Занятие 55

Задание 1. 12,5 см; Задание 2. 2 см;

Задание 3. $\frac{\sqrt{2}c^2\sin\alpha\cos\alpha}{c(\cos\alpha+\sin\alpha)}$;

Задание 4. $\frac{236\operatorname{tg}36°17'}{1-\operatorname{tg}36°17'\operatorname{ctg}38°23'}$ м.

Занятие 56

Задание 1. 25°, $\frac{18{,}7}{\cos 25°}$, $18{,}7\cdot\operatorname{tg}25°$.

Задание 2. $\arcsin\frac{433}{1390}$, $\arccos\frac{433}{1390}$.

Задание 3. 3; $97{,}5\cdot\sqrt{3}$; 97,5. Задание 4. $\arccos\frac{5}{22}$.

Задание 5. а) ; б) ; в) ; г) .

Задание 6. $\sin A=\frac{ac\sqrt{3}}{4\sqrt{a^2+b^2+ab}}$; $\sin B=\frac{bc\sqrt{3}}{4\sqrt{a^2+b^2+ab}}$;

$m_a=\frac{1}{2}\sqrt{a^2+4b^2+2ab}$; $m_b=\frac{1}{2}\sqrt{4a^2+b^2+2ab}$;

$m_c = \frac{1}{2}\sqrt{a^2 + b^2 - ab}$; $h_a = \frac{a\sqrt{3}}{4}$; $h_b = \frac{b\sqrt{3}}{4}$;

$h_c = \frac{ab\sqrt{3}}{4\sqrt{a^2 + b^2 + ab}}$; $C = \sqrt{a^2 + b^2 + ab}$.

Занятие 58

Задание 1. а) [0; 2]; б) [–0,5; 0,5]; в) [1; 3]; г) [1; 5].

Занятие 59

Задание 1. 1) $\pm\frac{\pi}{3} + 2\pi k,\ k \in Z$; 2) $\pi k; -\frac{\pi}{2} + 2\pi n,\ k \in Z, n \in Z$.

3) $\operatorname{arctg}\left(-1 \pm \sqrt{5}\right) + \pi k, k \in Z$; 4) $\operatorname{arctg} 2 + \pi k, k \in Z$;

$\operatorname{arctg} 3 + \pi k, k \in Z$; 5) $-\frac{\pi}{4} + \pi k,\ k \in Z$; $\operatorname{arctg}\frac{15}{7} + \pi k, k \in Z$.

6) $\frac{\pi k}{4}, k \in Z$; 7) $\frac{\pi}{2} + 2\pi k,\ k \in Z,\ \frac{\pi}{2} - 2\operatorname{arctg}\frac{1}{3} + 2\pi n,\ n \in Z$.

8) $\frac{\pi}{2} + 2\pi k,\ k \in Z,\ \frac{\pi}{2} - 2\operatorname{arctg}\frac{1}{4} + 2\pi n,\ n \in Z$.

9) $\frac{\pi}{2} + 2\pi k,\ k \in Z$; $\pm\frac{2\pi}{3} + 2\pi k,\ k \in Z$; 10) $\varnothing$;

11) $\pi + 2\pi k, k \in Z$; $\pm\frac{2\pi}{3} + 4\pi k, k \in Z$; 12) $\frac{1}{2}\operatorname{arctg} 2 + \frac{\pi k}{2}, k \in Z$.

13) $\frac{\pi}{2} - \operatorname{arctg}\frac{5}{12} + 2\pi k, k \in Z$; 14) $\pi k; \pm\frac{\pi}{3} + 2\pi n,\ k \in Z, n \in Z$;

15) $2\pi k;\ \pi + 4\pi n, k \in Z, n \in Z$; 16) $4\pi k;\ \pi + 4\pi n, k \in Z, n \in Z$; 17)

$(-1)^k\frac{\pi}{6} + \pi k; (-1)^n \arcsin\frac{1}{3} + \pi n, k \in Z, n \in Z$;

18) $(-1)^n \arcsin\frac{1}{3} + \pi n, n \in Z$; 19) $\frac{\pi}{6} + \pi k, k \in Z$;

20) $-\frac{\pi}{4} + \pi k, k \in Z$; 21) $\pi n;\ \operatorname{arctg} 3 + \pi k, n \in Z,\ k \in Z$;

22) $\frac{\pi}{4} + \pi n;\ \operatorname{arctg} 3 + \pi k, n \in Z,\ k \in Z$.

Занятие 60

Задание 1. 1) $\left(\frac{\pi}{6}+2\pi n;\frac{5\pi}{6}+2\pi n\right),\ n\in Z$;

2) $\left(-\frac{7\pi}{6}+2\pi n;\frac{\pi}{6}+2\pi n\right),\ n\in Z$; 3) $\left(-\frac{4\pi}{3}+2\pi n;\frac{\pi}{3}+2\pi n\right),\ n\in Z$;

4) $\left[-\frac{\pi}{6}+2\pi n;\ \frac{\pi}{6}+2\pi n\right],\ n\in Z$; 5) $\left[\frac{\pi}{4}+2\pi n;\ \frac{7\pi}{6}+2\pi n\right],\ n\in Z$;

6) $\left(-\frac{\pi}{4}+2\pi n;\frac{\pi}{4}+2\pi n\right),\ n\in Z$; 7) $\left(-\frac{\pi}{2}+2\pi n;\ \frac{7\pi}{6}+2\pi n\right),\ n\in Z$;

8) $\left(-\frac{3\pi}{2}+2\pi n;\ 2\pi n\right),\ n\in Z$; 9) $\left[\frac{\pi}{8}+\pi n;\ \frac{3\pi}{8}+\pi n\right],\ n\in Z$;

10) $\left(-\frac{2\pi}{3}+4\pi n;\ \frac{10\pi}{3}+4\pi n\right),\ n\in Z$; 11) $\left(\frac{\pi}{3}+\pi n;\ \frac{\pi}{2}+\pi n\right),\ n\in Z$;

12) $-\left(\frac{\pi}{2}+\pi n;\ \frac{\pi}{6}+\pi n\right),\ n\in Z$; 13) $\left(\pi n;\ \frac{\pi}{4}+\pi n\right),\ n\in Z$;

14) $\left(-\pi+\pi n;\ \frac{\pi}{4}+\pi n\right],\ n\in Z$.

Задание 2. 1) $\left[-\frac{\pi}{6}+2\pi n;\ \frac{7\pi}{6}+2\pi n\right],\ n\in Z$;

2) $\left[-\frac{\pi}{3}+2\pi n;\ \frac{\pi}{3}+2\pi n\right],\ n\in Z$.

Занятие 61

Задание 1. а) сжатием в 2 раза вдоль оси абсцисс;

б) растяжением в 3 раза вдоль оси абсцисс;

в) сдвигом влево на $\frac{\pi}{3}$;

г) растяжением в 4 раза вдоль оси ординат;

д) сдвигом вправо на 3;

е) сжатием в 2 раза вдоль оси ординат, сжатием в 2 раза вдоль оси абсцисс и сдвигом влево на 2,5.

Занятие 62

Задание 1. а) $3 + i$; б) $3 + 7i$; в) $-6 + 8i$; г) $2\frac{1}{2} - 2\frac{1}{6}i$.

Задание 2. а) $5 - 14i$; б) $0{,}4 + 1{,}9i$; в) $-2i$; г) 28.

Задание 3. а) $-1 + i$; б) i; в) $1 - 2i\sqrt{2}$; г) $\sqrt{2}$.

Задание 4. а) $\frac{16}{5} - \frac{37}{5}i$; б) $\frac{8\sqrt{3}}{7}i$; в) 3; г) $3\left(3 + i\sqrt{3}\right)$.

Задание 5. а) 1; б) i; в) $-4 + 2i$; г) $-4 - 6i$; д) $1 - i$.

Занятие 63

Задание 3. а) $r = \sqrt{6}$; $\varphi = \pi - \operatorname{arctg}\frac{1}{\sqrt{2}}$; б) $r = 1$; $\varphi = \frac{2\pi}{3}$;

в) $r = \sqrt{10}$; $\varphi = \pi + \operatorname{arctg}\frac{1}{3}$; г) $r = 2$; $\varphi = \frac{3\pi}{2}$; д) $r = 2$; $\varphi = \pi$;

е) $r = 4$; $\varphi = \frac{\pi}{2}$; ж) $r = 5$; $\varphi = 0$.

Занятие 64

Задание 1. а) $\sqrt{2}\left(\cos\frac{\pi}{4} + i\sin\frac{\pi}{4}\right)$; б) $\cos\frac{\pi}{3} + i\sin\frac{\pi}{3}$;

в) $2\left(\cos\frac{\pi}{6} + i\sin\frac{\pi}{6}\right)$; г) $\sqrt{5}\left(\cos\operatorname{arctg}\frac{1}{2} + i\sin\operatorname{arctg}\frac{1}{2}\right)$;

д) $32(\cos 0 + i\sin 0)$; е) $7(\cos\pi + i\sin\pi)$;

ж) $\frac{1}{2}(\cos\pi + i\sin\pi)$; з) $3(\cos 0 + i\sin 0)$;

и) $2\left(\cos\frac{3\pi}{2} + i\sin\frac{3\pi}{2}\right)$; к) $3\left(\cos\frac{3\pi}{2} + i\sin\frac{3\pi}{2}\right)$;

л) $2\left(\cos\frac{\pi}{2} + i\sin\frac{\pi}{2}\right)$; м) $\frac{1}{2}\left(\cos\frac{\pi}{2} + i\sin\frac{\pi}{2}\right)$.

Задание 2. а) $3\left(\cos\frac{5\pi}{6}+i\sin\frac{5\pi}{6}\right)$; б) $8\left(\cos\frac{3\pi}{10}+i\sin\frac{3\pi}{10}\right)$;

в) $2\left(\cos\frac{\pi}{2}+i\sin\frac{\pi}{2}\right)$; г) $\cos\frac{9\pi}{14}+i\sin\frac{9\pi}{14}$;

д) $\frac{2}{3}\left(\cos\frac{5\pi}{3}+i\sin\frac{5\pi}{3}\right)$; е) $2\left(\cos\frac{\pi}{3}+i\sin\frac{\pi}{3}\right)$;

ж) $\cos\frac{4\pi}{3}+i\sin\frac{4\pi}{3}$; з) $256\left(\cos\frac{8\pi}{7}+i\sin\frac{8\pi}{7}\right)$;

и) $32768(\cos 0+i\sin 0)$.

Задание 3. а) $8-8i$; б) 18^4; в) $\frac{1}{2}+\frac{i\sqrt{3}}{2}$; г) $16+16i\sqrt{3}$.

Задание 4. а) $\frac{\sqrt{2}}{2}+i\frac{\sqrt{2}}{2}$; $-\frac{\sqrt{2}}{2}+i\frac{\sqrt{2}}{2}$; $-\frac{\sqrt{2}}{2}-i\frac{\sqrt{2}}{2}$; $\frac{\sqrt{2}}{2}-i\frac{\sqrt{2}}{2}$;

б) $\frac{\sqrt{3}}{2}+i\frac{1}{2}$; $-\frac{\sqrt{3}}{2}+i\frac{1}{2}$; $-i$; в) $\pm\frac{\sqrt{2-\sqrt{2}}}{2}\pm i\frac{\sqrt{2+\sqrt{2}}}{2}$;

$\pm\frac{\sqrt{2+\sqrt{2}}}{2}\mp i\frac{\sqrt{2-\sqrt{2}}}{2}$; г) $\pm 2; \pm 2i$;

д) $\sqrt[6]{2}\left(\cos\frac{7\pi+8\pi k}{12}+i\sin\frac{7\pi+8\pi k}{12}\right)$, k= 0, 1, 2;

е) $2\sqrt[4]{2}\left(\cos\frac{\pi+8\pi k}{16}+i\sin\frac{\pi+8\pi k}{16}\right)$, k= 0,1,2,3;

ж) $\sqrt[4]{8}\left(\cos\frac{3\pi+8\pi k}{8}+i\sin\frac{3\pi+8\pi k}{8}\right)$, k=0,1;

з) $\sqrt[5]{2}\left(\cos\frac{7\pi+12\pi k}{30}+i\sin\frac{7\pi+12\pi k}{30}\right)$, k= 0, 1, 2, 3, 4.

Занятие 65

Задание 1. а) $i; -i; \frac{-\sqrt{3}+i}{2}; \frac{-\sqrt{3}-i}{2}; \frac{\sqrt{3}+i}{2}; \frac{\sqrt{3}-i}{2}$;

б) $-1; 1; \frac{1}{2}\pm i\frac{\sqrt{3}}{2}; -\frac{1}{2}\pm i\frac{\sqrt{3}}{2}$; в) $\pm 2; \pm 2i$;

г) $\frac{3\sqrt{2}}{2}\pm\frac{3i\sqrt{2}}{2}; -\frac{3\sqrt{2}}{2}\pm\frac{3i\sqrt{2}}{2}$;

д) $-1; \frac{1+\sqrt{5}}{4}\pm i\frac{\sqrt{10-2\sqrt{5}}}{4}; \frac{1-\sqrt{5}}{4}\pm i\frac{\sqrt{10+2\sqrt{5}}}{4}$;

е) $x_1=x_2=\frac{1}{3}$; ж) $-1\pm i\sqrt{3}$; з) $\frac{1}{2}; 1; -\frac{1}{2}\pm i\frac{\sqrt{3}}{2}$; $-\frac{1}{4}\pm i\frac{\sqrt{3}}{4}$

и) $-1; \frac{1}{2}\pm i\frac{\sqrt{3}}{2}; \frac{1}{2}; -\frac{1}{4}\pm i\frac{\sqrt{3}}{4}$; к) $-1\pm i\sqrt{2}; 1\pm i\sqrt{2}$.

Задание 2. а) $\frac{2}{3}$; $-\frac{1}{3}\pm\frac{i\sqrt{3}}{3}$; б) $\frac{\sqrt{2}}{2}\pm\frac{i\sqrt{2}}{2}$; $-\frac{\sqrt{2}}{2}\pm\frac{i\sqrt{2}}{2}$;

в) ± 1; $\pm i$; г) $1\pm i$; $-1\pm i$; д) $\pm\frac{\sqrt{3}}{2}$; $\pm\frac{i\sqrt{3}}{2}$;

е) $\pm 2i$; $\sqrt{3}\pm i$; $-\sqrt{3}\pm i$; ж) $\frac{3\pm\sqrt{209}}{10}$; з) ± 3; $\pm i$;

и) $\cos\frac{\varphi}{3}+i\sin\frac{\varphi}{3}$; $\cos\frac{\varphi+2\pi}{3}+i\sin\frac{\varphi+2\pi}{3}$;

$\cos\frac{\varphi+4\pi}{3}+i\sin\frac{\varphi+4\pi}{3}$, $\varphi=2\pi-\operatorname{arctg}\frac{5\sqrt{7}}{9}$;

$\cos\frac{\psi}{3}+i\sin\frac{\psi}{3}$; $\cos\frac{\psi+2\pi}{3}+i\sin\frac{\psi+2\pi}{3}$;

$\cos\frac{\psi+4\pi}{3}+i\sin\frac{\psi+4\pi}{3}$, $\psi=\operatorname{arctg}\frac{5\sqrt{7}}{9}$;

к) 4; $1\pm 2i$; л) –5; $1\pm 3i$; м) 3; $\frac{3}{2}\pm\frac{i\sqrt{3}}{2}$; н) 3; $-1\pm i$.

Занятие 67

Задание 1. а) 0; $\frac{1}{4}$; $\frac{2}{5}$; $\frac{3}{6}$. б) -1; 1; -1; 1. в) $\frac{1}{2}$; $-\frac{1}{2}$; –1; $-\frac{1}{2}$.

г) $\frac{1}{2}$; $\frac{\sqrt{3}}{2}$; 1; $\frac{\sqrt{3}}{2}$.

Задание 2. а) $u_n = 2n - 1$; б) $u_n = \frac{1}{2^n}$; в) $u_n = 2n$;

г) $u_n = \frac{2n-1}{2^n}$. д) $u_n = \frac{(-1)^n - 1}{n+1}$.

Задание 3. а) $\frac{2}{3}; \frac{3}{4}; \frac{4}{5}; \frac{5}{6}; \frac{6}{7}; \frac{7}{8}; \frac{8}{9}$. б) 4; 4; 4; 4; 4; 4; 4.

в) 2; 4; 8; 16; 32; 64; 128. г) –2; –1; $-\frac{4}{7}; -\frac{1}{3}; -\frac{6}{31}; -\frac{1}{9}$.

Задание 4. а) $\frac{1}{2}; \frac{2}{3}; \frac{3}{4}; \frac{4}{5}; \frac{5}{6}$. б) –1; $\frac{1}{2}; -\frac{1}{3}; \frac{1}{4}; -\frac{1}{5}$.

в) $\sqrt[3]{2}; \sqrt[3]{3}; \sqrt[3]{4}; \sqrt[3]{5}; \sqrt[3]{6}$.

Задание 5. а) $\frac{1}{2}; 1; \frac{5}{4}; \frac{7}{5}; \frac{3}{2}; \frac{11}{7}$. б) 1; $\frac{1}{2}; \frac{1}{3}; \frac{1}{4}; \frac{1}{5}; \frac{1}{6}$.

в) 1; 0; –1; –2; –3; –4.

Занятие 68

Задание 1. а) убывающая; б) возрастающая; в) возрастающая; г) колеблющаяся; д) колеблющаяся.

Задание 4. а) ограниченная; б) ограниченная; в) ограниченная; г) не ограниченная.

Занятие 69

Задание 1. а) $-\frac{1}{2}$; б) 3; в) 0; г) 1.

Занятие 70

Задание 1. а) 1640; б) 0; в) 28; г) 8; д) 1635; е) 38; 133; 228.

Занятие 71

Задание 1. а) 1; б) 2540; в) 8; г) 8; 27.

Занятие 72

Задание 1. а) 10; б) 4; в) 3; г) 16.

Занятие 73

Задание 1. 1) 6; 2) а) 120; б) 24; в) 6; 2; 3) 96; 4) $\frac{1}{120}$.

Задание 2. 1) а)90; б) $n + 2$; в)306; г)$\frac{14!}{9}$. 2) а)7; б)2; 3; в) 7; г) 7.

Занятие 74

Задание 1. а) 120; б) 20; в) 834.

Задание 2. а) $x^2(x-1)$; б) $\frac{x(x-1)}{2}$.

Занятие 75

Задание 1. 1) 96; 2) 4; 35; 120; C_n^3; 3) 10;

4) $C_4^1 \cdot C_{48}^9 + C_4^2 \cdot C_{48}^8 + C_4^3 \cdot C_{48}^7 + C_4^4 \cdot C_{48}^6$; $C_4^1 \cdot C_{48}^9$;

$C_4^2 \cdot C_{48}^8 + C_4^3 \cdot C_{48}^7 + C_4^4 \cdot C_{48}^6$; $C_4^2 \cdot C_{48}^8$.

Задание 2. 1. $2^{10} = 1024$; 4. а) 8; б) 5; 6; в) 11; г) 5.
5. а) 6435; б) 2100; 6. C_8^3; 7 A_8^3; 8. 60; 9. $C_{15}^2 = 105$;
10. 15; 11. 1365; 12. 3024; 13. 1190; 14. а) A_{40}^2;
б) $40 \cdot C_{39}^4$.

Занятие 76

Задание 1. 1. а) $x^6 + 12x^5 + 60x^4 + 160x^3 + 240x^2 + 192x + 64$;
б) $a^{10} + 5a^4 + \frac{10}{a^2} + \frac{10}{a^8} + \frac{5}{a^{14}} + \frac{1}{a^{20}}$;
в) $x^8 - 4x^4 + 6 - \frac{4}{x^4} + \frac{1}{x^8}$; г) $261\sqrt{6} - 369\sqrt{3}$. 2. $924a^5$;
3. $1716a\sqrt[3]{a}; -1716a^5\sqrt[3]{a}$; 4. $T_4 = 84x^4$; 5. $T_7 = C_{16}^6 x^3$;
6. $T_7 = C_{12}^6$; 7. $T_6 = 5005$; 8. $T_4 = 70$; 9. $T_5 = 35x^2$.

Занятие 77

Задание 1. 10. 2. 11. $-\frac{4}{3}$. 12. 1. 13. $-\frac{1}{3}$.

Занятие 78

Задание 1. 5. Справа. 6. Справа. 7. Справа. 8. Справа.

13. –3. 14. $-\frac{1}{36}$. 15. $\frac{1}{2}$. 16. $\frac{3}{2}$. 18. $e^{\frac{\alpha}{\beta}}$. 19. 3.

20. $\frac{3}{8}$. 21. $\frac{5}{4}$. 22. –1. 23. $\frac{1}{2}$. 24. 2. 25. 3. 26. $\frac{1}{2}$.

27. $-\frac{3}{2}$. 28. $\frac{1}{2}$. 29. 2. 30. e^2. 31. e^{-5}. 32. e^2.

Занятие 79

Задание 1. 1. 18. 2. 4. 3. 7. 4. 1. 5. $-\frac{1}{2}$. 6. $\frac{3}{2}$. 7. 1. 8. 1.

9. 1. 10. 1. 11. 5. 12. –6. 13. 0. 14. –3. 15. –7. 16. –2.

17. $\frac{1}{2\sqrt{10}}$. 18. 1. 19. –104. 20. $-\frac{1}{2}$; $\frac{1}{2}$. 21. $-\frac{1}{e}$. 22. 3.

23. 2,5; –2,5. 24. 14; 0. 25. 227; 2. 26. $10\sqrt{5}$; 10.

27. $y=\frac{1}{12}x-\frac{4}{3}$. 28. $y=-\frac{4}{5}x+\frac{1}{5}$. 29. $y=2$.

30. $y=2x+2$. 31. $y=\frac{2}{\sqrt{3}}x-\frac{1}{\sqrt{3}}+\frac{\pi}{6}$. 32. $y=2x$.

Занятие 80

Задание 1. 1. $x^5+\frac{x^4}{2}+C$. 2. $\frac{1}{x^2}-3\ln x+C$. 3. $3x^{\frac{4}{3}}-4x^{\frac{3}{2}}+C$.

4. $2\sin x-5\cos x+C$. 5. $x+e^x-4\sin x+C$.
6. $3\,\mathrm{arctg}\,x-4\arcsin x+C$. 7. $5\sin x+4\,\mathrm{ctg}\,x+C$.

8. $2x^2-x$. 9. $2\sqrt{x+3}-3$. 10. $\frac{1}{3}\sin 3x$. 11. $1-\frac{1}{x+1}$.

12. 9. 13. $\frac{3}{8}$. 14. 2. 15. 2. 16. 2. 17. 10. 18. $1-\frac{\pi}{4}$.

19. $\frac{\pi}{6}-\arcsin\frac{1}{4}-\ln 2$. 20. $12\frac{2}{3}$. 21. 6. 22. $\frac{1}{2}$. 23. π.

24. $\ln 3$. 25. 2. 26. $\frac{3\pi}{4}+\ln 4$. 27. 1. 28. $2\ln 2-1$. 29. –2.

30. $\frac{1}{2}\left(e^{\pi}+1\right)$. 31. 0. 32. $-\frac{\pi^2}{2}$. 33. $3\ln 3-2$. 34. $\frac{\pi^2}{4}$.

ДОПОЛНИТЕЛЬНЫЕ ЗАДАНИЯ

Арифметические преобразования

Вычислите, не пользуясь калькулятором (1 - 55):

1. $5\cdot 32^{\frac{3}{5}}+(7{,}028)^0-\left(\frac{1}{5}\right)^{-2}$.

2. $\dfrac{64^{\frac{1}{5}}\cdot 2^{-2}}{4^{\frac{1}{10}}}$.

3. $\left(\frac{1}{3}\right)^{-2}+(0{,}014)^0-4\cdot 27^{\frac{2}{3}}$.

4. $\dfrac{625^{-\frac{1}{3}}\cdot 5}{25^{\frac{1}{3}}}$.

5. $\dfrac{16^{-\frac{1}{3}}\cdot 2}{4^{\frac{1}{3}}}$.

6. $\left(2+\sqrt{3}\right)^2-\sqrt[5]{32}-\sqrt{48}$

7. $\sqrt{72}+\left(3-\sqrt{2}\right)^2-\sqrt[4]{81}$.

8. $\dfrac{9^{-1}\cdot 27^{\frac{2}{5}}}{3^{\frac{1}{5}}}$.

9. $\sqrt{20}+\left(\sqrt{5}-1\right)^2-\sqrt[3]{27}$.

10. $(-5{,}13)^0+\left(\frac{1}{5}\right)^{-3}-27^{\frac{4}{3}}$.

11. $(16{,}017)^0-\left(\frac{1}{5}\right)^{-3}+5\cdot 16^{\frac{3}{4}}$.

12. $\left(2+\sqrt{3}\right)^2-\sqrt{48}-\sqrt[3]{125}$.

13. $\left(26{,}7-13\frac{1}{5}\right):1{,}8+0{,}125\left(1{,}88+2\frac{3}{25}\right)+22\cdot\frac{1}{5{,}5}$.

14. $\left(6{,}3+3\left(35\frac{17}{42}-4\frac{6}{35}\right)\right)\left(0{,}7-\frac{1}{12}\right)\cdot 6$.

15. $\left(3\frac{4}{9}:\left(2\frac{1}{36}-1\frac{20}{27}\right)\right):\left(2{,}08:10{,}4+2{,}5\cdot 0{,}4\right)$.

16. $\left(\frac{41}{18}-\frac{17}{36}\right)\cdot\frac{18}{65}+\left(\frac{8}{7}-\frac{23}{49}\right):\frac{99}{49}+\frac{7}{6}$.

17. $\left(\frac{92}{85}+\frac{104}{17}\right)\cdot\frac{5}{18}+\left(\frac{1}{3}+\frac{7}{6}\right)-\frac{5}{2}$.

18. $\left(2{,}75-\frac{3}{2}\right)+\left(\frac{5}{2}-1{,}875\right):0{,}125-\frac{1}{4}$.

19. $\sqrt[3]{\frac{12}{\sqrt{2}}\cdot\sqrt{\frac{63^2-27^2}{5}}}$. 20. $\sqrt{2+\sqrt{\frac{68\left(32^2-15^2\right)}{47}}}$.

21. $\sqrt[3]{29+\sqrt{\left(27^2-22^2\right)\cdot 5}}$. 22. $\sqrt{90+\sqrt{\frac{31}{83}\left(57^2-26^2\right)}}$.

23. $\sqrt[3]{\frac{400\sqrt{23^2-17^2}}{\sqrt{0{,}6}}}$. 24. $\sqrt{58+\sqrt{\frac{44^2-26^2}{35}}}$.

25. $\frac{(2{,}1-1{,}965):(1{,}2\cdot 0{,}045)}{0{,}00325:0{,}013}-\frac{1:0{,}25}{1{,}6\cdot 0{,}625}$.

26. $\frac{\left(140\frac{7}{30}-138\frac{5}{12}\right):18\frac{1}{6}}{0{,}002}$.

27. $\frac{\left(6\frac{3}{5}-3\frac{3}{14}\right)\cdot 5\frac{5}{6}}{(21-1{,}25):2{,}5}$. 28. $\frac{3\cdot 2^7\cdot 4^5\left(\frac{1}{32}\right)^2+\frac{2^5}{4}}{245}$.

29. $\frac{\left(\frac{1}{9}\right)^{-3}\cdot(81)^2\cdot\left(\frac{1}{9}\right)^4+\left(\frac{1}{6}\right)^{-4}}{225}$. 30. $\frac{\left(\frac{1}{14}\right)^6\cdot(42)^8\cdot\left(\frac{1}{9}\right)^4-180}{\left(\frac{2}{3}\right)^4}$.

31. $\left(\frac{15}{\sqrt{6}+1}+\frac{4}{\sqrt{6}-2}-\frac{12}{3-\sqrt{6}}\right)\cdot\left(\sqrt{6}+11\right)$.

32. $\left(\frac{12}{\sqrt{15}-3}-\frac{28}{\sqrt{15}-1}+\frac{1}{2-\sqrt{3}}\right)\cdot\left(6-\sqrt{3}\right)$.

33. $\left(\frac{16}{\sqrt{5}-1}-\frac{5}{\sqrt{3}+2}-\frac{8}{\sqrt{5}-\sqrt{3}}\right)\cdot\left(\sqrt{3}+6\right)$.

34. $\dfrac{\left(5^{\frac{1}{3}}+2^{\frac{1}{3}}\right)\left(\sqrt[3]{25}-\sqrt[3]{10}+\sqrt[3]{4}\right)}{0{,}25}$.

35. $\dfrac{\left(\sqrt{14}-\sqrt{6}\right)^3\left(14^{\frac{1}{2}}+6^{\frac{1}{2}}\right)^3}{\left(5^{\frac{1}{3}}+3^{\frac{1}{3}}\right)\left(16\cdot\sqrt[3]{25}-16\cdot\sqrt[3]{15}+16\cdot\sqrt[3]{9}\right)}$.

36. $\dfrac{\left(8^{\frac{1}{2}}+\sqrt{2}\right)^2\cdot\left(4^{\frac{1}{3}}-\sqrt[3]{2}\right)}{32^{\frac{1}{3}}-\sqrt[3]{16}}$.

37. $\dfrac{\left(\sqrt{17}-2\right)\left(\sqrt{34}+\sqrt{8}+\sqrt{17}+2\right)}{\sqrt{2}+1}$.

38. $\dfrac{\left(\sqrt{15}+\sqrt{3}\right)\left(\sqrt{60}-\sqrt{12}-\sqrt{45}+3\right)}{2-\sqrt{3}}$.

39. $\left(\sqrt{57}+3\sqrt{6}+\sqrt{38}+6\right)\left(\sqrt{57}-3\sqrt{6}-\sqrt{38}+6\right)$.

40. $\left(\sqrt{21}-2\right)\sqrt{25+2\sqrt{84}}$.

41. $\sqrt{\left(\sqrt{97}+4\right)\sqrt{113-8\sqrt{97}}}$.

42. $\left(9-\sqrt{83}\right)\sqrt{18\sqrt{83}+164}$.

43. $\left(\sqrt{28}-\sqrt{12}\right)\sqrt{10+\sqrt{84}}$.

44. $\sqrt{17-12\sqrt{2}}+\sqrt{17+12\sqrt{2}}$.

45. $\sqrt{10+4\sqrt{6}}-\sqrt{10-4\sqrt{6}}$.

46. $\sqrt[3]{2+\sqrt{5}}+\sqrt[3]{2-\sqrt{5}}$.

47. $\sqrt[3]{5\sqrt{2}+7}-\sqrt[3]{5\sqrt{2}-7}$.

48. $\sqrt[3]{20+14\sqrt{2}}+\sqrt[3]{20-14\sqrt{2}}$.

49. $\dfrac{2+\sqrt{3}}{2+\sqrt{4+2\sqrt{3}}}+\dfrac{2-\sqrt{3}}{2-\sqrt{4-2\sqrt{3}}}$.

50. $\dfrac{\sqrt{4+\sqrt{10+2\sqrt{5}}}+\sqrt{4-\sqrt{10+2\sqrt{5}}}}{1+\sqrt{5}}$.

51. $\sqrt{9+2\sqrt{2}+4\sqrt{3}+2\sqrt{6}}\cdot\left(\sqrt{6}-\sqrt{2}+1\right)-2\sqrt{6}$.

52. $\left(\sqrt{3+\sqrt{5-\sqrt{13+\sqrt{48}}}}+\sqrt{3-\sqrt{5+\sqrt{13-\sqrt{48}}}}\right)^2$.

53. $\sqrt[3]{6+\sqrt{\dfrac{847}{27}}}+\sqrt[3]{6-\sqrt{\dfrac{847}{27}}}$.

54. $13\cdot\dfrac{\left(4+\sqrt{15}\right)^{\frac{3}{2}}+\left(4-\sqrt{15}\right)^{\frac{3}{2}}}{\left(6+\sqrt{35}\right)^{\frac{3}{2}}-\left(6-\sqrt{35}\right)^{\frac{3}{2}}}$. 55. $\sqrt[3]{\dfrac{1}{3}\left(\sqrt[3]{2}-1\right)}\cdot\left(\sqrt[3]{2}+1\right)$.

Ответы: **1.** 16. **2.** 0,5. **3.** –26. **4.** 0,2. **5.** 0,5.
6. 5. **7.** 8. **8.** $\frac{1}{3}$. **9.** 3. **10.** 45. **11.** -84. **12.** 2. **13.** 12.
14. 370. **15.** 10. **16.** 2. **17.** 1. **18.** 6. **19.** 6. **20.** 6. **21.** 4.
22. 11. **23.** 20. **24.** 8. **25.** 6. **26.** 50. **27.** 2,5. **28.** 1,6. **29.** 9.
30. 81. **31.** -115. **32.** 33. **33.** -33. **34.** 28. **35.** 4. **36.** 9.
37. 13. **38.** 12. **39.** 1. **40.** 17. **41.** 9. **42.** -2. **43.** 8. **44.** 6.
45. 4. **46.** 1. **47.** 2. **48.** 4. **49.** 1. **50.** 1. **51.** 5. **52.** 6.
53. 3. **54.** 7. **55.** 1.

Дробно-рациональные неравенства

Решите неравенства (1 – 50):

1. $\dfrac{1}{x}<x$. 2. $\dfrac{1}{x}>x$. 3. $\dfrac{2}{x+1}<x$.

4. $\dfrac{2}{x+1}>x$. 5. $\dfrac{4}{x-3}>x$. 6. $\dfrac{4}{x-3}<x$.

7. $\frac{3}{x+2} < x$.

8. $\frac{3}{x+2} > x$.

9. $\frac{3}{x-2} < x$.

10. $\frac{3}{x-2} > x$.

11. $\frac{2}{x-1} > x$.

12. $\frac{2}{x-1} < x$.

13. $\frac{7}{x} > \frac{x}{7}$.

14. $\frac{x}{2} < \frac{8}{x}$.

15. $\frac{9}{x} > \frac{x}{4}$.

16. $\frac{x}{11} < \frac{11}{x}$.

17. $\frac{64}{x} > x$.

18. $\frac{5}{x} > \frac{x}{20}$.

19. $\frac{3x+2}{x^2+x-2} < -1$.

20. $\frac{6}{x^2-x-6} < -1$.

21. $\frac{x+5}{x^2-1} > 1$.

22. $\frac{2x-7}{x^2+2x-8} > 1$.

23. $\frac{7x+1}{x^2+4x+3} > 1$.

24. $\frac{5x+1}{x^2-3x-4} < -1$.

25. $\frac{9}{(x+1)^2} \geq 1$.

26. $x-3+\frac{4}{x+1} > 0$.

27. $x+2 < \frac{1}{x+4}$.

28. $\frac{x^2+4x-1}{x^2+4x+3} \leq \frac{1}{x+1}$.

29. $\frac{x^2-x+6}{x^2-3x+2} \geq \frac{2x}{x-2}$.

30. $\frac{x^2-5x+11}{x^2-x-2}+\frac{7}{x+1} \leq 0$.

31. $\frac{x^2-7x-2}{x^2+3x+2}-\frac{2x-8}{x+2} \geq 0$.

32. $\frac{x^2+3x+54}{x^2-8x+15}+\frac{8}{x-5} \leq 0$.

33. $\frac{x^2-5x+64}{x^2-11x+30} \leq \frac{10}{5-x}$.

34. $\frac{2x^2-14x+6}{x^2-4x+3} \geq \frac{3x-8}{x-3}$.

35. $\frac{5x^2-33x+42}{x^2-8x+15} \leq \frac{4x}{x-3}$.

36. $\left(x^2-3x-2\right)\left(x^2-3x+1\right) < 10$.

37. $\left(x^2+3x+1\right)\left(x^2+3x+3\right) < 35$.

38. $\left(x^2-2x+1\right)\left(x^2-2x+3\right) < 3$.

39. $\left(x^2-x\right)\left(x^2-x-2\right) < 120$.

40. $(x^2+x-2)(x^2+x)<24$.

41. $1+x+x^2+x^3+x^4+x^5>0$.

42. $x^3+x^2+x>3$.

43. $\dfrac{3x^2-2x-1}{2x^2+5x+3}<\dfrac{2x^2-3x+1}{3x^2+7x+4}$.

44. $x^4-10x^2+16\geq 0$.

45. $\dfrac{(4-x)^3(x+3)(-x-1)^3(x-2)^2}{(-5-x)^4(16-4x)^2}\leq 0$.

46. $\dfrac{2x-3}{x}<\dfrac{3-2x}{x(x+1)}$.

47. $\dfrac{(x-2)(x-4)(x-7)}{(x+2)(x+4)(x+7)}>1$.

48. $(x^2+3x)(2x+3)\geq 16\dfrac{2x+3}{x^2+3x}$.

49. $1\leq(x-1)^2<4$.

50. $x^2(x+2)^2\geq 9(4-3x)^2$.

Ответы: **1.** $(-1;0)\cup(1;\infty)$. **2.** $(-\infty;-1)\cup(0;1)$.
3. $(-2;-1)\cup(1;\infty)$. **4.** $(-\infty;-2)\cup(-1;1)$. **5.** $(-\infty;-1)\cup(3;4)$.
6. $(-1;3)\cup(4;\infty)$. **7.** $(-3;-2)\cup(1;\infty)$. **8.** $(-\infty;-3)\cup(-2;1)$.
9. $(-1;2)\cup(3;\infty)$. **10.** $(-\infty;-1)\cup(2;3)$. **11.** $(-\infty;-1)\cup(1;2)$.
12. $(-1;1)\cup(2;\infty)$. **13.** $(-\infty;-7)\cup(0;7)$. **14.** $(-\infty;-4)\cup(0;4)$.
15. $(-\infty;-6)\cup(0;6)$. **16.** $(-\infty;-11)\cup(0;11)$. **17.** $(-\infty;-8)\cup(0;8)$.
18. $(-\infty;-10)\cup(0;10)$. **19.** $(-4;-2)\cup(0;1)$. **20.** $(-2;0)\cup(1;3)$.
21. $(-2;-1)\cup(1;3)$. **22.** $(-4;-1)\cup(1;2)$. **23.** $(-3;-1)\cup(1;2)$.
24. $(-3;-1)\cup(1;4)$. **25.** $[-4;-1)\cup(-1;2]$. **26.** $(-1;1)\cup(1;\infty)$.
27. $(-\infty;-3-\sqrt{2})\cup(-4;-3+\sqrt{2})$. **28.** $[-4;-3)\cup(-1;1]$.
29. $[-2;1)\cup(2;3]$. **30.** $[-3;-1)\cup[1;2)$. **31.** $[-3;-2)\cup(-1;2]$.

32. $[-6;-5]\cup(3;5)$. **33.** $[-4;-1]\cup(5;6)$. **34.** $[-2;-1]\cup(1;3)$.
35. $(3;5)\cup[6;7]$. **36.** $(-1;4)$. **37.** $(-4;1)$. **38.** $(0;2)$.
39. $(-3;4)$. **40.** $(-3;2)$. **41.** $(-1;\infty)$. **42.** $(1;\infty)$.
43. $\left(-\frac{3}{2};-\frac{4}{3}\right)\cup(-1;1)$. **44.** $\left(-\infty;-2\sqrt{2}\right]\cup\left[-\sqrt{2};\sqrt{2}\right]\cup\left[2\sqrt{2};\infty\right)$.
45. $(-\infty;-5)\cup(-5;-3]\cup[-1;4)$. **46.** $(-2;-1)\cup\left(0;\frac{3}{2}\right)$.
47. $(-\infty;-7)\cup(-4;-2)$. **48.** $[-4;-3)\cup\left[-\frac{3}{2};0\right)\cup[1;\infty)$.
49. $(-1;0]\cup[2;3)$. **50.** $(-\infty;-12]\cup[1;3]\cup[4;\infty)$.

Показательные уравнения

Решите уравнения (1 – 50):

1. $3^x + 4\cdot 3^{x+1} = 13$.
2. $8^{-2}\cdot 2^x = 4$.
3. $2^x + 3\cdot 2^{x-3} = 22$.
4. $27^{-1}\cdot 3^{2x} = 81$.
5. $4\cdot 7^x - 3\cdot 7^{x-1} = 175$.
6. $7^2\cdot 7^x = 7^{-1}$.
7. $4^x - 3\cdot 4^{x-2} = 52$.
8. $\sqrt{3}\cdot 3^{2x} = \frac{1}{9}$.
9. $5^x - 7\cdot 5^{x-2} = 90$.
10. $4\cdot 2^x = (0{,}5)^2$.
11. $2\cdot 3^x + 3^{x-2} = 57$.
12. $\sqrt{5}\cdot 5^{3x} = \frac{1}{5}$.
13. $2^x + 5\cdot 2^{x-1} = 7\cdot 2^{-5}$.
14. $5^{x+1} - 12\cdot 5^{x-1} = 65$.
15. $4^{x-1} + 11\cdot 4^{x-2} = 15\cdot 2^{-4}$.
16. $7^x + 5\cdot 7^{x-2} = 378$.
17. $7\cdot 6^x - 6^{x+1} = 6^{-2}$.
18. $3^{x+3} + 8\cdot 3^{x+2} = 33$.
19. $8\cdot 3^x = 243\cdot 2^{x-2}$.
20. $2{,}5\cdot 4^x = 8\cdot 5^{x-1}$.
21. $3\cdot 7^x\cdot 5^{1-x} = 7\cdot 3^x$.
22. $5^{-x+1} = 1625\cdot 13^{-x-3}$.
23. $3^{-2x+1} = 1944\cdot 2^{2x+1}$.
24. $9^x - 75\cdot 3^{x-1} - 54 = 0$.
25. $7^x - 14\cdot 7^{-x} = 3^{\log_3 2} + 3$.
26. $25^x + 24\cdot 5^{x-1} - 1 = 0$.
27. $4^x + 3\cdot 2^{x+2} = 64$.
28. $2^{3x+10} - 3^{3x+9} + 3^{3x+7} + 2^{3x+9} = 0$.

29. $2^{2x+8}+5^{2x+7}+2^{2x+10}-5^{2x+8}=0$.

30. $3^{x}-2\cdot 3^{x-2}-7^{x-2}-2\cdot 7^{x-3}=0$.

31. $5\cdot 4^{x^2}+3\cdot 10^{x^2}-2\cdot 25^{x^2}=0$.

32. $64\cdot 9^{x}-84\cdot 12^{x}+27\cdot 16^{x}=0$.

33. $4\cdot 25^{x}-9\cdot 20^{x}+5\cdot 16^{x}=0$.

34. $\sqrt{6^{x}-2}=8-6^{x}$. 35. $\sqrt{3^{x}-5}=11-3^{x}$.

36. $4^{x}-7\cdot 2^{\frac{x-3}{2}}=2^{-x}$. 37. $6\cdot 5^{2x+3}-5\cdot 5^{\frac{x+3}{2}}=5^{-x}$.

38. $4\cdot 4^{x-2}-7\cdot 2^{\frac{x-1}{2}}=2^{4}\cdot 2^{-x}$. 39. $5^{-\frac{x}{3}}-5^{-x}=4\cdot 5^{-\frac{2x}{3}-\frac{1}{2}}$.

40. $7^{-x+\frac{3}{2}}-7^{\frac{3}{2}-\frac{3x}{2}}=342\cdot 7^{-\frac{5x}{4}}$. 41. $9\cdot 4^{\frac{1}{x}}+5\cdot 6^{\frac{1}{x}}=4\cdot 9^{\frac{1}{x}}$.

42. $\left(\frac{1}{4}\right)^{x-2}=2^{5-x}+9$. 43. $4^{x}-2^{x+1}=3$.

44. $5\cdot 25^{\frac{1}{x}}+3\cdot 10^{\frac{1}{x}}=2\cdot 4^{\frac{1}{x}}$.

45. $2^{2x+5}-3^{x+\frac{9}{2}}=3^{x+\frac{7}{2}}-4^{x+4}$.

46. $5^{x+\frac{1}{2}}-9^{x}=3^{2x-2}-5^{x-\frac{1}{2}}$.

47. $5^{x}\cdot 8^{\frac{x-1}{x}}=500$.

48. $2^{8}=2^{x+1}-2^{x}$.

49. $\sqrt{3}\cdot 81^{x}-3^{\frac{1-2x}{2}}=26\cdot 3^{\frac{3x-2}{2}}$.

50. $\sqrt{2^{x}-7}=9-2^{x}$.

Ответы: **1.** 0. **2.** 8. **3.** 4. **4.** 3,5. **5.** 2. **6.** -3. 7. **3.** 8. $-\frac{5}{4}$. **9.** 3. **10.** -4. **11.** 3. **12.** $-\frac{1}{2}$. **13.** -4. **14.** 2. **15.** 0. **16.** 3. **17.** -2. **18.** -1. **19.** 5. **20.** 2. **21.** 1. **22.** -2. **23.** -2. **24.** 3. **25.** 1. **26.** -1. **27.** 2. **28.** -2. **29.** -3. **30.** 4. **31.** -1;1. **32.** 1;2. **33.** 0;1. **34.** 1. **35.** 2. **36.** 1. **37.** -1. **38.** 3. **39.** 1,5. **40.** 6. **41.** $\frac{1}{2}$. **42.** $2-2\log_2 3$. **43.** $\log_2 3$.

44. -1. **45.** $-\frac{3}{2}$. **46.** $\frac{3}{2}$. **47.** 3; $-\log_5 2$. **48.** 8. **49.** $\frac{3}{5}$.
50. 3.

Показательные неравенства

Решите неравенства (1 – 55):

1. $3^{x^2} > 9^8$.
2. $\left(\frac{1}{5}\right)^{x-1} + \left(\frac{1}{5}\right)^{x+1} \le 26$.
3. $3^{x^2-4} \le 243$.
4. $\left(\frac{1}{5}\right)^{x-1} + \left(\frac{1}{5}\right)^{x+1} \ge 26$.
5. $(1{,}3)^{x^2-4x+2} \le 1{,}69$.
6. $2 \cdot 3^x + 3^{x-2} \le 57$.
7. $2^{x^2-1} \ge 8$.
8. $2^x + 3 \cdot 2^{x-3} \le 22$.
9. $(0{,}3)^{x^{2-2x+2}} \le 0{,}09$.
10. $2 \cdot 3^x + 3^{x-2} \ge 57$.
11. $3^{x^2-4} \ge 243$.
12. $2^x + 3 \cdot 2^{x-3} \ge 22$.
13. $3^x\left(3^x + 3^{1-x} - 4\right) < 0$.
14. $0{,}1^{x+1}\left(0{,}1^x + 0{,}1^{-x-1} - 11\right) < 0$.
15. $0{,}2^x\left(5^{-x} + 5^{x+1} - 6\right) < 0$.
16. $5^x\left(5^x + 5^{4-x} - 130\right) < 0$.
17. $7^{2x}\left(7^{x+1} + 7^{-x} - 8\right) \le 0$.
18. $2^x\left(2^x + 2^{5-x} - 12\right) \le 0$.
19. $2^{2x-1} - 3 \cdot 2^{x-1} + 1 < 0$.
20. $25^x < 6 \cdot 5^x - 5$.
21. $7^x - 8 \cdot 7^{\frac{x}{2}} + 7 < 0$.
22. $3^{2x+1} + 1 < 4 \cdot 3^x$.
23. $2^{2x+2} + 2 < 9 \cdot 2^x$.
24. $2^{2x+3} + 2 < 2^{x+4} + 2^x$.
25. $3^x - 3^{\frac{1}{2}-x} > \sqrt{3} - 1$.
26. $\left(\frac{1}{2}\right)^x < 9^{x+2}$.
27. $3^x - 3^{\frac{1}{2}-x} < \sqrt{3} - 1$.
28. $\left(\frac{3}{4}\right)^{-x^2+6x+10} < \frac{27}{64}$.
29. $\left(\frac{1}{3}\right)^{x^2+2x} > \left(\frac{1}{9}\right)^{16-x}$.
30. $\left(\frac{1}{2}\right)^{2x-1} < \left(\frac{1}{2}\right)^{x^2-2x-1}$.
31. $\frac{6^{\sqrt{x}}}{x+1} > 6^{\sqrt{x}-1}$.
32. $\frac{2^{\sqrt{x-1}}}{4x} > 2^{\sqrt{x-1}-3}$.

33. $\dfrac{3^{\sqrt{x-3}}}{3x+3} > 3^{\sqrt{x-3}-3}$.   34. $\dfrac{5^{\sqrt{x-1}}}{5x} > 5^{\sqrt{x-1}-2}$.

35. $\dfrac{4^{\sqrt{x-2}+1}}{16x} > 4^{\sqrt{x-2}-2}$.3   6. $3^{\sqrt{x}} - 2 < 3^{1-\sqrt{x}}$.

37. $3^{\sqrt{x-1}+1} - 8 < 3^{1-\sqrt{x-1}}$.   38. $(x-2)^{x^2-4} < 1$.

39. $\left(x^2+x+1\right)^{x^2-\frac{x}{2}} < 1$.   40. $(x-3)^{x^2-9} < 1$.

41. $\left(\sqrt{2}+1\right)^{\frac{6x-6}{x+1}} \le \left(\sqrt{2}-1\right)^{-x}$.   42. $2^{x-1} > \left(\dfrac{1}{16}\right)^{\frac{1}{x}}$.

43. $\left(\dfrac{1}{7}\right)^{-9x^2-8x+3} < 7^{-7x^2}$.   44. $2^{\sqrt{x^2-3x+3}} > 2^{\sqrt{x}}$.

45. $\left(\sqrt{5}+2\right)^{x-1} \ge \left(\sqrt{5}-2\right)^{\frac{x-1}{x+1}}$.   46. $7^x - 2^{x+2} < 5\cdot 7^{x-1} - 2^{x-1}$.

47. $3^{72}\cdot\left(\dfrac{1}{3}\right)^{x}\cdot\left(\dfrac{1}{3}\right)^{\sqrt{x}} > 1$.   48. $2^{x+3} - x^3\cdot 2^x \le 16 - 2x^3$.

49. $4\cdot 4^x < 7\cdot 2^x + 2$.   50. $\dfrac{11\cdot 3^{x-1} - 31}{4\cdot 9^x - 11\cdot 3^{x-1} - 5} \ge 5$.

51. $9^{\sqrt{x^2-3}} + 3 < 3^{\sqrt{x^2-3}-1}\cdot 28$.   52. $5^{2x-\frac{1}{3}x^2} < 5^{2-2x}\left(\sqrt[3]{5}\right)^{x^2} + 24$.

53. $x^4 + 3^{x+4} \ge x^4\cdot 3^x + 81$.   54. $\dfrac{x^2-x}{2^{\sqrt{x}}} < 0{,}5^{\sqrt{x}-1}$.

55. $7^{x-\frac{1}{8}x^2} < 7^{1-x}\left(\sqrt[8]{7}\right)^{x^2} + 6$.

Ответы: **1.** $(-\infty;-4)\cup(4;\infty)$. **2.** $[-1;\infty)$. **3.** $[-3;3]$. **4.** $(-\infty;-1]$. **5.** $[0;4]$. **6.** $(-\infty;3]$. **7.** $(-\infty;-2]\cup[2;\infty)$. **8.** $(-\infty;4]$. **9.** $(-\infty;0]\cup[2;\infty)$. **10.** $[3;\infty)$. **11.** $(-\infty;-3]\cup[3;\infty)$. **12.** $[4;\infty)$. **13.** $(0;1)$. **14.** $(-1;0)$. **15.** $(-1;0)$. **16.** $(1;3)$. **17.** $[-1;0]$. **18.** $[2;3]$. **19.** $(0;1)$. **20.** $(0;1)$. **21.** $(0;2)$.

22. $(-1;0)$. **23.** $(-2;1)$. **24.** $(-3;1)$. **25.** $\left(\frac{1}{2};\infty\right)$. **26.** $(-2;\infty)$.

27. $\left(-\infty;\frac{1}{2}\right)$. **28.** $(-1;7)$. **29.** $(-8;4)$. **30.** $(0;4)$. **31.** $[0;5)$.

32. $[1;2)$. **33.** $[3;8)$. **34.** $[1;5)$. **35.** $[2;4)$. **36.** $[0;1)$. **37.** $[1;2)$.

38. $(2;3)$. **39.** $(-1;0)\cup\left(0;\frac{1}{2}\right)$. **40.** $(3;4)$. **41.** $(-1;2]\cup[3;\infty)$.

42. $(0;\infty)$. **43.** $\left(-\frac{3}{4};\frac{1}{4}\right)$. **44.** $[0;1)\cup(3;\infty)$. **45.** $[-2;-1)\cup[1;\infty)$.

46. $(-\infty;2)$. **47.** $[0;64)$. **48.** $(-\infty;1]\cup[2;\infty)$. **49.** $(-\infty;1)$.

50. $(-\infty;-\log_3 2]\cup[1-\log_3 5;\log_3 5-1)$. **51.** $(-\sqrt{7};-\sqrt{3}]\cup[\sqrt{3};\sqrt{7})$.

52. $(-\infty;3-\sqrt{3})\cup(3+\sqrt{3};\infty)$. **53.** $(-\infty;-3]\cup[0;3]$.

54. $[0;2)$. **55.** $(-\infty;4-2\sqrt{2})U(4+2\sqrt{2};+\infty)$.

Определение и свойства логарифмов

Вычислить (1 - 63):

1. $\log_{\sqrt{3}} 18-\log_3 4$.
2. $9^{\log_3 4-0,5}$.
3. $\lg\left(25^{\log_5 0,8}+9^{\log_3 0,6}\right)$.
4. $\log_4\log_9 81+\log_3\sqrt{3}$.
5. $\log_2\log_3\log_4 4^9+\log_{\sqrt{3}} 3$.
6. $\lg\left(36^{\log_6 0,8}+4^{\log_2 0,6}\right)$.
7. $\log_{\sqrt{3}} 63-\log_3 49$.
8. $9^{\log_3 2+0,5}$.
9. $\log_{\sqrt{5}} 35-\log_5 49$.
10. $2^{\log_4 36+1}$.
11. $2^{\log_3 9+2\log_4 5}$.
12. $16^{0,25\log_5 5+\log_2 3}$.
13. $\dfrac{7^{1-\log_2 2}}{7^{-\log_{\sqrt{7}} 5}}$.
14. $\dfrac{2^{\log_2 3}}{3^{1+\log_{\sqrt{3}}\sqrt{5}}}$.
15. $3^{\log_2 2+2\log_9 11}$.
16. $\dfrac{5^{-\log_{\sqrt{5}}\sqrt{7}}}{9^{1+\log_{0,5} 2}}$.

17. $\dfrac{12^{\log_{\frac{1}{12}} 15}}{5^{-\log_3 \frac{1}{3}}}$.

18. $2^{1-\log_4 9} + 3^{\log_{\frac{1}{5}} 5}$.

19. $\left(\sqrt{2}\right)^{3\log_2 7+\log_3 9}$.

20. $\left(\sqrt{3}\right)^{2\log_3 15+\log_5 25}$.

21. $\log_{\sqrt{3}} 21 - \log_3 49$.

22. $\log_5\left(49^{\log_7 2} + (0{,}234)^0\right)$.

23. $3^{\log_{27} 125}$.

24. $4^{\log_2 \sqrt{7}}$.

25. $7^{\log_{\sqrt{7}} 4}$.

26. $2^{\log_{\sqrt{2}} 5}$.

27. $3^{\log_{3\sqrt{3}} 8}$.

28. $6^{\log_{\sqrt[3]{6}} 2}$.

29. $9^{-\log_{1/2} 3\cdot\log_{1/3} 4+2{,}5}$.

30. $\dfrac{3}{7}\left(\log_2 16 + 27^{\log_3 2}\right)^{\log_{12} 49}$.

31. $0{,}8\left(1+9^{\log_3 8}\right)^{\log_{65} 5}$.

32. $\log_2\left(\log_{\sqrt{2}} 9\cdot\log_{\sqrt{3}} 2\right)$.

33. $10^{2-\lg 2} - 25^{\log_5 4}$.

34. $32^{\log_4 3-0{,}1\log_2 3}$.

35. $\sqrt{10^{2+\frac{1}{2}\lg 16}}$.

36. $10\cdot 100^{\frac{1}{2}\lg 9-\lg 2}$.

37. $100^{\frac{1}{2}-\lg\sqrt[4]{4}}$.

38. $\log_3 64\cdot\log_2 \dfrac{1}{27}$.

39. $81^{-\log_{\frac{1}{2}} 3\cdot\log_{\frac{1}{3}} 4+2{,}5}$.

40. $8^{\log_4 3-\frac{1}{6}\log_2 3}$.

41. $\dfrac{\log_2^2 10 + \log_2 10\cdot\log_2 5 - 2\log_2^2 5}{\log_2 10 + 2\log_2 5}$.

42. $\dfrac{2\log_2^2 3 - \log_2^2 12 - \log_2 3\cdot\log_2 12}{2\log_2 3 + \log_2 12}$.

43. $\left(3^{1+\frac{1}{2\log_4 3}} + 8^{\frac{1}{3\log_9 2}} + 1\right)^{\frac{1}{2}}$.

44. $9^{\log_{\sqrt{3}} \sqrt[4]{3}} + 3\cdot 2^{\log_2^2 3} - 3^{\log_2 3}\cdot\log_2 8$.

45. $10^{\frac{2}{\log_2 10}}\cdot 2^{\log_2^2 6} - 4\cdot 6^{\log_2 6} + \left(\sqrt{2}\right)^{\log_2 16}$.

46. $\left(\log_2 3 + \log_3 16 + 4\right)\left(\log_2 3 - 2\log_{12} 3\right)\cdot\log_3 2 - \log_2 3$.

47. $\left(\log_2 5+\log_5 2+2\right)\left(\log_2 5-\lg 5\right)\cdot\log_5 2-\log_2 5$.

48. $\left(\log_3 4+9\log_4 3+6\right)\left(\log_3 4-3\log_{108} 4\right)\cdot\log_4 3-\log_3 4$.

49. $\left(\log_2 9+\log_9 2+2\right)\left(\log_2 9-\log_{18} 9\right)\cdot\log_9 2-\log_2 9$.

50. $\left(\log_3 6+\log_6 81+4\right)\left(\log_3 6-\log_{54} 36\right)\cdot\log_6 3-\log_3 6$.

51. $\log_{\sqrt{pq}}\dfrac{q}{\sqrt{p}}$, если $\log_p q=\sqrt{5}$.

52. $\log_b\left(a^2b\right)$, если $\log_a b=7$.

53. $\log_{\sqrt{\frac{a}{b}}}\dfrac{\sqrt[3]{a}}{\sqrt{b}}$, если $\log_b a=\sqrt{3}$.

54. $\log_x(x^4-8x+2)$, если $x^9-2x^5+4x-1=0$.

55. $\log_x(x^4+27x-3)$, если $x^9+3x^5+9x-1=0$.

56. $\log_x(x^4+x-1)$, если $x^9+x^5+x-1=0$.

57. $\log_x(x^3-8x^2+2)$, если $x^8-2x^5+4x^2-1=0$.

58. $\log_x(x^3+8x^2-2)$, если $x^8+2x^5+4x^2-1=0$.

59. $\log_x(x^3-8x+2)$, если $x^7-2x^4+4x-1=0$.

60. $\log_x(x^3-27x+3)$, если $x^7-3x^4+9x-1=0$.

61. $\log_x(x^2+x+1)$, если $x^7-x^5+x^3-x-1=0$.

62. $\log_x(x^2-8x+2)$, если $x^5-2x^3+4x-1=0$.

63. $\log_x(x^2+x-1)$, если $x^7+x^5+x^3+x-1=0$.

Ответы: **1.** 4. **2.** $\dfrac{16}{3}$**.** **3.** 0. **4.** **1.** **5.** 3. **6.** 0. **7.** 4. **8.** 12. **9.** 2. **10.** 12. **11.** 20. **12.** 162. **13.** 25. **14.** $\dfrac{1}{5}$**.** **15.** 33. **16.** $\dfrac{1}{7}$**.** **17.** $\dfrac{1}{75}$**.** **18.** 1. **19.** $14\sqrt{7}$**.** **20.** 45. **21.** 2. **22.** 1. **23.** 5. **24.** 7. **25.** 16. **26.** 25. **27.** 4. **28.** 8. **29.** 3. **30.** 21. **31.** 4. **32.** 3. **33.** 34. **34.** 9. **35.** 20. **36.** 22,5. **37.** 5. **38.** -18. **39.** 9. **40.** 3. **41.** 1. **42.** -2. **43.** 4. **44.** 3. **45.** 4.

46. 2. **47.** 1. **48.** 3. **49.** 1. **50.** 2. **51.** $\dfrac{2\sqrt{5}-1}{\sqrt{5}+1}$. **52.** $\dfrac{9}{7}$.

53. $\dfrac{3-\sqrt{3}}{6}$. **54.** 13. **55.** 13. **56.** 13. **57.** 11. **58.** 11. **59.** 10.

60. 10. **61.** 9. **62.** 7. **63.** 9.

Логарифмические уравнения

Решить уравнения (1 – 55):

1. $\log_{\sqrt{2}}\left(x^2-3x\right)=4$.

2. $3\log^2_{\frac{1}{2}} x+2\log_2 x=5$.

3. $\log_{\frac{1}{2}} x+2\log_2 x=1$.

4. $\log_x\left(2x+3\right)=2$.

5. $\log_2\left(2x-3\right)=\log_{\frac{1}{2}}(3x-5)^{-1}$.

6. $\log_{\frac{1}{2}}\dfrac{1}{2x-3}=\log_2(3x-5)$.

7. $\log_{\frac{1}{3}}\left(x^2+8x\right)=-2$.

8. $\lg^2 x+\lg x=0$.

9. $\lg^2 x-\lg x=0$.

10. $\log_x(x+2)=2$.

11. $\log_{\frac{1}{4}}\left(x^2+6x\right)=-2$.

12. $\log_{0,2}\left(x^2+4x\right)=-1$.

13. $\log_{\frac{1}{2}}\left(3-\log_3(x-2)\right)=0$.

14. $\log_2\left(\log_{\frac{1}{2}}(2x-1)+\log_2 4\right)=1$.

15. $\log_{32}\left(\log_{\sqrt{3}} 9-\log_2(x+4)\right)=0$.

16. $\log_{\frac{1}{3}}\left(1+\log_2(x-5)\right)=-1$.

17. $\log_{\frac{1}{25}}\left(1{,}5-\log_4(x-4)\right)=0$.

18. $\log_{\frac{1}{4}}\left(\log_{\frac{1}{2}} 2+\log_2(1-x)\right)=-1.$

19. $\log_{x+1}\left(3x^2+2x-1\right)=2.$

20. $\log_{x-2}\left(2x^2-13x+18\right)=1.$

21. $\log_{\sqrt{x+5}}\left(3x^2+16x+5\right)=4.$

22. $\log_{\sqrt{x-4}}\left(3x^2-28x+64\right)=4.$

23. $\log_{\sqrt{1-x}}\left(2x^2-3x-1\right)=4.$

24. $\log_{\sqrt[3]{x}}\left(3x^2-6x\right)=6.$

25. $\left(\log_3 x\right)^2+4\log_{\frac{1}{3}} x+3=0.$

26. $\log_x\sqrt{3}-\log_{x^2} 27=\frac{1}{2}.$

27. $\log_5(x-8)^2=2+2\log_5(x-2).$

28. $\frac{\lg x}{2\lg x+1}+\frac{2\lg x+1}{\lg x}=2.$

29. $\lg x-2\lg 100+4(\lg x)^{-1}=0.$

30. $3\lg x^2-\lg^2 x=9.$

31. $1+\log_2 32+\log_{0,5} x-9\log_x 2=0.$

32. $\log_3 x+16\log_x 3=5-\lg 0{,}001.$

33. $\log_4(x+1)+8\log_{x+1} 2-\log_2 8=\frac{1}{2}\log_{\sqrt{3}} 3.$

34. $4\log_{25}(x-1)-\log_3 27+2\log_{x-1} 5=1.$

35. $2\log_{\sqrt{3}} 3-\log_5 x-4\log_x 5=0.$ 36. $2^{\log_3 x^2}\cdot 5^{\log_3 x}=400.$

37. $\frac{1}{4}\log_5^2(2x+3)^2+8\log_5^2\sqrt{x}=\log_5(2x+3)^3\cdot\log_5 x.$

38. $2\lg 2+\lg\left(5^{\sqrt{x}}+1\right)=2+\lg\left(5^{1-\sqrt{x}}+5\right).$

39. $11 \cdot 4^{\log_4^2 (x-1)} - 3(x-1)^{\log_4 (x-1)^2} = -4$.

40. $x^{\frac{\log_5 \log_5 x}{\log_5 x}} = \log_5 14$.

41. $4^{\log_3 x} - 5 \cdot 2^{\log_3 x} + 2^{\log_3 9} = 0$.

42. $\log_2\left(2^x - 7\right) = 3 - x$.

43. $\dfrac{6\log_{32}^2 x - 11\log_{32} x - 2}{\log_{32} x - 2} = 2 + \log_{32} x$.

44. $x^2 \log_6 \sqrt{5x^2 - 2x - 3} - x \log_{\frac{1}{6}}\left(5x^2 - 2x - 3\right) = x^2 + 2x$.

45. $\dfrac{1}{3}\log_2 (3x-4)^6 \cdot \log_2 x^3 = 8\log_2^2 \sqrt{x} + \log_2^2 (3x-4)^2$.

46. $\log_3 \dfrac{3}{x} \log_2 x - \log_3 \dfrac{x^2}{\sqrt{3}} = \dfrac{1}{2} + \log_3 \sqrt{x}$.

47. $\log_{x-1} 3 = 2$.

48. $\dfrac{1}{\sqrt{3x-5}} - (3x-5)^{\log_{\frac{1}{25}}\left(2+5x-x^2\right)} = 0$.

49. $\left(\sqrt{2}\right)^{\frac{\log_{\frac{1}{5}} \log_6 x}{\log_5 2}} = \sqrt{\log_6 x}$.

50. $\log_5 \dfrac{x^3}{\sqrt{5}} = \dfrac{1}{2} + \dfrac{\log_5 x}{\log_3 \dfrac{1}{\sqrt{x}}}$.

51. $\log_{x+1} 2 = 2$.

52. $\log_3(2x+1) = 2\log_{2x+1} 3 + 1$.

53. $\log_x\left(2x^2 - 3x - 4\right) = 2$.

54. $\log_{1-2x^2} x = \dfrac{1}{4} - \dfrac{3}{\log_2\left(1-2x^2\right)^4}$.

55. $25^{\log_3 x} - 4 \cdot x^{\log_3 5} - 5 = 0$.

Ответы: **1.** -1; 4. **2.** 2; $\frac{1}{2\sqrt[3]{4}}$**.** **3.** 2. **4.** 3. **5.** 2. **6.** 2. **7.** -9.
8. $\frac{1}{10}$**;** 1. **9.** 1; 10. **10.** 2. **11.** -8; 2. **12.** -5; 1. **13.** 11. **14.** 1.
15. 4. **16.** 9. **17.** 6. **18.** -31. **19.** 1. **20.** 5. **21.** 2. **22.** 6.
23. -1. **24.** 3. **25.** 3; 27. **26.** $\frac{1}{9}$**.** **27.** 3. **28.** 0,1. **29.** 100.
30. 1000. **31.** 8. **32.** 81. **33.** 15. **34.** 6. **35.** 25. **36.** 9. **37.** 3.
38. 9. **39.** $\frac{5}{4}$; 5. **40.** 14. **41.** 1; 9. **42.** 3. **43.** 2.
44. $-\frac{13}{5}$; -2; 3. **45.** 1; 2 ; $\frac{16}{9}$. **46.** 1; $\frac{3\sqrt{2}}{8}$. **47.** $1+\sqrt{3}$**.**
48. 2; $\frac{5+\sqrt{13}}{2}$**.** **49.** 6. **50.** $\sqrt[3]{\frac{5}{9}}$**.** **51.** $\sqrt{2}-1$**.** **52.** $-\frac{1}{3}$; 4.
53. 4. **54.** $\frac{1}{2}$**.** **55.** 3.

Логарифмические неравенства

Решите неравенства (1 – 55):

1. $\log_{0,3}(x-1) > -2$.
2. $\log_2(x-1) < 2$.
3. $\log_2(1-x) < 1$.
4. $\log_{0,5}(2-x) > -1$.
5. $\log_{0,2}(-x) > -1$.
6. $\log_{0,2}(2-x) > -1$.
7. $\log_2(2x-1) > \log_2(3x-4)$.
8. $\log_4(x+1) < 1$.
9. $\log_{0,5}(1-x) > -1$.
10. $\lg(3x) < \lg(x+4)$.
11. $\lg^2 x - \lg x > 0$.
12. $\lg^2 x - \lg x < 0$.
13. $\log_{\frac{1}{5}}(x-5) > -2$.
14. $\log_{\frac{1}{9}}(x+3) > -\frac{1}{2}$.
15. $\log_{\frac{1}{3}}(x-5) > -3$.
16. $\log_{\frac{1}{2}}(x+3) > -2$.
17. $\log_{\frac{1}{3}}(x-2) > -1$.
18. $\log_{\frac{1}{2}}(x-5) > -2$.

19. $\log_{\frac{1}{\sqrt{2}}}(x-1)+\log_2(x-1)>-2$.

20. $\log_{\frac{1}{2}}(x+1)+2\log_2(x+1)<2$.

21. $\lg(x+2)+\log_{\frac{1}{\sqrt{10}}}(x+2)>-1$.

22. $3\log_3 x+\log_{\frac{1}{\sqrt{3}}} x<1$.

23. $\log_4(x-3)+\log_2(x-3)<\dfrac{3}{2}$.

24. $\log_{\sqrt{2}}(x-1)+\log_4(x-1)<\dfrac{5}{2}$.

25. $\log_{4x^2+1} 65>1$.

26. $\lg(x+4)>-2\lg\dfrac{1}{2-x}$.

27. $\dfrac{1}{4}\log_2(x-2)-\dfrac{1}{2}\le\log_{\frac{1}{4}}\sqrt{x-5}$.

28. $9^{\log_9(x-4)}<3$.

29. $5^{\log_5(x-7)}<4$.

30. $2^{\log_2(x+7)}<3$.

31. $\log_{\frac{1}{3}}\log_3(x-1)>0$.

32. $\log_{\frac{1}{4}}\log_2(x-5)>0$.

33. $\log_2\log_{\sqrt{2}}(x+1)<1$.

34. $\log_{\frac{1}{27}}\log_8(x+3)>0$.

35. $\log_3\log_{\sqrt[3]{3}}(x-4)<1$.

36. $\log_{\log_3 2}(2x-3)>0$.

37. $\log_{x-2}(x+2)<1$.

38. $0{,}1^{\lg\log_2\frac{2}{x}}>1$.

39. $5\cdot 0{,}2^{\lg x}>0{,}2^{2\lg 2}$.

40. $x\cdot\log_2 x-\dfrac{4}{\log_x 2}<0$.

41. $\log_{\frac{1}{2}}\dfrac{3x+1}{x+1}\ge-1$.

42. $\log_3\log_{\frac{9}{16}}\left(x^2-4x+3\right)\le 0$.

43. $5^{\log_2\frac{2}{x+2}}<1$.

44. $\log_{0,5} 2^{\frac{1}{x+1}}>0$.

45. $\log_{\frac{1}{2}}\dfrac{6x+1}{5x^2+2}\le 0$.

46. $\log_{12}\left(6x^2-48x-54\right)\le 2$.

47. $\log_{\frac{1}{4}}\dfrac{x-3}{x+3}\ge-\dfrac{1}{2}$.

48. $\log_{\frac{8}{3}}\log_{\frac{1}{2}}\left(x^2-x-6\right)\ge 0$.

49. $\log_3\left(x^2-2\right)<\log_3\left(\dfrac{3}{2}|x|-1\right)$.

50. $\log_3\left|1-\dfrac{1}{x-1}\right|<1$.

51. $\log_{\frac{1}{2}}\left(1+x-\sqrt{x^2-4}\right)\le 0$.

52. $\log_{\frac{1}{3}}\left(x+\sqrt{x-1}\right)>-1$.

53. $2\log_{25}\left((1+x)(3-x)\right)-\frac{1}{2}\log_{\sqrt{5}}(1+x)>\log_{\frac{1}{5}}\frac{1}{2}$.

54. $\log_{\frac{1}{\sqrt{5}}}\left(6^{x+1}-36^{x}\right)\ge -2$.

55. $\log_{x+1}\left(x^2+x-6\right)^2\ge 4$.

56. $\log_{\frac{1}{x-1}}0{,}4>0$.

57. $\log_7 x-\log_x\frac{1}{7}\ge 2$.

58. $\log_{3x-1}2x>1$.

59. $\log_x\frac{4x+1}{6(x-1)}<0$.

60. $\log_{9x^2}\left(6+2x-x^2\right)\le\frac{1}{2}$.

61. $\left(2^x+3\cdot 2^{-x}\right)^{2\log_2 x-\log_2(x+6)}>1$.

62. $\left(\frac{x}{10}\right)^{\lg x-2}<100$.

63. $\sqrt{x^{\log_2\sqrt{x}}}\le 2$.

64. $\left(x^2+x+1\right)^x<1$.

65. $x^{\log_x(x+3)^2}\le 16$.

Ответы: **1.** (1; 5). **2.** (1; 5). **3.** (-1; 1). **4.** (0; 2).
5. (-5; 0). **6.** (-3; 2). **7.** $\left(\frac{4}{3};3\right)$. **8.** (-1; 3). **9.** (-1; 1).
10. (0; 2). **11.** $(0;1)\cup(10;+\infty)$. **12.** (1; 10). **13.** (5; 30).
14. (-3; 0). **15.** (5; 32). **16.** (-3; 1). **17.** (2; 5). **18.** (5; 9).
19. (1; 5). **20.** (-1; 3). **21.** (-2; 8). **22.** (0; 3). **23.** (3; 5).
24. (1; 3). **25.** (-4; 0)$\cup$ (0; 4). **26.** (0; 2). **27.** (5; 6].
28. (4; 7). **29.** (7; 11). **30.** (-7; -4). **31.** (2; 4). **32.** (6; 7).
33. (0; 1). **34.** (-2; 5). **35.** (5; 7). **36.** (1,5; 2). **37.** (2; 3).
38. (1; 2). **39.** (0; 40). **40.** (1; 4). **41.** $\left(-\frac{1}{3};1\right]$.
42. $\left(2-\sqrt{2};\frac{3}{4}\right]\cup\left[\frac{13}{4};2+\sqrt{2}\right)$. **43.** $(0;\infty)$. **44.** $(-\infty;-1)$.
45. $\left[\frac{1}{5};1\right]$. **46.** $[-3;-1)\cup(9;11]$. **47.** $(-\infty;-9]\cup(3;\infty)$.

48. $\left[\frac{1-3\sqrt{3}}{2};-2\right)\cup\left(3;\frac{1+3\sqrt{3}}{2}\right]$. **49.** $\left(-2;-\sqrt{2}\right)\cup\left(\sqrt{2};2\right)$.

50. $\left(-\infty;\frac{1}{2}\right)\cup\left(\frac{5}{4};2\right)\cup(2;\infty)$. **51.** $[2;\infty)$. **52.** $[1;2)$.

53. (-1; 1). **54.** $(-\infty;0]\cup[\log_6 5;1)$. **55.** (0; 1].

56. $(2;\infty)$. **57.** $(1;\infty)$. **58.** $\left(\frac{2}{3};1\right)$. **59.** $\left(\frac{7}{2};\infty\right)$.

60. $\left(1-\sqrt{7};-1\right]\cup\left(-\frac{1}{3};0\right)\cup\left(0;\frac{1}{3}\right)\cup\left[2;1+\sqrt{7}\right)$. **61.** $(3;\infty)$.

62. (1; 1000). **63.** $\left[\frac{1}{4};4\right]$. **64.** $(-\infty;-1)$. **65.** (0; 1).

Определение и свойства тригонометрических функций

Вычислите (1 - 50):

1. $\sin\alpha$ и $\operatorname{tg}\alpha$, если $\cos\alpha=-\frac{24}{25}$ и $0<\alpha<\pi$.
2. $\cos\alpha$ и $\operatorname{tg}\alpha$, если $\sin\alpha=-\frac{4}{5}$ и $\frac{\pi}{2}<\alpha<\frac{3\pi}{2}$.
3. $\sin\alpha$ и $\operatorname{tg}\alpha$, если $\cos\alpha=\frac{24}{25}$ и $0<\alpha<\pi$.
4. $\cos\alpha$ и $\operatorname{tg}\alpha$, если $\sin\alpha=-\frac{24}{25}$ и $\frac{\pi}{2}<\alpha<\frac{3\pi}{2}$.
5. $\sin\alpha$ и $\operatorname{tg}\alpha$, если $\cos\alpha=\frac{24}{25}$ и $\pi<\alpha<2\pi$.
6. $\cos\alpha$ и $\operatorname{tg}\alpha$, если $\sin\alpha=-\frac{24}{25}$ и $0<\alpha<\frac{3\pi}{2}$.
7. $\cos\alpha$ и $\operatorname{tg}\alpha$, если $\sin\alpha=0{,}6$ и $\frac{\pi}{2}<\alpha<\frac{3\pi}{2}$.
8. $\sin\alpha$ и $\operatorname{tg}\alpha$, если $\cos\alpha=-0{,}6$ и $\pi<\alpha<2\pi$.
9. $\sin\alpha$ и $\operatorname{tg}\alpha$, если $\cos\alpha=0{,}6$ и $0<\alpha<\pi$.

10. $\sin\alpha$ и $\text{tg}\,\alpha$, если $\cos\alpha = -\frac{7}{25}$ и $0 < \alpha < \pi$.

11. $\sin\alpha$ и $\text{tg}\,\alpha$, если $\cos\alpha = \frac{3}{5}$ и $\pi < \alpha < 2\pi$.

12. $\sin\alpha$ и $\text{tg}\,\alpha$, если $\cos\alpha = -\frac{4}{5}$ и $0 < \alpha < \pi$.

13. $\sin\alpha$ и $\text{tg}\,\alpha$, если $\cos\alpha = -\frac{24}{25}$ и $\pi < \alpha < 2\pi$.

14. $\sin\alpha$ и $\text{tg}\,\alpha$, если $\cos\alpha = -\frac{12}{13}$ и $0 < \alpha < \pi$.

15. $\sin\alpha$ и $\text{tg}\,\alpha$, если $\cos\alpha = -\frac{8}{17}$ и $0 < \alpha < \pi$.

16. $\cos\alpha$ и $\text{tg}\,\alpha$, если $\sin\alpha = -\frac{24}{25}$ и $-\frac{\pi}{2} < \alpha < \frac{\pi}{2}$.

17. $\cos\alpha$ и $\text{tg}\,\alpha$, если $\sin\alpha = -\frac{5}{13}$ и $-\frac{\pi}{2} < \alpha < \frac{\pi}{2}$.

18. $\cos\alpha$ и $\text{tg}\,\alpha$, если $\sin\alpha = -\frac{8}{17}$ и $-\frac{\pi}{2} < \alpha < \frac{\pi}{2}$.

19. $\cos 2\alpha$, если $\text{tg}\,\alpha = \frac{1}{5}$. 20. $3\,\text{tg}\,2\alpha$, если $\text{tg}\,\alpha = 0{,}5$.

21. $\cos\alpha$, если $\text{tg}\frac{\alpha}{2} = \frac{1}{2}$.

22. $\cos^6\alpha - \sin^6\alpha$, если $\cos 2\alpha = 0{,}4$.

23. $\sin^4\alpha + \cos^4\alpha$, если $\sin\alpha + \cos\alpha = \frac{\sqrt{2}}{2}$.

24. $\sqrt{2}\cdot\sin 22{,}5^0\cdot\cos 22{,}5^0$. 25. $\text{tg}\,44^0\cdot\text{tg}\,45^0\cdot\text{tg}\,46^0$.

26. если $\text{tg}\,\alpha = 2\sqrt{3}$.

27. $\cos\left(\frac{\pi}{3} + 2\alpha\right)$, если $\text{tg}\,\alpha = \frac{\sqrt{3}}{2}$.

28. $\text{tg}\left(\frac{\pi}{4} + 2\alpha\right)$, если $\text{tg}\,\alpha = 2$.

29. $\sin\left(\frac{7\pi}{6}-2\alpha\right)$, если $\operatorname{tg}\alpha=\frac{3\sqrt{3}}{2}$.

30. $\frac{2\sin\alpha-\cos\alpha}{3\cos\alpha+\sin\alpha}$, если $\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2}=2$.

31. $\frac{\sin\alpha+2\cos\alpha}{\sin\alpha+4\cos\alpha}$, если $\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2}=\frac{1}{2}$.

32 $\operatorname{tg}^2 2\alpha$, если $\sin\alpha=-\frac{2}{\sqrt{11}}$.

33. $\sin\alpha\cdot\cos\alpha$, если $\sin\alpha+\cos\alpha=\frac{1}{3}$.

34. $\sin\alpha\cdot\cos\alpha$, если $\sin\alpha+\cos\alpha=\frac{1}{2}$.

35. $\cos\alpha+\cos\beta$, если $\alpha+\beta=4\pi$; $\alpha-\beta=\frac{\pi}{2}$.

36. $\frac{\sin\alpha+\sin\beta}{\sin\alpha-\sin\beta}$, если $\alpha+\beta=\frac{2\pi}{3}$; $\alpha-\beta=\frac{\pi}{3}$.

37. $\frac{\sin\alpha-\sin\beta}{\cos\alpha+\cos\beta}$, если $\alpha+\beta=\frac{3\pi}{2}$; $\alpha-\beta=\frac{\pi}{2}$.

38. $\cos(\alpha+\beta)$, если $\sin\alpha\cdot\sin\beta=\frac{1}{2}$; $\alpha-\beta=\frac{\pi}{2}$.

39. если $\sin\alpha\cdot\sin\beta=\frac{1}{2}$; $\alpha+\beta=\frac{3\pi}{2}$.

40. $\sqrt{2}\cos(\alpha-\beta)$, если $\cos\alpha\cdot\cos\beta=\frac{1}{2}$; $\alpha+\beta=\frac{5\pi}{2}$.

41. $3\cos(\alpha+\beta)$, если $\cos\alpha\cdot\cos\beta=-\frac{1}{2}$; $\alpha-\beta=\frac{7\pi}{2}$.

42. $4\cdot\sin(\alpha-\beta)$, если $\sin\alpha\cdot\cos\beta=\frac{1}{4}$; $\alpha+\beta=-\frac{\pi}{6}$.

43. $\sqrt{2}\left(\frac{1}{\sin^3\alpha}+\frac{1}{\cos^3\alpha}\right)$, если $\sin\alpha+\cos\alpha=\frac{1}{\sqrt{2}}$.

44. $\sqrt{2}\left(\frac{1}{\sin^3\alpha}-\frac{1}{\cos^3\alpha}\right)$, если $\sin\alpha-\cos\alpha=-\frac{1}{\sqrt{2}}$.

45. $\dfrac{\sin^4\alpha}{\cos^2\alpha}+\dfrac{\cos^4\alpha}{\sin^2\alpha}$, если $\sin\alpha+\cos\alpha=\dfrac{2}{\sqrt{5}}$.

46. $\operatorname{tg}\alpha$, если $2\operatorname{tg}\alpha-\sin\alpha+5\cos\alpha=10$.

47. $\operatorname{ctg}\alpha$, если $3\operatorname{ctg}\alpha+4\sin\alpha-\cos\alpha=12$.

48. $\sin 70^0\cdot\sin 50^0\cdot\sin 10^0$. 49. $\cos 10^0\cdot\cos 50^0\cdot\cos 70^0$.

50. $4\cdot\sin 20^0\cdot\sin 40^0\cdot\sin 60^0\cdot\sin 80^0$.

Ответы: **1.** $\frac{7}{25};-\frac{7}{24}$. **2.** $-\frac{3}{5};\frac{4}{3}$. **3.** $\frac{7}{25};\frac{7}{24}$. **4.** $-\frac{7}{25};\frac{24}{7}$. **5.** $-\frac{7}{25};-\frac{7}{24}$. **6.** $-\frac{7}{25};\frac{24}{7}$. **7.** -0,8; -0,75. **8.** -0,8; $\frac{4}{3}$. **9.** 0,8; $\frac{4}{3}$. **10.** $\frac{24}{25};-\frac{24}{7}$. **11.** $-\frac{4}{5};-\frac{4}{3}$. **12.** $\frac{3}{5};-\frac{3}{4}$. **13.** $-\frac{7}{25};\frac{7}{24}$. **14.** $\frac{5}{13};-\frac{5}{12}$. **15.** $\frac{15}{17};-\frac{15}{8}$. **16.** $\frac{7}{25};-\frac{24}{7}$. **17.** $\frac{12}{13};-\frac{5}{12}$. **18.** $\frac{15}{17};-\frac{8}{15}$. **19.** $\frac{12}{13}$. **20.** 4. **21.** 0,6. **22.** 0,316. **23.** 0,875. **24.** 0,5. **25.** 1. **26.** $\frac{1}{26}$. **27.** $-\frac{11}{14}$. **28.** $-\frac{1}{7}$. **29.** $\frac{59}{62}$. **30.** $-\frac{11}{5}$. **31.** $\frac{5}{8}$. **32.** $\frac{112}{9}$. **33.** $-\frac{4}{9}$. **34.** $-\frac{3}{8}$. **35.** $\sqrt{2}$. **36.** 3. **37.** 1. **38.** -1. **39.** 1. **40.** $\sqrt{2}$. **41.** -3. **42.** 4. **43.** -80. **44.** 80. **45.** 97. **46.** 5. **47.** 4. **48.** $\frac{1}{8}$. **49.** $\frac{\sqrt{3}}{8}$. **50.** $\frac{3}{4}$.

Тригонометрические уравнения

Решите уравнения (1 – 50):

1. $\cos x = \frac{1}{2}$.

2. $\cos x = -\frac{1}{2}$.

3. $\cos x = \frac{\sqrt{3}}{2}$.

4. $\cos 3x = \frac{1}{2}$.

5. $\sin\frac{x}{2} = \frac{\sqrt{3}}{2}$.

6. $\sin 3x = -\frac{\sqrt{3}}{2}$.

7. $\cos 2x = \frac{\sqrt{2}}{2}$.

8. $\cos\frac{x}{2} = -\frac{\sqrt{3}}{2}$.

9. $\cos 4x = \frac{\sqrt{3}}{2}$.

10. $\cos\frac{x}{4} = -\frac{\sqrt{3}}{2}$.

11. $\sin 3x = \frac{1}{2}$.

12. $\sin 3x = -\frac{1}{2}$.

13. $\cos 2x = \frac{1}{2}$.

14. $\cos x = -\frac{\sqrt{3}}{2}$.

15. $\cos x = \frac{\sqrt{2}}{2}$.

16. $\cos x = -\frac{\sqrt{2}}{2}$.

17. $\sin x = \frac{1}{2}$.

18. $\sin x = -\frac{\sqrt{2}}{2}$.

19. $\cos^2 x = \frac{1}{2}$.

20. $\sin^2 x = \frac{3}{4}$.

21. $\cos^2 x = \frac{3}{4}$.

22. $\sin^2 x = \frac{1}{2}$.

23. $\mathrm{tg}^2\, x = \frac{1}{3}$.

24. $\mathrm{tg}^2\, x = 1$.

25. $\sin x = 1 - \cos 2x$.

26. $\cos 2x + \sin^2 x = \cos x$.

27. $1 - \sin\frac{x}{2} = \cos x$.

28. $\sin 2x = \sin 3x$.

29. $\cos\frac{x}{3} = \cos 2x$.

30. $\mathrm{tg}\, x = \mathrm{tg}\, 4x$.

31. $\sin x + \sin 5x = 2\cos 2x$.

32. $\cos 5x + \cos x = -2\cos 3x$.

33. $\sin 3x - \sin 7x = \sqrt{3}\sin 2x$.

34. $\cos 5x - \sin 5x = \sin 7x - \cos 7x$.

35. $\sin x + \sin 2x = \sin 3x + \sin 4x$.

36. $\sin x - \cos x = \sqrt{\frac{3}{2}}$.

37. $\sin\frac{x}{6} + \sqrt{3}\cdot\cos\frac{x}{6} + 1 = 0$.

38. $\sin x+\sin 2x=\cos x+2\cos^2 x$.

39. $\sin x\cdot\cos x\cdot\cos 2x\cdot\cos 8x=\frac{1}{4}\cdot\sin 12x$.

40. $\sin^2 x-\left(\sqrt{3}+1\right)\sin x\cdot\cos x+\sqrt{3}\cos^2 x=0$.

41. $\cos^4 x+\sin^4 x=\cos 2x$. 42. $\cos^4(\pi-x)=\sin^4 x+\frac{1}{2}$.

43. $\sin^4 x+\cos^4 x=\frac{5}{8}$.

44. $\sin^4 x+\frac{1}{2}=\sin 2x-\cos^4 x$.

45. $\sin^4 2x+\cos^4 2x=\sin 2x\cdot\cos 2x$.

46. $\sin^6 x-\cos^6 x=2\left(\sin^4 x+\cos^4 x\right)-1$.

47. $\sin^6 x+\cos^6 x=\frac{13}{14}\left(\sin^4 x+\cos^4 x\right)$.

48. $\sin 2x-4\cos 2x=4$.

49. $5\sin x+12\cos x=13$.

50. $3\sin 2x-4\cos 2x=5$.

Ответы: **1.** $\pm\frac{\pi}{3}+2\pi n,\ n\in Z$. **2.** $\pm\frac{2\pi}{3}+2\pi n,\ n\in Z$.

3. $\pm\frac{\pi}{6}+2\pi n,\ n\in Z$. **4.** $\pm\frac{\pi}{9}+\frac{2\pi n}{3},\ n\in Z$.

5. $(-1)^n\frac{2\pi}{3}+2\pi n,\ n\in Z$. **6.** $(-1)^{n+1}\frac{\pi}{9}+\frac{\pi n}{3},\ n\in Z$.

7. $\pm\frac{\pi}{8}+\pi n, n\in Z$. **8.** $\pm\frac{5\pi}{3}+4\pi n, n\in Z$.

9. $\pm\frac{\pi}{24}+\frac{\pi n}{2},\ n\in Z$. **10.** $\pm\frac{10\pi}{3}+8\pi n,\ n\in Z$.

11. $(-1)^n\frac{\pi}{18}+\frac{\pi n}{3},\ n\in Z$. **12.** $(-1)^{n+1}\frac{\pi}{18}+\frac{\pi n}{3},\ n\in Z$.

13. $\pm\frac{\pi}{6}+\pi n,\ n\in Z$. **14.** $\pm\frac{5\pi}{6}+2\pi n,\ n\in Z$.

15. $\pm\frac{\pi}{4}+2\pi n,\ n\in Z$. **16.** $\pm\frac{3\pi}{4}+2\pi n,\ n\in Z$.

17. $(-1)^n\frac{\pi}{6}+\pi n,\ n\in Z$. **18.** $(-1)^{n+1}\frac{\pi}{4}+\pi n,\ n\in Z$.

19. $\frac{\pi}{4}+\frac{\pi n}{2},\ n\in Z$. **20.** $\pm\frac{\pi}{3}+\pi n,\ n\in Z$. **21.** $\pm\frac{\pi}{6}+\pi n,\ n\in Z$.

22. $\frac{\pi}{4}+\frac{\pi n}{2},\ n\in Z$. **23.** $\pm\frac{\pi}{6}+\pi n,\ n\in Z$. **24.** $\pm\frac{\pi}{4}+\pi n,\ n\in Z$.

25. $\pi n,\ n\in Z;\ (-1)^k\frac{\pi}{6}+\pi k,\ k\in Z$.

26. $\frac{\pi}{2}+\pi n,\ n\in Z;\ 2\pi k,\ k\in Z$. **27.** $2\pi n; (-1)^n\frac{\pi}{3}+2\pi n$.

28. $2\pi k,\ k\in Z;\ \frac{\pi}{5}+\frac{2\pi n}{5},\ n\in Z$. **29.** $\frac{6\pi k}{7},\ k\in Z;\ \frac{6\pi n}{5},\ n\in Z$.

30. $\frac{\pi n}{3},\ n\in Z$. **31.** $\frac{\pi}{4}+\frac{\pi k}{2},\ k\in Z;\ \frac{\pi}{6}+\frac{2\pi n}{3},\ n\in Z$.

32. $\frac{\pi}{6}+\frac{\pi n}{3},\ n\in Z$; $\frac{\pi}{2}+\pi k,\ k\in Z$.

33. $\frac{\pi k}{2},\ k\in Z;\ \pm\frac{\pi}{30}+\frac{2\pi n}{5},\ n\in Z$.

34. $\frac{\pi}{24}+\frac{\pi k}{6},k\in Z;\ \frac{\pi}{2}+\pi n,\ n\in Z$.

35. $\frac{\pi}{5}+\frac{2\pi k}{5},\ k\in Z;\ \pi n,\ n\in Z$. **36.** $\pm\frac{5\pi}{6}-\frac{\pi}{4}+2\pi k,\ k\in Z$.

37. $\pm 4\pi+\pi(12k+1),\ k\in Z$. **38.** $\pm\frac{2\pi}{3}+2\pi k; \frac{\pi}{4}+\pi n$.

39. $\frac{\pi k}{8},\ k\in Z$. **40.** $\frac{\pi}{4}+\pi k,\ k\in Z;\ \frac{\pi}{3}+\pi n,\ n\in Z$.

41. $\pi n,\ n\in Z$. **42.** $\pm\frac{\pi}{6}+\pi n,\ n\in Z$. **43.** $\pm\frac{\pi}{6}+\frac{\pi n}{2},\ n\in Z$.

44. $\frac{\pi}{4}+\pi n,\ n\in Z$. **45.** $\frac{\pi}{8}+\frac{\pi n}{2},\ n\in Z$.

46. $\frac{\pi}{4}+\frac{\pi n}{2},\ n\in Z;\ \frac{\pi}{2}+\pi k,\ k\in Z$. **47.** $\pm\frac{\pi}{12}+\frac{\pi n}{2},\ n\in Z$.

48. $\frac{\pi}{2}+\pi n,\ n\in Z;\ \operatorname{arctg}2+\pi k,\ k\in Z$. **49.** $\operatorname{arctg}\frac{5}{12}+2\pi n,\ n\in Z$.

50. $\operatorname{arctg}3+\pi n,\ n\in Z$.

Тригонометрические неравенства

Решите неравенства (1 – 50):

1. $\sin 2x>\frac{\sqrt{2}}{2}$. 2. $\sin\frac{x}{2}<\frac{\sqrt{2}}{2}$. 3. $\sin 2x<-\frac{\sqrt{2}}{2}$.

4. $\sin\frac{x}{3}>-\frac{\sqrt{2}}{2}$. 5. $\cos 2x>-\frac{\sqrt{2}}{2}$. 6. $\cos\frac{x}{3}<\frac{\sqrt{2}}{2}$.

7. $\sin\frac{x}{2}>-\frac{1}{2}$. 8. $\sin 2x<-\frac{1}{2}$. 9. $\sin\frac{x}{4}<\frac{1}{2}$.

10. $\sin 4x>\frac{1}{2}$. 11. $\cos\frac{x}{3}>-\frac{\sqrt{2}}{2}$. 12. $\cos\frac{x}{2}<\frac{\sqrt{3}}{2}$.

13. $\sin x>\frac{\sqrt{2}}{2}$. 14. $\sin x<\frac{\sqrt{2}}{2}$. 15. $\cos x>\frac{\sqrt{2}}{2}$.

16. $\cos x<\frac{\sqrt{2}}{2}$. 17. $\cos x>-\frac{\sqrt{2}}{2}$. 18. $\cos x<-\frac{\sqrt{2}}{2}$.

19. $\sin 2x>\frac{\sqrt{2}}{2}$. 20. $\sin\frac{x}{2}>\frac{\sqrt{2}}{2}$. 21. $\sin 2x>-\frac{1}{2}$.

22. $\cos 2x>-\frac{\sqrt{3}}{2}$. 23. $\cos\frac{x}{2}<-\frac{\sqrt{3}}{2}$. 24. $\cos 2x>\frac{1}{2}$.

25. $\cos(-3x)\ge\frac{\sqrt{3}}{2}$. 26. $2\cos^2 x-1>0$.

27. $\cos\left(2x-\frac{\pi}{3}\right)<-\frac{1}{2}$. 28. $\cos\left(3x+\frac{\pi}{6}\right)\ge-\frac{1}{2}$.

29. $4\left(\sin^2 x-|\cos x|\right)\le 1$ 30. $\cos\left(\frac{x}{4}+3\right)\le-\frac{1}{2}$.

31. $2\sin^2 x+3\sin x-2>0$. 32. $2\cos^2 x+3\cos x-2>0$.
33. $2\sin^2 x-3\sin x-2\ge 0$. 34. $2\cos^2 x-3\cos x-2\ge 0$.
35. $2\sin^2 x+3\sin x-2\le 0$. 36. $2000^{\sin 2x}\ge 2000^{\cos 2x}$.
37. $\dfrac{\sin x+\cos x}{\sin x-\cos x}\ge\sqrt{3}$. 38. $2^{\sin x-1}\ge\left(\dfrac{1}{16}\right)^{\frac{1}{\sin x}}$.
39. $3^{\cos 2x-1}\ge\left(\dfrac{1}{81}\right)^{\frac{1}{\cos 2x}}$. 40. $\cos^2 2x+\cos^2 x\le 1$.
41. $\operatorname{tg} x>1$. 42. $\operatorname{tg} x>-1$. 43. $\operatorname{tg} x\le 1$.
44. $\operatorname{tg} x\le -1$. 45. $\operatorname{tg}\left(x-\dfrac{\pi}{6}\right)\ge 0$. 46. $\operatorname{tg}\left(x+\dfrac{\pi}{6}\right)\le 0$.
47. $\operatorname{tg}\left(2x+\dfrac{\pi}{3}\right)\le 1$. 48. $\operatorname{tg}\left(2x-\dfrac{\pi}{3}\right)\ge 1$.
49. $\left|\operatorname{tg}\left(x-\dfrac{\pi}{4}\right)\right|<1$. 50. $\left|\operatorname{tg}\left(x-\dfrac{\pi}{4}\right)\right|\le 1$.

Ответы: **1.** $\left(\dfrac{\pi}{8}+\pi n;\dfrac{3\pi}{8}+\pi n\right)$, $n\in Z$. **2.** $\left(\dfrac{3\pi}{2}+4\pi n;\dfrac{9\pi}{2}+4\pi n\right)$, $n\in Z$.
3. $\left(\dfrac{5\pi}{8}+\pi n;\dfrac{7\pi}{8}+\pi n\right)$, $n\in Z$. **4.** $\left(-\dfrac{3\pi}{4}+6\pi n;\dfrac{15\pi}{4}+6\pi n\right)$, $n\in Z$.
5. $\left(-\dfrac{3\pi}{8}+\pi n;\dfrac{3\pi}{8}+\pi n\right)$, $n\in Z$. **6.** $\left(\dfrac{3\pi}{4}+6\pi n;\dfrac{21\pi}{4}+6\pi n\right)$, $n\in Z$.
7. $\left(-\dfrac{\pi}{3}+4\pi n;\dfrac{7\pi}{3}+4\pi n\right)$, $n\in Z$. **8.** $\left(-\dfrac{5\pi}{12}+\pi n;-\dfrac{\pi}{12}+\pi n\right)$, $n\in Z$.
9. $\left(-\dfrac{14\pi}{3}+8\pi n;\dfrac{2\pi}{3}+8\pi n\right)$, $n\in Z$. **10.** $\left(\dfrac{\pi}{24}+\dfrac{\pi n}{2};\dfrac{5\pi}{24}+\dfrac{\pi n}{2}\right)$, $n\in Z$.
11. $\left(-\dfrac{9\pi}{4}+6\pi n;\dfrac{9\pi}{4}+6\pi n\right)$, $n\in Z$. **12.** $n\in Z$.

13. $\left(\frac{\pi}{4}+2\pi n;\frac{3\pi}{4}+2\pi n\right)$, $n\in Z$. **14.** $\left(\frac{3\pi}{4}+2\pi n;\frac{9\pi}{4}+2\pi n\right)$, $n\in Z$.

15. $\left(-\frac{\pi}{4}+2\pi n;\frac{\pi}{4}+2\pi n\right)$, $n\in Z$. **16.** $\left(\frac{\pi}{4}+2\pi n;\frac{7\pi}{4}+2\pi n\right)$, $n\in Z$.

17. $\left(-\frac{3\pi}{4}+2\pi n;\frac{3\pi}{4}+2\pi n\right)$, $n\in Z$. **18.** $\left(\frac{3\pi}{4}+2\pi n;\frac{5\pi}{4}+2\pi n\right)$, $n\in Z$.

19. $\left(\frac{\pi}{8}+\pi n;\frac{3\pi}{8}+\pi n\right)$, $n\in Z$. **20.** $\left(\frac{\pi}{2}+4\pi n;\frac{3\pi}{2}+4\pi n\right)$, $n\in Z$.

21. $\left(-\frac{\pi}{12}+\pi n;\frac{7\pi}{12}+\pi n\right)$, $n\in Z$. **22.** $\left(-\frac{5\pi}{12}+\pi n;\frac{5\pi}{12}+\pi n\right)$, $n\in Z$.

23. $\left(\frac{5\pi}{3}+4\pi n;\frac{7\pi}{3}+4\pi n\right)$, $n\in Z$. **24.** $\left(-\frac{\pi}{6}+\pi n;\frac{\pi}{6}+\pi n\right)$, $n\in Z$.

25. $\left[-\frac{\pi}{18}+\frac{2\pi n}{3};\frac{\pi}{18}+\frac{2\pi n}{3}\right]$, $n\in Z$. **26.** $\left(-\frac{\pi}{4}+\pi n;\frac{\pi}{4}+\pi n\right)$, $n\in Z$.

27. $\left(\frac{\pi}{2}+\pi n;\frac{5\pi}{6}+\pi n\right)$, $n\in Z$. **28.** $\left(-\frac{5\pi}{18}+\frac{2\pi n}{3};\frac{\pi}{6}+\frac{2\pi n}{3}\right)$, $n\in Z$.

29. $\left[-\frac{\pi}{3}+\pi n;\frac{\pi}{3}+\pi n\right]$, $n\in Z$. **30.** $\left[-\frac{10\pi}{3}-12+8\pi n;-\frac{2\pi}{3}-12+8\pi n\right]$, $n\in Z$.

31. $\left(\frac{\pi}{6}+2\pi n;\frac{5\pi}{6}+2\pi n\right)$, $n\in Z$. **32.** $\left(-\frac{\pi}{3}+2\pi n;\frac{\pi}{3}+2\pi n\right)$, $n\in Z$.

33. $\left[-\frac{5\pi}{6}+2\pi n;-\frac{\pi}{6}+2\pi n\right]$, $n\in Z$. **34.** $\left[\frac{2\pi}{3}+2\pi n;\frac{4\pi}{3}+2\pi n\right]$, $n\in Z$.

35. $\left[-\frac{7\pi}{6}+2\pi n;\frac{\pi}{6}+2\pi n\right]$, $n\in Z$. **36.** $\left[\frac{\pi}{8}+\pi n;\frac{5\pi}{8}+\pi n\right]$, $n\in Z$.

37. $\left[\frac{\pi}{4}+\pi n;\frac{5\pi}{12}+\pi n\right]$, $n\in Z$. **38.** $[2\pi n;\pi(2n+1)]$, $n\in Z$.

39. $\left[-\frac{\pi}{4}+\pi n;\frac{\pi}{4}+\pi n\right]$, $n\in Z$. **40.** $\left[\frac{\pi}{6}+\pi n;\frac{5\pi}{6}+\pi n\right]$, $n\in Z$.

41. $\left(\frac{\pi}{4}+\pi n;\frac{\pi}{2}+\pi n\right)$, $n\in Z$. **42.** $\left(-\frac{\pi}{4}+\pi n;\frac{\pi}{2}+\pi n\right)$, $n\in Z$.

43. $\left(-\frac{\pi}{2}+\pi n;\frac{\pi}{4}+\pi n\right]$, $n\in Z$. **44.** $\left(-\frac{\pi}{2}+\pi n;-\frac{\pi}{4}+\pi n\right]$, $n\in Z$.

45. $\left[\frac{\pi}{6}+\pi n;\frac{2\pi}{3}+\pi n\right)$, $n\in Z$. **46.** $\left(-\frac{2\pi}{3}+\pi n;-\frac{\pi}{6}+\pi n\right]$, $n\in Z$.

47. $\left(-\frac{5\pi}{12}+\frac{\pi n}{2};-\frac{\pi}{24}+\frac{\pi n}{2}\right]$, $n\in Z$. **48.** $\left[\frac{7\pi}{24}+\frac{\pi n}{2};\frac{5\pi}{12}+\frac{\pi n}{2}\right)$, $n\in Z$.

49. $\left(\pi n;\frac{\pi}{2}+\pi n\right)$, $n\in Z$. **50.** $\left[\pi n;\frac{\pi}{2}+\pi n\right]$, $n\in Z$.

Обратные тригонометрические функции

Вычислите (1 – 50):

1. $\arccos\left(-\frac{1}{2}\right)$.
2. $\arccos\left(-\frac{\sqrt{3}}{2}\right)$.
3. $\arccos(-1)$.
4. $\arccos\left(-\frac{1}{2}\right)+\arcsin\left(-\frac{1}{2}\right)$.
5. $\arccos\left(-\frac{\sqrt{3}}{2}\right)+\arcsin\left(-\frac{\sqrt{3}}{2}\right)$.
6. $\arccos\left(-\frac{\sqrt{2}}{2}\right)+\arcsin\left(-\frac{\sqrt{2}}{2}\right)$.
7. $\arccos\left(-\frac{\sqrt{3}}{2}\right)+\arcsin\left(\frac{1}{2}\right)$.
8. $\arccos\left(-\frac{1}{2}\right)-\arcsin\left(-\frac{1}{2}\right)$.
9. $\arccos\left(-\frac{1}{2}\right)+\arcsin(-1)$.
10. $\arccos\left(-\frac{1}{2}\right)+\arcsin\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)$.
11. $\arccos(-1)+\arcsin\left(-\frac{1}{2}\right)$.
12. $-\arccos\left(-\frac{1}{2}\right)+\arcsin\left(-\frac{1}{2}\right)$.
13. $\arccos\left(-\frac{\sqrt{3}}{2}\right)-\arcsin\left(\frac{1}{2}\right)$.
14. $\arccos\left(-\frac{\sqrt{2}}{2}\right)-\arcsin\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)$.

15. $\arccos\left(-\frac{\sqrt{3}}{2}\right)-\arcsin\left(-\frac{1}{2}\right)$. 16. $\arccos\left(-\frac{1}{2}\right)+\arcsin\left(-\frac{1}{2}\right)$.

17. $\arccos\left(-\frac{\sqrt{3}}{2}\right)+\arcsin\left(-\frac{\sqrt{3}}{2}\right)$. 18. $\arccos\left(\frac{1}{2}\right)+\arcsin\left(\frac{1}{2}\right)$.

19. $\arccos\left(-\frac{\sqrt{2}}{2}\right)+\arcsin\left(-\frac{\sqrt{2}}{2}\right)$. 20. $\arccos\left(-\frac{\sqrt{3}}{2}\right)+\arcsin\left(\frac{1}{2}\right)$.

21. $\arccos\left(-\frac{1}{2}\right)-\arcsin\left(\frac{1}{2}\right)$.

22. $\arccos\left(\cos\frac{6\pi}{5}\right)$.

23. $\cos\left(\arcsin\left(-\frac{1}{3}\right)\right)$.

24. $\arcsin\left(\sin\frac{6\pi}{5}\right)$.

25. $\arccos\left(\cos\left(-\frac{1}{2}\right)\right)$.

26. $\arccos\left(\cos\frac{5\pi}{4}\right)$.

27. $\arcsin\left(\cos\frac{\pi}{9}\right)$.

28. $\arcsin\left(\sin\frac{6\pi}{7}\right)$.

29. $\arcsin\left(\sin\frac{7\pi}{5}\right)$.

30. $\arcsin\left(\cos\frac{4\pi}{7}\right)$.

31. $\arcsin\left(\sin\frac{6\pi}{7}\right)$.

32. $\arcsin\left(\cos\frac{4\pi}{5}\right)$.

33. $\arccos\left(\sin\left(-\frac{\pi}{7}\right)\right)$.

34. $\arcsin\left(\cos\frac{33\pi}{5}\right)$.

35. $\arcsin(\sin 6)$.

36. $\arcsin\left(\cos\frac{4\pi}{7}\right)$.

37. $\arccos\left(\sin\frac{3\pi}{5}\right)$.

38. $\arccos(\cos 5)$.

39. $\arccos\left(\sin\frac{\pi}{8}\right)$.

40. . 41. $\operatorname{arctg}(\operatorname{tg} 4)$.

42. $\operatorname{arctg}\left(\operatorname{tg}\frac{4\pi}{7}\right)$.

43. $\operatorname{arctg}(\operatorname{tg} 6)$.

44. $\cos\left(2\arcsin\frac{1}{3}\right)$. 45. $\sin\left(2\arcsin\frac{7}{25}\right)$.

46. $\cos\left(\arcsin\frac{4}{5}+\arcsin\frac{9}{41}\right)$. 47. $\sin\left(\arcsin\frac{3}{5}+\arccos\frac{5}{13}\right)$.

48. $\cos\left(\arcsin\frac{5}{13}+\arccos\frac{3}{5}\right)$. 49. $\cos\left(\arcsin\frac{40}{41}-\arcsin\frac{4}{5}\right)$.

50. $\sin\left(\arccos\frac{4}{5}-\arccos\frac{12}{13}\right)$.

Ответы: **1.** $\frac{2\pi}{3}$. **2.** $\frac{5\pi}{6}$. **3.** π. **4.** $\frac{\pi}{2}$. **5.** $\frac{\pi}{2}$. **6.** $\frac{\pi}{2}$. **7.** π. **8.** $\frac{5\pi}{6}$. **9.** $\frac{\pi}{6}$. **10.** $\frac{11\pi}{12}$. **11.** $\frac{5\pi}{6}$. **12.** $-\frac{5\pi}{6}$. **13.** $\frac{2\pi}{3}$. **14.** $\frac{\pi}{2}$. **15.** π. **16.** $\frac{\pi}{2}$. **17.** $\frac{\pi}{2}$. **18.** $\frac{\pi}{2}$. **19.** $\frac{\pi}{2}$. **20.** π. **21.** $\frac{\pi}{2}$. **22.** $\frac{4\pi}{5}$. **23.** $\frac{2\sqrt{2}}{3}$. **24.** $-\frac{\pi}{5}$. **25.** $\frac{1}{2}$. **26.** $\frac{3\pi}{4}$. **27.** $\frac{7\pi}{18}$. **28.** $\frac{\pi}{7}$. **29.** $-\frac{2\pi}{5}$. **30.** $-\frac{\pi}{14}$. **31.** $\frac{\pi}{7}$. **32.** $-\frac{3\pi}{10}$. **33.** $\frac{9\pi}{14}$. **34.** $-\frac{\pi}{10}$. **35.** $6-2\pi$. **36.** $-\frac{\pi}{14}$. **37.** $\frac{\pi}{10}$. **38.** $2\pi-5$. **39.** $\frac{3\pi}{8}$. **40.** $-\frac{2\pi}{5}$. **41.** $4-\pi$. **42.** $-\frac{3\pi}{7}$. **43.** $6-2\pi$. **44.** $\frac{7}{9}$. **45.** $\frac{336}{625}$. **46.** $\frac{84}{205}$. **47.** $\frac{63}{65}$. **48.** $\frac{16}{65}$. **49.** $\frac{187}{205}$. **50.** $\frac{16}{65}$.

Арифметическая прогрессия

1. Найдите двенадцатый член арифметической прогрессии, у которой первый член равен 2, а разность равна 3.

2. Найдите сумму двенадцати членов арифметической прогрессии, у которой первый член равен 2, а разность равна 3.

3. Найдите сумму двенадцати членов арифметической прогрессии, у которой первый член равен 1, а разность равна 5.

4. Найдите пятнадцатый член арифметической прогрессии, у которой первый член равен 1, а разность равна 5.

5. Найдите пятнадцатый член арифметической прогрессии, у которой первый член равен –3, а разность равна 2.

6. Найдите сумму пятнадцати первых членов арифметической прогрессии, у которой первый член равен –3, а разность равна 2.

7. Найдите сумму пятнадцати членов арифметической прогрессии, у которой первый член равен –2, а разность равна 4.

8. Найдите пятнадцатый член арифметической прогрессии, у которой первый член равен –2, а разность равна 4.

9. Найдите шестнадцатый член арифметической прогрессии, у которой первый член равен –7, а разность равна 3.

10. Найдите сумму четырнадцати членов арифметической прогрессии, у которой первый член равен –7, а разность равна 3.

11. Найдите двенадцатый член арифметической прогрессии, у которой первый член равен –14, а разность равна 3.

12. Найдите сумму двенадцати первых членов арифметической прогрессии, у которой первый член равен –14, а разность равна 2.

13. В арифметической прогрессии найдите a_{11}, если $a_1 = 2$, $d = 0{,}2$.

14. В арифметической прогрессии найдите S_{13}, если $a_1 = 7$, $d = 4$.

15. В арифметической прогрессии найдите a_{13}, если $a_1 = 7$, $d = 4$.

16. В арифметической прогрессии найдите S_{11}, если $a_1 = 56$, $d = -3$.

17. В арифметической прогрессии найдите a_{11}, если $a_1 = 56$, $d = -3$.

18. В арифметической прогрессии найдите S_{40}, если $a_1 = 2$, $d = 2$.

19. В арифметической прогрессии найдите a_1, если $a_7 = -4$, $d = 1{,}5$.

20. В арифметической прогрессии найдите S_8, если $d = 1$, $S_2 = 10$.

21. В арифметической прогрессии найдите a_1, если $a_9 = 12$, . $d = 1{,}5$.

22. В арифметической прогрессии найдите S_8, если $a_2 = 0{,}5$, $a_3 = 0{,}7$.

23. В арифметической прогрессии найдите a_1, если $a_{11} = 20$, $d = -3$.

24. В арифметической прогрессии найдите S_5, если $a_1 = 1$, $a_6 = 21$.

25. В арифметической прогрессии найдите S_7, если $a_3 + a_5 = 8$.

26. В арифметической прогрессии найдите S_7, если $a_2 + a_6 = 6$.

27. В арифметической прогрессии найдите $a_3 + a_5$, если $S_7 = 28$.

28. В арифметической прогрессии найдите a_1, если $S_6 = 9$; $a_4 - a_2 = 0{,}4$.

29. В арифметической прогрессии найдите S_9, если $a_3 + a_7 = 10$.

30. В арифметической прогрессии найдите a_5, если $S_8 = 64$; $a_8 - a_3 = 10$.

31. Найдите сумму всех трехзначных натуральных чисел, которые при делении на 5 дают остаток, равный 1.

32. Найдите сумму всех натуральных чисел, каждое из которых кратно 11 и не превосходит по величине 1000.

33. Найдите сумму всех двузначных натуральных чисел, каждое из которых при делении на 3 дает остаток, равный 2.

34. Найдите сумму всех двузначных натуральных чисел, каждое из которых при делении на 4 дает остаток, равный 3.

35. Найдите сумму всех трехзначных натуральных чисел, каждое из которых делится без остатка на 12.

36. Найдите сумму всех целых чисел, каждое из которых делится без остатка на 6 и удовлетворяет условию $-36 < n \le 138$.

37. Найдите сумму всех натуральных чисел, кратных 3 и удовлетворяющих условию $27 < n \le 183$.

38. Найдите сумму всех трехзначных натуральных чисел, каждое из которых кратно 7 и не превосходит 353.

39. Найдите сумму всех целых чисел, каждое из которых делится без остатка на 7 и удовлетворяет условию $-126 < k \le 154$.

40. Найдите сумму всех двузначных натуральных чисел, которые при делении на 5 дают остаток, равный 2.

41. Сумма трех чисел, образующих арифметическую прогрессию, равна 87. Третье число меньше суммы первых двух на 5. Найдите эти числа.

42. Три числа образуют арифметическую прогрессию. Сумма первых двух чисел равна 25, а сумма второго и третьего равна 39. Найдите эти числа.

43. Сумма трех чисел, образующих арифметическую прогрессию, равна 162. Сумма первых двух чисел больше суммы второго и третьего на 12. Найдите эти числа.

44. Три числа образуют арифметическую прогрессию. Сумма первых двух чисел равна 171, а третье больше первого в 6 раз. Найдите эти числа.

45. Сумма трех чисел, образующих арифметическую прогрессию, равна 189. Найдите эти числа, если первое больше третьего в 2 раза.

46. Вычислить: 98,3+94,7+91,1+…+22,7.

47. Вычислить: $-\frac{9}{4}-\frac{31}{12}-\frac{35}{12}-...-\frac{45}{4}$.

48. Вычислить: $-\frac{25}{2}-\frac{71}{6}-\frac{67}{6}-\cdots-\frac{5}{2}$.

49. Вычислить: $\frac{59}{3}+\frac{301}{15}+\frac{307}{15}+...+\frac{83}{3}$.

50. Вычислить: 71 + 67 + 63 + … –53.

51. Вычислить: –10 – 7 – 4 – …+ 50.

52. Вычислить: 53 + 50 + 47 + … –4.

53. Определить, при каких значениях x числа $a_1 = \lg 2,\ a_2 = \lg(3^x - 3),\ a_3 = \lg(3^x + 9)$, взятые в указанном порядке, образуют арифметическую прогрессию.

54. Определить, при каких значениях x числа $a_1 = \lg 2,\ a_2 = \lg(2^x - 6),\ a_3 = \lg(2^x + 34)$, взятые в указанном порядке, образуют арифметическую прогрессию.

55. Определить, при каких значениях x числа $a_1 = \lg 2,\ a_2 = \lg(2^x - 2),\ a_3 = \lg(2^x + 10)$, взятые в указанном порядке, образуют арифметическую прогрессию.

56. Определить, при каких значениях x числа $a_1 = \lg 4,\ a_2 = \lg(5^{-x} - 5),\ a_3 = \lg(5^{-x} + 75)$, взятые в указанном порядке, образуют арифметическую прогрессию.

57. Определить, при каких значениях x числа $a_1 = \lg 3$, $a_2 = \lg(3^{-x} - 3)$, $a_3 = \lg(3^{-x} + 3)$, взятые в указанном порядке, образуют арифметическую прогрессию.

58. Определить, при каких значениях x числа $a_1 = \lg 4$, $a_2 = \lg(4^x - 4)$, $a_3 = \lg(4^x + 20)$, взятые в указанном порядке, образуют арифметическую прогрессию.

59. Найдите сумму всех нечетных трехзначных натуральных чисел, не делящихся на 3.

60. Решить уравнение $x^3 + x^2 + a = 0$, зная, что оно имеет три различных корня, образующих арифметическую прогрессию.

Ответы: **1.** 35. **2.** 222. **3.** 342. **4.** 71. **5.** 25. **6.** 165. **7.** 390. **8.** 54. **9.** 38. **10.** 175. **11.** 19. **12.** -36. **13.** 4. **14.** 403. **15.** 55. **16.** 451. **17.** 26. **18.** 1640. **19.** -13. **20.** 64. **21.** 0. **22.** 8. **23.** 50. **24.** 45. **25.** 28. **26.** 21. **27.** 8. **28.** 1. **29.** 45. **30.** 9. **31.** 98730. **32.** 45045. **33.** 1635. **34.** 1265. **35.** 41400. **36.** 1566. **37.** 5538. **38.** 8190. **39.** 700. **40.** 981. **41.** 17; 29; 41. **42.** 9; 16; 23. **43.** 60; 54; 48. **44.** 38; 133; 228. **45.** 84; 63; 42. **46.** 1331. **47.** -189. **48.** -120. **49.** 497. **50.** 288. **51.** 420. **52.** 490. **53.** 2. **54.** 4. **55.** 3. **56.** -2. **57.** -2. **58.** 2. **59.** 164700.

60. $a = -\frac{2}{27}$; $x_1 = -\frac{1}{3} - \frac{\sqrt{3}}{3}$; $x_2 = -\frac{1}{3}$; $x_3 = -\frac{1}{3} + \frac{\sqrt{3}}{3}$.

Геометрическая прогрессия

1. Найдите сумму четырех первых членов геометрической прогрессии, у которой первый член равен 32, а знаменатель равен $\frac{1}{4}$.

2. Найдите седьмой член геометрической прогрессии, у которой первый член равен 32, а знаменатель равен $\frac{1}{4}$.

3. Найдите восьмой член геометрической прогрессии, у которой первый член равен 27, а знаменатель равен $-\frac{1}{3}$.

4. Найдите сумму пяти первых членов геометрической прогрессии, у которой первый член равен 27, а знаменатель равен $-\frac{1}{3}$.

5. Найдите сумму пяти первых членов геометрической прогрессии, у которой первый член равен 5, а знаменатель равен $-\frac{1}{2}$.

6. Найдите восьмой член геометрической прогрессии, у которой первый член равен 5, а знаменатель равен $-\frac{1}{2}$.

7. Найдите пятый член геометрической прогрессии, у которой первый член равен 4, а знаменатель равен 4.

8. Найдите сумму первых четырех членов геометрической прогрессии, у которой первый член равен 4, а знаменатель равен 4.

9. Найдите сумму пяти членов геометрической прогрессии, у которой первый член равен 3, а знаменатель равен 2.

10. Найдите седьмой член геометрической прогрессии, у которой первый член равен 3, а знаменатель равен 2.

11. Найдите сумму первых семи членов геометрической прогрессии, у которой первый член равен –4, а знаменатель равен 2.

12. Найдите седьмой член геометрической прогрессии, у которой первый член равен –4, а знаменатель равен 2.

13. В геометрической прогрессии найдите S_7, если $b_1 = 1280$, $q = 0{,}5$.

14. В геометрической прогрессии найдите b_7, если $b_1 = 729$, $q = \frac{1}{3}$.

15. В геометрической прогрессии найдите S_{10}, если $b_1 = 1$, $q = 2$.

16. В геометрической прогрессии найдите b_{10}, если $b_1 = 1$, $q = 2$.

17. В геометрической прогрессии найдите b_1, если $b_{10} = 512$, $q = 2$.

18. В геометрической прогрессии найдите b_1, если $S_{10} = 341$, $q = 2$.

19. В геометрической прогрессии найдите b_1, если $b_6 = \frac{1}{32}$, $q = 0{,}5$.

20. В геометрической прогрессии найдите b_3, если $S_5 = 93$, $q = 2$.

21. В геометрической прогрессии найдите S_5, если $b_2 = 32$, $b_2 = 32$

22. В геометрической прогрессии найдите b_4, если $S_3 = \frac{49}{3}$, $q = -3$.

23. В геометрической прогрессии найдите S_7, если $b_3 = 320$, $q = 0{,}5$.

24. В геометрической прогрессии найдите b_5, если $S_5 = 88$, $q = -\frac{1}{2}$.

25. В геометрической прогрессии найдите q, если $b_1 = \frac{3}{8}$, $b_4 = 3$.

26. В геометрической прогрессии найдите b_3, если $b_2 = 6$, $b_4 = 24$ и $q > 0$.

27. В геометрической прогрессии найдите b_3, если $b_1 = 3$, $b_5 = 48$.

28. В геометрической прогрессии с положительными членами найдите S_5, если $b_1 = 3; b_5 = 12288$.
29. В геометрической прогрессии с положительными членами найдите b_1 и q, если $b_1 \cdot b_2 \cdot b_3 \cdot b_4 \cdot b_5 = 32$; $b_1^3 + b_2^3 + b_3^3 = \frac{73}{8}$.
30. В геометрической прогрессии с положительными членами найдите b_1 и q, если $S_4 = 360;\ b_4 = 9b_2$.
31. В геометрической прогрессии найдите b_3, если
$S_3 = 219;\ b_1 \cdot b_2 \cdot b_3 = 13824$.
32. В геометрической прогрессии найдите b_2, если
$b_1 + b_4 = 27;\ b_2 \cdot b_3 = 72$.
33. В геометрической прогрессии найдите b_4, если
$b_1 + b_4 = 35;\ b_2 + b_3 = 30$.
34. В геометрической прогрессии найдите q, если
$b_1 \cdot b_9 = 2304; b_4 + b_6 = 96$.
35. В геометрической прогрессии найдите b_1, если
$b_3 - b_1 = 9; b_5 - b_3 = 36$.
36. В геометрической прогрессии найдите b_1, если
$S_3 = 13;\ b_1^2 + b_2^2 + b_3^2 = 91$.
37. В геометрической прогрессии найдите b_4, если
$b_1 + b_4 = 112; b_2 + b_3 = 48$.
38. В геометрической прогрессии найдите b_1, если
$b_1 + b_3 = 20;\ S_3 = 26$.
39. В геометрической прогрессии найдите b_1, если
$b_1 + b_2 + b_3 + b_4 = 30;\quad b_5 + b_6 + b_7 + b_8 = 480$.
40. В геометрической прогрессии с положительными членами найдите b_1 и q, если $S_3 = 21;\ \frac{1}{b_1} + \frac{1}{b_2} + \frac{1}{b_3} = \frac{7}{12}$.
41. Пусть x_1 и x_2 – корни уравнения $4x - x^2 = A$, а x_3 и x_4 – корни уравнения $36x - x^2 = B$. Известно, что последовательность x_1, x_2, x_3, x_4 является геометрической прогрес-

сией, все члены которой положительные. Найдите значения A и B.

42. Пусть x_1 и x_2 – корни уравнения $6x - x^2 = A$, а x_3 и x_4 – корни уравнения $150x - x^2 = B$. Известно, что последовательность x_1, x_2, x_3, x_4 является геометрической прогрессией, все члены которой положительные. Найдите значения A и B.

43. Пусть x_1 и x_2 – корни уравнения $8x - x^2 = A$, а x_3 и x_4 – корни уравнения $72x - x^2 = B$. Известно, что последовательность x_1, x_2, x_3, x_4 является геометрической прогрессией, все члены которой положительные. Найдите значения A и B.

44. Пусть x_1 и x_2 – корни уравнения $9x - x^2 = A$, а x_3 и x_4 – корни уравнения $36x - x^2 = B$. Известно, что последовательность x_1, x_2, x_3, x_4 является геометрической прогрессией, все члены которой положительные. Найдите значения A и B.

45. Пусть x_1 и x_2 – корни уравнения $15x - x^2 = A$, а x_3 и x_4 – корни уравнения $60x - x^2 = B$. Известно, что последовательность x_1, x_2, x_3, x_4 является геометрической прогрессией, все члены которой положительные. Найдите значения A и B.

46. Пусть x_1 и x_2 – корни уравнения $3x - x^2 = A$, а x_3 и x_4 – корни уравнения $12x - x^2 = B$. Известно, что последовательность x_1, x_2, x_3, x_4 является геометрической прогрессией, все члены которой положительные. Найдите значения A и B.

47. Пусть x_1 и x_2 – корни уравнения $6x - x^2 = A$, а x_3 и x_4 – корни уравнения $24x - x^2 = B$. Известно, что последовательность x_1, x_2, x_3, x_4 является геометрической прогрессией, все члены которой положительные. Найдите значения A и B.

48. Пусть x_1 и x_2 – корни уравнения $5x - x^2 = A$, а x_3 и x_4 – корни уравнения $80x - x^2 = B$. Известно, что последовательность x_1, x_2, x_3, x_4 является геометрической прогрессией, все члены которой положительные. Найдите значения A и B.

49. Пусть x_1 и x_2 – корни уравнения $12x - x^2 = A$, а x_3 и x_4 – корни уравнения $48x - x^2 = B$. Известно, что последовательность x_1, x_2, x_3, x_4 является геометрической прогрессией, все члены которой положительные. Найдите значения A и B.
50. Решить уравнение $x^3 + 7x^2 + 14x + a = 0$, зная, что оно имеет три различных корня, образующих геометрическую прогрессию.

Ответы: **1.** 42,5. **2.** $\frac{1}{128}$. **3.** $-\frac{1}{81}$. **4.** $20\frac{1}{3}$. **5.** $\frac{55}{16}$.
6. $-\frac{5}{128}$. **7.** 1024. **8.** 340. **9.** 93. **10.** 192. **11.** -508.
12. -256. **13.** 2540. **14.** 1. **15.** 1023. **16.** 512. **17.** 1. **18.** $\frac{1}{3}$.
19. 1. **20.** 12. **21.** 124. **22.** -63. **23.** 2540. **24.** 8. **25.** 2.
26. 12. **27.** 12. **28.** 14043. **29.** $\frac{1}{2}; 2$. **30.** 9; 3 или -18; -3.
31. 3; 192. **32.** 6; 12. **33.** 8; 27. **34.** -1; 1. **35.** 3. **36.** 1; 9.
37. 4; 108. **38. 2; 18.** **39.** 2; -6. **40.** 3; 2 или 12; $\frac{1}{2}$.
41. 3; 243. **42.** 5; 3125. **43.** 12; 972. **44.** 18; 288. **45.** 50; 800.
46. 2; 32. **47.** 8; 128. **48.** 4; 1024. **49.** 32; 512.
50. a = 8; $x_1 = -1$; $x_2 = -2$; $x_3 = -4$.

Бесконечно убывающая геометрическая прогрессия

1. Представить в виде обыкновенной дроби число 0,(16).
2. Представить в виде обыкновенной дроби число 2,(41).
3. Представить в виде обыкновенной дроби число 0,1(31).
4. Представить в виде обыкновенной дроби число 0,6(31).
5. Представить в виде обыкновенной дроби число 3,1(6).

6. Представить в виде обыкновенной дроби число 0,(51).
7. Представить в виде обыкновенной дроби число 0,(91).
8. Представить в виде обыкновенной дроби число 0,6(11).
9. Представить в виде обыкновенной дроби число 0,(71).
10. Представить в виде обыкновенной дроби число 0,(25).
11. Представить в виде обыкновенной дроби число 3,(11).
12. Представить в виде обыкновенной дроби число 0,(12).
13. Представить в виде обыкновенной дроби число 0,(9).
14. Представить в виде обыкновенной дроби число 1,(9).
15. Представить в виде обыкновенной дроби число 2,(9).
16. Представить в виде обыкновенной дроби число 3,(9).
17. Представить в виде обыкновенной дроби число 4,(9).
18. Представить в виде обыкновенной дроби число 5,(9).
19. Найдите сумму бесконечно убывающей геометрической прогрессии, если $b_1 = 1; q = \frac{9}{10}$.
20. Найдите сумму бесконечно убывающей геометрической прогрессии, если $b_1 = 1; q = \frac{1}{2}$.
21. Найдите сумму бесконечно убывающей геометрической прогрессии, если $b_1 = 1; q = \frac{3}{4}$.
22. Найдите сумму бесконечно убывающей геометрической прогрессии, если $b_1 = 1; q = \frac{6}{7}$.
23. Найдите сумму бесконечно убывающей геометрической прогрессии, если $b_1 = 1; q = \frac{5}{6}$.
24. Найдите сумму бесконечно убывающей геометрической прогрессии, если $b_1 = 1; q = \frac{7}{8}$.

25. Найдите знаменатель бесконечно убывающей геометрической прогрессии, если $b_1 = 1; S = 3$.

26. Найдите первый член бесконечно убывающей геометрической прогрессии, если $S = 3;\ q = \frac{2}{3}$.

27. Найдите сумму бесконечно убывающей геометрической прогрессии, если $b_1 = 1;\ \ q = \frac{2}{3}$.

28. Найдите сумму бесконечно убывающей геометрической прогрессии, если $b_3 = 2;\ b_6 = 0{,}25$.

29. Найдите сумму бесконечно убывающей геометрической прогрессии, если $q = 0{,}8;\ b_1 = 2$.

30. Найдите сумму бесконечно убывающей геометрической прогрессии, если $b_1 + b_5 = 34;\ b_1 \cdot b_9 = 4$.

31. Вычислить $\sqrt{3\sqrt{5\sqrt{3\sqrt{5\cdots}}}}$.

32. Вычислить $\sqrt{2\sqrt{3\sqrt{2\sqrt{3\cdots}}}}$.

33. Вычислить $\sqrt{2\sqrt{5\sqrt{2\sqrt{5\cdots}}}}$.

34. Решить уравнение $\sqrt[3]{x} = \sqrt{2\sqrt{7\sqrt{2\sqrt{7\cdots}}}}$.

35. Решить уравнение $\sqrt[3]{x} = \sqrt{3\sqrt{7\sqrt{3\sqrt{7\cdots}}}}$.

36. В бесконечно убывающей геометрической прогрессии $S = 12$, сумма квадратов равна 48. Найдите S_{10}.

37. Решить уравнение $\frac{1}{x} + x + x^2 + x^3 + x^4 + ... = \frac{7}{2}$, где $|x| < 1$.

38. Решить уравнение $2x + 1 + x^2 - x^3 + x^4 - x^5 + \ldots = \frac{13}{6}$, где $|x| < 1$.

39. Сумма членов бесконечно убывающей геометрической прогрессии, стоящих на нечетных местах, равна 36, а сумма ее членов, стоящих на четных местах, равна 12. Найдите b_1 и q.

40. В бесконечно убывающей геометрической прогрессии $b_1 = 1$ и каждый член в 3 раза больше суммы всех следующих за ним членов. Найдите q.

41. В бесконечно убывающей геометрической прогрессии найдите b_1 и q, если $b_2 = 6;\ b_1^2 + b_2^2 + b_3^2 + \ldots = 8S.$

42. В бесконечно убывающей геометрической прогрессии найдите q, если каждый ее член в 4 раза больше суммы всех ее последующих членов.

43. Найдите b_1 и q в бесконечно убывающей геометрической прогрессии, если $S_3 = 10{,}5;\ S = 12$.

44. Найдите b_1 и q в бесконечно убывающей геометрической прогрессии, если $S = 4;\ b_1^3 + b_2^3 + b_3^3 + \ldots = 192$.

45. В бесконечно убывающей геометрической прогрессии найдите S_7, если $b_2 = 4;\ \dfrac{b_1^2 + b_2^2 + b_3^2 + \ldots}{b_1 + b_2 + b_3 + \ldots} = \dfrac{16}{3}$.

46. Найдите знаменатель бесконечно убывающей геометрической прогрессии, если ее сумма в три раза больше суммы трех ее первых членов.

47. Сумма бесконечно убывающей геометрической прогрессии равна 3,5, а сумма квадратов членов этой же прогрессии равна $\dfrac{147}{16}$. Найдите сумму кубов членов этой прогрессии.

48. Сумма второго и восьмого членов бесконечно убывающей геометрической прогрессии равна $\dfrac{325}{128}$, а сумма второго и шестого члена, уменьшенная на $\dfrac{65}{32}$, равна четвертому

члену этой же прогрессии. Найдите сумму квадратов членов этой прогрессии.

49. Сумма членов бесконечно убывающей геометрической прогрессии равна наибольшему значению функции $f(x)=-x^2+2x+26$, а разность между первым и вторым членами прогрессии равна 3. Найдите знаменатель прогрессии.

50. Найдите сумму бесконечно убывающей геометрической прогрессии, третий член которой, утроенное произведение первого члена на четвертый и второй член образуют в указанном порядке арифметическую прогрессию с разностью, равной $\frac{1}{8}$.

Ответы: **1.** $\frac{16}{99}$. **2.** $2\frac{41}{99}$. **3.** $\frac{13}{99}$. **4.** $\frac{125}{198}$. **5.** $\frac{19}{6}$
6. $\frac{17}{33}$. **7.** $\frac{91}{99}$. **8.** $\frac{11}{18}$. **9.** $\frac{71}{99}$. **10.** $\frac{25}{99}$. **11.** $3\frac{1}{9}$. **12.** $\frac{4}{33}$.
13. 1. **14.** 2. **15.** 3. **16.** 4. **17.** 5. **18.** 6. **19.** 10. **20.** 2.
21. 4. **22.** 7. **23.** 6. **24.** 8. **25.** $\frac{2}{3}$. **26.** 1. **27.** 3. **28.** 16.
29. 10. **30.** 64 или $21\frac{1}{3}$. **31.** $\sqrt[3]{45}$. **32.** $\sqrt[3]{12}$. **33.** $\sqrt[3]{20}$.
34. 28. **35.** 63. **36.** $11\frac{253}{256}$. **37.** $\frac{1}{3};\frac{2}{3}$. **38.** $-\frac{7}{9};\frac{1}{2}$.
39. 32; $\frac{1}{3}$. **40.** $\frac{1}{4}$. **41.** 12; $\frac{1}{2}$. **42.** $\frac{1}{5}$. **43.** 6; $\frac{1}{2}$. **44.** 6; $-\frac{1}{2}$.
45. $\frac{127}{8}$. **46.** $\sqrt[3]{\frac{2}{3}}$. **47.** $\frac{1029}{38}$. **48.** $\frac{100}{3}$. **49.** $\frac{2}{3}$. **50.** 2.

Иррациональные уравнения

Решите уравнения (1 – 50):

1. $\sqrt{2+x}=x$. 2. $\sqrt{6+x}=x$. 3. $\sqrt{12+x}=x$.
4. $\sqrt{20-x}=x$. 5. $\sqrt{30+x}=x$. 6. $\sqrt{42-x}=x$.
7. $\sqrt{30-x}=x$. 8. $\sqrt{20+x}=x$. 9. $\sqrt{3+x}=x+1$.
10. $\sqrt{3-x}=-\dfrac{x}{2}$. 11. $\sqrt{2-x}=x$. 12. $\sqrt{6-x}=x$.
13. $\sqrt{12-x}=x$. 14. $\sqrt{3+x}=x-3$. 15. $\sqrt{45+x}=x+3$.
16. $\sqrt{4+x}=8-x$. 17. $\sqrt{79+x}=11-x$. 18. $\sqrt{22-x}=x-2$.
19. $\sqrt{x+2}=2+\sqrt{x-6}$. 20. $2+\sqrt{x-7}=\sqrt{x+1}$.

21. $\sqrt{x+20}=3+\sqrt{x-1}$. 22. $2\sqrt{x+18}=15-\sqrt{4x-3}$.
23. $2\sqrt{x+1}=\sqrt{16-4x}-2$. 24. $\sqrt{22-x}=2+\sqrt{10-x}$.
25. $\sqrt{5x+21}=3+x$. 26. $\sqrt{3x-5}-\sqrt{4-x}=1$.
27. $\sqrt{35-5x}=9-2x$. 28. $\left(x^2+4x\right)\cdot\sqrt{x-3}=0$.
29. $\left(x^2+3x\right)\sqrt{2+x}=0$. 30. $\left(x^2-4\right)\cdot\sqrt{x-1}=0$.
31. $4\cdot\sqrt{x-5}=\dfrac{13}{\sqrt{x-5}}-9$. 32. $25\cdot\sqrt{x-3}-22=\dfrac{3}{\sqrt{x-3}}$.
33. $2x^3-x\sqrt{x}-120=0$. 34. $\dfrac{16+9\sqrt{x}}{25x}=1$.
35. $\dfrac{8}{\sqrt{10-x}}-\sqrt{10-x}=2$. 36. $\sqrt{x+3}+\dfrac{4}{\sqrt{x+3}+3}=2$.
37. $\dfrac{3}{\sqrt{3-x}+1}+2\sqrt{3-x}=5$. 38. $\sqrt{\dfrac{2-x}{2+x}}-4\sqrt{\dfrac{2+x}{2-x}}=-3$.
39. $\dfrac{4}{\sqrt{x}+2}+\dfrac{\sqrt{x}-3}{2}=2$. 40. $\dfrac{5}{\sqrt{x-1}}-2\sqrt{x-1}=3$.
41. $(x-4)\cdot\sqrt{3+2x-x^2}=0$. 42. $\left(x^2+5x\right)\cdot\sqrt{x-3}=0$.

43. $\sqrt{7-x^2}\cdot\sqrt{10-3x-x^2}=0$.

44. $(x-3)\cdot\sqrt{x^2-5x+4}=2x-6$.

45. $\sqrt{x^4-2x-5}=1-x$.

46. $x^2+11+\sqrt{x^2+11}=42$.

47. $\sqrt{\frac{20+x}{x}}+\sqrt{\frac{20-x}{x}}=\sqrt{6}$.

48. $8\sqrt{12+16x-16x^2}+4x-4x^2=33$.

49. $\sqrt{x-3-2\sqrt{x-4}}-\sqrt{x+5-6\sqrt{x-4}}=2$.

50. $\sqrt{x-3-2\sqrt{x-4}}+\sqrt{x-4\sqrt{x-4}}=1$.

Ответы: **1.** 2. **2.** 3. **3.** 4. **4.** 4. 5. **6.** 6. **6.** 7. **5.** **8.** 5. **9.** 1. **10.** -6. **11.** 1. **12.** 2. **13.** 3. **14.** 6. **15.** 4. **16.** 5. **17.** 2. **18.** 6. **19.** 7. **20.** 8. **21.** 5. **22.** 7. **23.** 0. **24.** 6. **25.** 3. **26.** 3. **27.** 2. **28.** 3. **29.** -2; 0. **30.** 1; 2. **31.** 6. **32.** 4. **33.** 4. **34.** 1. **35.** 6. **36.** -2. **37.** -1. **38.** 0. **39.** 36. **40.** 2. **41.** -1; 3. **42.** 3. **43.** $-\sqrt{7};2$. **44.** 0; 5. **45.** $-\sqrt{3}$. **46.** -5; 5. **47.** 12. **48.** $\frac{1}{2}$. **49.** $[13;+\infty)$. **50.** $[5;8]$.

Иррациональные неравенства

Решите неравенства (1 – 50):

1. $\sqrt{6+x}<x$. 2. $\sqrt{2+x}<x$. 3. $\sqrt{30+x}>x$.

4. $\sqrt{30+x}<x$. 5. $\sqrt{x+2}>x$. 6. $\sqrt{x+6}>x$.

7. $\sqrt{x+3}<x+1$. 8. $\sqrt{x+3}>x+1$. 9. $\sqrt{2-x}>x$.

10. $\sqrt{2-x}<x$. 11. $\sqrt{12+x}>x$. 12. $\sqrt{12+x}<x$.

13. $\sqrt{4+2x}<1{,}5$. 14. $\sqrt{2x+3}<2$. 15. $\sqrt{x-3}<2$.

16. $\sqrt{3x-6}<3$. 17. $\sqrt{0,5x-1}<0,5$. 18. $\sqrt{0,2x+1}<2$.
19. $2\sqrt{x-1}>x-4$. 20. $\sqrt{2x-1}>x-2$. 21. $\sqrt{x+61}>x+5$.
22. $2\sqrt{48+x}>x$. 23. $\sqrt{x+1}>x-1$. 24. $\sqrt{x+78}>x+6$.
25. $\sqrt{7+x}\geq 7-2x$. 26. $\sqrt{2x^2+x}>1+2x$. 27. $\sqrt{2x+3}\geq x$.
28. $\sqrt{x}<x$. 29. $\sqrt{x}\geq x$. 30.
$\sqrt{x+1}>\dfrac{1}{2}x-1$.
31. $\sqrt{x+3}<\sqrt{6-2x}$. 32. $\sqrt{2x}<4-x$. 33. $\sqrt{x^2-2}<3$.
34. $\sqrt{3x^2-7x-6}>-2$. 35. $\sqrt{x^2+2}<x+2$.
36. $\sqrt{x^2+2}>x+2$. 37. $\sqrt{x+2}<|2x-2|$.
38. $\sqrt{x^2-1}>1$. 39. $\sqrt{1-x^2}\leq 1$.
40. $\sqrt{x^2+2x}>-3-x^2$. 41. $\sqrt{4x-x^2}>-2-3x^2$.
42. $\sqrt{x^2-3x+2}\leq -1-2x^2$. 43. $\sqrt{x^2-x-2}<-1-x^2$.
44. $\sqrt{x+2}>\sqrt{4-x}$. 45. $\sqrt{3+2x}\geq\sqrt{x+1}$.
46. $\sqrt{2x-5}<\sqrt{5x+4}$. 47. $\sqrt{x+3}>x+1$.
48. $\sqrt{3-x}<\sqrt{3x-5}$. 49. $\sqrt{5x+11}>x+3$.
50. $\sqrt{x^2+2x+1}>3x-3$.

Ответы: **1.** $(3;\infty)$. **2.** $(2;\infty)$. **3.** $[-30;6)$. **4.** $(6;\infty)$. **5.** $[-2;2)$. **6.** $[-6;3)$. **7.** $(1;\infty)$. **8.** $[-3;1)$. **9.** $(-\infty;1)$. **10.** $(1;2]$. **11.** $[-12;4)$. **12.** $(4;\infty)$. **13.** $[-2;-0,875)$. **14.** $[-1,5;0,5)$. **15.** $[3;7)$. **16.** $[2;5)$. **17.** $[2;2,5)$. **18.** $[-5;15)$. **19.** $[1;10)$. **20.** $[0,5;5)$. **21.** $[-61;3)$. **22.** $[-48;16)$. **23.** $[-1;3)$. **24.** $[-78;3)$. **25.** $[2;\infty)$. **26.** $\left(-\infty;-\dfrac{1}{2}\right)$. **27.** $[-1,5;3]$. **28.** $(1;\infty)$. **29.** $[0;1]$. **30.** $[-1;8)$. **31.** $[-3;1)$. **32.** $[0;2)$. **33.** $\left(-\sqrt{11};-\sqrt{2}\right]\cup\left[\sqrt{2};\sqrt{11}\right)$.

34. $\left(-\infty;-\frac{2}{3}\right]\cup[3;\infty)$. **35.** $\left(-\frac{1}{2};\infty\right)$. **36.** $\left(-\infty;-\frac{1}{2}\right)$**.**

37. $\left[-2;\frac{1}{4}\right)\cup(2;\infty)$. **38.** $(-\infty;-\sqrt{2})\cup(\sqrt{2};\infty)$. **39.** $[-1;1]$.

40. $(-\infty;-2]\cup[0;\infty)$. **41.** $[0;4]$. **42.** $\varnothing$. **43.** $\varnothing$.

44. $(1;4]$. **45.** $[-1;\infty)$. **46.** $\left[\frac{5}{2};\infty\right)$. **47.** $[-3;1)$. **48.** $(2;3]$**.**

49. $(-2;1)$. **50.** $(-\infty;2)$.

Уравнения с модулем

Решите уравнения (1 – 20):

1. $|5-4x|=1$. 2. $|2-5x|=16$.
3. $|5x-3|=4$. 4. $|4x-1|=7$.
5. $|x-4|-|x+4|=8$. 6. $|2x-1|+6x=|2x-4|+15$.
7. $|x-2|+3x=|x-5|+18$. 8. $|x+2|-|x-3|+|x-1|=4$.
9. $|x-2|+|x+4|-|x-3|=5$. 10. $|x-1|+|x+2|-|x+1|=2$.
11. $1+\sqrt{x^2+2x+1}=3x-2$. 12. $3\sqrt{x^2+6x+9}+2\sqrt{x^2}=7$.
13. $\sqrt{x+6-4\sqrt{x+2}}+\sqrt{11+x-6\sqrt{x+2}}=1$.
14. $\sqrt{x-2\sqrt{x-1}}+\sqrt{x+3-4\sqrt{x-1}}=1$.
15. $\big||x+3|-|x-1|\big|=2-x^2$.
16. $\big||x^2-3x|-x+1\big|=2x^2+x-1$.
17. $\big||x^3+x^2-1|-4\big|=x^3-x^2+3$.
18. $x|3x+5|=3x^2+4x+3$.
19. $\sqrt{\dfrac{1+2x\sqrt{1-x^2}}{2}}+2x^2=1$.
20. $\big||x^3-\sqrt{x+1}|-3\big|=x^3+\sqrt{x+1}-7$.

Ответы: **1.** 1; 1,5. **2.** -2,8; 3,6. **3.** -0,2; 1,4. **4.** -1,5; 2. **5.** $(-\infty;-4]$. **6.** 2. **7.** 5. **8.** -8; 2. **9.** -10; 2. **10.** -2; 0; 2. **11.** 2. **12.** $-\frac{16}{5}$; -2. **13.** $[2;7]$. **14.** $[2;5]$. **15.** $1-\sqrt{5}$, 0. **16.** 1; $-\frac{1}{2}\left(5+\sqrt{33}\right)$. **17.** 0; 1; 2. **18.** 3. **19.** $-\frac{\sqrt{2}}{2}; \frac{1}{4}\left(-\sqrt{2}+\sqrt{6}\right)$. **20.** 3.

Неравенства с модулем

Решите неравенства (1 – 20):

1. $|x-4|<0{,}1$.
2. $|x-4|>0{,}2$.
3. $3x>2-|3-x|$.
4. $|x-1|<2x-5$.
5. $x^2-|x|-12<0$.
6. $3x^2-|10x-3|>0$.
7. $|x^2+x-20|\le x^2+x-20$.
8. $|x^2-6|>4x+1$.
9. $|2x^2-x-10|>|x^2-8x-22|$.
10. $\left|\frac{3-2x}{1+x}\right|<2$.
11. $\left|\frac{3x+1}{x-3}\right|<3$.
12. $\frac{5}{|3-x|+4}>|3-x|$.
13. $\frac{6}{|x+2|+5}>|x+2|$.
14. $|2-5x|+|x+1|\ge x+3$.
15. $|x-1|\le|2x-3|-|x-2|$.
16. $\big|2x-|x-2|\big|<3$.
17. $\big||3x+1|+x+1\big|\ge 2$.
18. $\big|2x+1-|3x+1|\big|\le x+2$.
19. $\big||x^3-x-1|-5\big|\ge x^3+x+8$.
20. $\left|\sqrt{x+2}-\sqrt{x+3}\right|\le 1$.

Ответы: **1.** $(3{,}9;4{,}1)$. **2.** $(-\infty;3{,}8)\cup(4{,}2;\infty)$. **3.** $(-0{,}5;\infty)$. **4.** $(4;\infty)$. **5.** $(-4;4)$.

6. $\left(-\infty;\frac{-5-\sqrt{34}}{3}\right)\cup\left(\frac{-5+\sqrt{34}}{3};\frac{1}{3}\right)\cup(3;\infty)$.

7. $(-\infty;-5]\cup[4;\infty)$**.** **8.** $(-\infty;1)\cup\left(2+\sqrt{11};\infty\right)$.

9. $(-\infty;-4)\cup\left(-3;\frac{9-\sqrt{465}}{6}\right)\cup\left(\frac{9+\sqrt{465}}{6};\infty\right)$. **10.** $\left(\frac{1}{4};\infty\right)$.

11. $\left(-\infty;\frac{4}{3}\right)$. **12.** $(2;4)$. **13.** $(-3;-1)$. **14.** $(-\infty;0]\cup\left[\frac{4}{5};\infty\right)$.

15. $(-\infty;1]\cup[2;\infty)$. **16.** $\left(-\frac{1}{3};\frac{5}{3}\right)$. **17.** $(-\infty;-1]\cup[0;\infty)$.

18. $\left[-\frac{2}{3};\infty\right)$. **19.** $\left(-\infty;-\sqrt[3]{6}\right]$. **20.** $[-2;\infty)$.

Планиметрия

1. В правильном многоугольнике каждый внутренний угол на 108° больше, чем каждый внешний угол. Найти число сторон многоугольника.

2. Найти площадь квадрата *ABCD*, если $|AB| = x^2 - x - 1$, а $|BC| = x + 2 > 2$.

3. Ширина прямоугольника составляет $\frac{3}{5}$ его длины. Найти площадь этого прямоугольника, если известно, что его периметр равен 32 см.

4. Окружность с центром в начале координат (0; 0) проходит через точку $A\ \left(5;-2\sqrt{6}\right)$. Найти радиус этой окружности.

5. Длина прямоугольника равна $\frac{7}{5}$ его ширины. Найти площадь этого прямоугольника, если известно, что его периметр равен 48 см.

6. Найти площадь треугольника ABC с вершинами A $(2;5)$, B $(5;2)$, C $(5;10)$.

7. Периметр трапеции, в которую можно вписать окружность, равен 16 см. Определить длину средней линии трапеции.

8. Катеты прямоугольного треугольника равны 3 см и 4 см. Найти радиус вписанной окружности.

9. В прямоугольном треугольнике катеты равны 12 см и 16 см. Найти радиус описанной окружности.

10. В прямоугольном треугольнике катеты равны 15 см и 20 см. Найти длину медианы, проведенной из прямого угла.

11. Длины оснований трапеции, в которую можно вписать окружность и вокруг которой можно описать окружность, равны a и b. Найти длину боковой стороны.

12. Длины оснований равнобочной трапеции, в которую можно вписать окружность, равны a и b. Найти длину высоты трапеции.

13. Периметр трапеции, в которую можно вписать окружность, равен 20 см. Определить длину средней линии трапеции.

14. Сколько сторон имеет правильный многоугольник, каждый из внутренних углов которого равен 135°?.

15. Найти длину дуги окружности радиуса 1 см, отвечающей центральному углу в 30°.

16. Сторона правильного многоугольника равна a, а радиус описанной окружности R. Найти радиус вписанной окружности.

17. Сторона правильного многоугольника равна a, а радиус вписанной окружности r. Найти радиус описанной окружности.

18. Конец валика диаметром 4 см опилен под квадрат. Каким может быть наибольший размер стороны квадрата?

19. Найти длину наименьшей хорды, проходящей через середину радиуса окружности диаметром 8 см.

20 В равнобочную трапецию с боковой стороной, равной 9 см, вписана окружность радиуса 4 см. Найти площадь трапеции.

21. Площадь равнобочной трапеции, описанной около круга, равна 72 см^2. Определить боковую сторону этой трапеции, если известно, что ее высота равна 8 см.

22. Около круга радиуса 2 см описана равнобочная трапеция с площадью 20 см^2. Найти стороны трапеции.

23. В прямоугольном треугольнике точка касания вписанной окружности делит гипотенузу на отрезки 3 и 10. Найти больший катет.

24. Найти гипотенузу прямоугольного треугольника, если радиус вписанной окружности равен 3 , а один из катетов равен 8.

25. В треугольнике ABC величина угла ACB равна 120^0. Найти длину стороны AB, если радиус описанной окружности равен $\sqrt{75}$.

26. В треугольнике ABC величина угла ABC равна 45^0. Вычислить длину стороны AC, если радиус окружности, описанной около треугольника, равен $\sqrt{8}$.

27. В прямоугольном треугольнике отрезки гипотенузы, на которые ее делит точка касания вписанной окружности, равны 2 и 3. Найти радиус вписанной окружности.

28. В прямоугольном треугольнике с катетами 4 и $\dfrac{96}{7}$ из вершины большего острого угла проведена биссектриса. Найти ее длину.

29. Общая хорда двух пересекающихся окружностей видна из их центров под углами 90^0 и 120^0. Найти расстояние между центрами окружностей, лежащими по разные стороны от хорды, если длина хорды равна $3-\sqrt{3}$.

30. В треугольнике ABC величина углов BAC и ABC равны соответственно 30^0 и 75^0. Найти длину стороны AB, если

радиус описанной около треугольника окружности равен $3\left(\sqrt{6}-\sqrt{2}\right)$.

Ответы: **1.** 10. **2.** 25. **3.** 60 см^2. **4.** 7. **5.** 140. **6.** 12. **7.** 4. **8.** 1. **9.** 10. **10.** 12,5. **11.** $\frac{a+b}{2}$. **12.** $\sqrt{ab}$. **13.** 5. *14.* 8. **15.** $\frac{\pi}{6}$. **16.** $\sqrt{R^2-\frac{a^2}{4}}$. **17.** $\sqrt{r^2+\frac{a^2}{4}}$. **18.** $2\sqrt{2}$. **19.** $4\sqrt{3}$. **20.** 72. **21.** 9. **22.** 8; 2; 5; 5. **23.** 12. **24.** 17. **25.** 15. **26.** 4. **27.** 1. **28.** 5. **29.** 1. **30.** 6.

Стереометрия

1. Площади поверхностей двух кубов относятся как $\frac{4}{5}$. Найти отношение их объемов.
2. Диагонали квадрата имеют с плоскостью P угол, равный α. Найти угол между плоскостью квадрата и плоскостью P, если $\sin\alpha = \frac{\sqrt{6}}{4}$ и одна сторона квадрата лежит на плоскости P.
3. Основанием четырехугольной пирамиды служит ромб со стороной 3 и острым углом 45°. Найти объем пирамиды, если ее высота равна $\sqrt{2}$.
4. Высота правильной четырехугольной пирамиды равна 7, а сторона основания – 8. Определить боковое ребро.
5. Найти объем правильного тетраэдра с ребром $3\sqrt{2}$.
6. Боковые грани треугольной пирамиды – прямоугольные треугольники, а боковые ребра равны $\sqrt{3-\sqrt{3}}$. Вычислить ее полную поверхность.
7. Стороны оснований правильной усеченной треугольной пирамиды равны 12 и 4. Найти объем усеченной пирамиды, если ее высота равна $\sqrt{3}$.

8. Основаниями усеченной пирамиды служат ромбы с острым углом $60°$ и сторонами, равными 8 и 6. Найти объем усеченной пирамиды, если ее высота равна $0{,}5\sqrt{3}$.

9. Ребро куба равно $\frac{2}{\sqrt[3]{\pi}}$. Найти объем прямого цилиндра, вписанного в куб так, что его осью служит прямая, проходящая через центры оснований куба.

10. Полная поверхность куба равна 3. Чему равна длина диагонали грани куба?

11. Диагональ грани куба равна $2\sqrt{2}$. Найти объем куба.

12. Основанием призмы служит ромб со стороной 2 и острым углом 30^0. Найти объем призмы, если ее высота равна 3.

13. Основанием прямой призмы служит равнобедренный прямоугольный треугольник, площадь которого равна 18. Найти площадь боковой поверхности призмы, если ее высота равна $2-\sqrt{2}$.

14. Определить объем прямоугольного параллелепипеда, диагональ которого равна 13, а диагонали его боковых граней равны $4\sqrt{10}$ и $3\sqrt{17}$.

15. Сторона основания правильной треугольной пирамиды равна 6, двугранный угол при основании равен 45^0. Определить объем пирамиды.

16. Найти диаметр шара, если его объем равен $\frac{2048\pi}{3}$.

17. Объем конуса равен 162π. Найти диаметр основания конуса, если его высота равна 6.

18. Высота конуса равна длине окружности основания. Найти диаметр основания конуса, если его объем равен $18\,\pi^2$.

19. Развертка боковой поверхности цилиндра представляет собой квадрат, площадь которого равна 76π. Найти площадь основания цилиндра.

20. Найти объем правильной треугольной призмы, если сторона ее основания равна 2, а площадь боковой поверхности равна сумме площадей оснований.

21. В правильной усеченной четырехугольной пирамиде площадь большего основания равна 16, боковое ребро равно $\sqrt{9{,}5}$, а высота равна 3. Найти объем усеченной пирамиды.

22. В шар радиуса $\dfrac{4}{\sqrt[3]{\pi}}$ вписан конус, угол при вершине осевого сечения которого равен 120^0. Найти объем конуса.

23. Ромб с диагоналями $\sqrt{15}$ и $\dfrac{60}{\pi}$ вращается вокруг большей диагонали. Найти объем фигуры вращения.

24. В кубе через сторону основания проведено сечение под углом 30^0 к плоскости основания. Найти площадь сечения, если ребро куба равно $\sqrt[4]{3}$.

25. Угол между высотой правильной треугольной пирамиды и боковой гранью равен 30^0. Найти длину стороны основания, если радиус вписанного в пирамиду шара равен 1.

Ответы: **1.** $\dfrac{8}{5\sqrt{5}}$. **2.** 60^0. **3.** 3. **4.** 9. **5.** 9. **6.** 3. **7.** 52. **8.** 37. **9.** 2. **10.** 1. **11.** 8. **12.** 6. **13.** 12. **14.** 144. **15.** 9. **16.** 16. **17.** 18. **18.** 6. **19.** 19. **20.** 1. **21.** 37. **22.** 8. **23.** 75. **24.** 2. **25.** 6.

Текстовые задачи

1. Среднее арифметическое чисел a и b равняется 18. Найти среднее арифметическое чисел a, b, c, если $c = 6$.

2. Действие Θ определено формулой $x \,\Theta\, y = x^2 - xy - y$, для любых действительных чисел x и y. Найти z, если $3 \,\Theta\, z = 9$.

3. Средний рост трех студентов равняется 1 м 78 см, причем рост каждого из них не менее 1 м 72 см. Какой максимально возможный рост любого из этих студентов?

4. Скорость течения воды в реке равняется 3 км/ч, а скорость лодки в стоячей воде – 12 км/ч. Лодочник стартовал в пункте А и сперва двигался 2 ч по течению реки, а затем повернул обратно. На каком расстоянии от пункта А будет лодочник через 5 ч от начала движения?

5. Автомобилист выехал из города А в 9 ч 35 мин и приехал в город В в 11 ч 15 мин. После 45-минутной остановки он выехал обратно по тому же маршруту в город А, в который прибыл в 13 ч 20 мин. Найти среднюю скорость движения автомобилиста, если известно, что расстояние между городами А и В равняется 105 км.

6. В группе 24 учащихся. Из них $\frac{3}{8}$ составляют девушки, из которых $\frac{2}{3}$ имеют голубые глаза. Сколько в группе девушек с голубыми глазами?

7. Автомобиль с грузом ехал из одного города в другой со скоростью 60 км/ч, а возвращался обратно порожняком со скоростью 100 км/ч. Найти среднюю скорость автомобиля.

8. Стипендия была снижена на 20%. На сколько процентов ее надо повысить, чтобы получить первоначальный размер стипендии?

9. Яблоки при сушке теряют 85% своей массы. Сколько надо взять свежих яблок, чтобы приготовить $10\frac{1}{2}$ кг сушеных?

10. Скорый поезд за час проходит 60 км, а пассажирский – 40 км. Определить расстояние между двумя городами, если известно, что скорый поезд проходит это расстояние на 2 ч 15 мин быстрее пассажирского.

11. Цену на словарь повышали дважды. После второго повышения словарь стал стоить в два раза дороже, чем вначале. На сколько процентов повысили цену в первый раз, если во второй раз цена была повышена на 25%?

12. Сколько граммов воды надо добавить к 100 г 30%-ной соляной кислоты, чтобы получить 10%-ную кислоту?

13. Два экскаватора вырыли котлован за 24 дня. Первый экскаватор мог бы выполнить эту работу в 1,5 раза быстрее, чем второй. За сколько дней первый экскаватор мог бы выполнить эту работу?

14. Поезд должен был пройти 54 км. Пройдя 14 км, он был задержан на 10 мин у семафора. Увеличив первоначальную скорость на 10 км/ч, он прибыл на место назначения с опозданием на 2 мин. Определить первоначальную скорость.

15. Из пункта *A* выехал велосипедист со скоростью 25 км/ч. Через час из пункта *B*, находящегося на расстоянии 105 км от *A*, выехал навстречу первому второй велосипедист со скоростью 15 км/ч. Через сколько времени после старта второго встретятся велосипедисты?

16. Турист шел из пункта *A* в пункт *B* со скоростью 6 км/ч, а затем из пункта *B* в пункт *C* со скоростью 4 км/ч. Сколько километров всего прошел турист, если известно, что расстояние от *A* до *B* на 24 км больше, чем от *B* до *C*, и что средняя скорость движения туриста оказалась равной 5,25 км/ч?

17. Пароход должен был пройти 72 км с определенной скоростью. Первую половину пути он шел со скоростью на 3 км/ч меньшей, а вторую – на 3 км/ч большей, чем было запланировано. На весь путь пароход затратил 5 ч. На сколько минут опоздал пароход?

18. Теплоход прошел по течению реки 96 км и столько же против течения, затратив на весь путь 10 ч. Скорость течения реки равна 4 км/ч. Определить скорость теплохода в стоячей воде.

19. В банк положили вклад из расчета 3 % годовых. Какой доход (в процентах) принесет вклад через 4 года?

20. Население некоторой страны увеличивается ежегодно на 5 %. На сколько процентов увеличится население за 5 лет?

21. Банк начисляет ежегодно 3% от суммы вклада. Найти наименьшее число лет, за которое вклад вырастет более, чем на 10%.

22. В банк положен вклад из расчета 10% годовых. Через два года со счета была снята сумма, составляющая 21% от суммы первоначального вклада. Через какое наименьшее число лет после этого сумма вклада окажется больше первоначальной в 1,4 раза?

23. Население города ежегодно увеличивается на $\frac{1}{50}$ наличного числа жителей. Через какое наименьшее количество лет население города увеличится не менее чем на 10%?

24. Ежегодный прирост населения города составляет 20%. Через сколько лет население города удвоится?

25. Поезд прошел мимо наблюдателя за 6 с, а по мосту длиной 350 м проходил в течение 20 с. Найти скорость и длину поезда.

26. Из 22 кг свежих грибов получается 2,5 кг сухих грибов, содержащих 12% воды. Каков процент воды в свежих грибах?

27. На первом поле 65% площади засеяно овсом. На втором поле под овсом занято 45% площади. Известно, что на первом и втором полях вместе под овсом занято 53% общей площади. Какую часть всей засеянной площади составляет первое поле?

28. Число 51,2 трижды увеличивали на одно и то же число процентов, а затем трижды уменьшали на то же самое число процентов. В результате получилось число 21,6. На сколько процентов увеличивали, а затем уменьшали это число?

29. В группе 15 студентов, изучающих хотя бы один иностранный язык. 9 из них сдают английский язык, 8 – французский язык, а 2 студента изучают только немецкий язык. Сколько студентов изучают английский и французский языки одновременно?

30. Банк платит 40% годовых по срочным депозитам. Найти доход через 4 года от вклада 5 млн руб., если по истечении

каждого года проценты капитализируются, т.е. начисляемые проценты присоединяются к вкладу.

31. Из двух растворов соли разной концентрации общим объёмом 5 л отлили по 1,2 л. Каждый из отлитых объёмов был слит с остатком другого раствора, после чего процентное содержание соли в обоих растворах стало одинаковым. Какой объём имел каждый из растворов соли?

32. Два раствора, из которых первый содержал 800 г безводной серной кислоты, а второй 600 г безводной серной кислоты, соединили вместе и получили 10 кг нового раствора серной кислоты. Определить массу первого и второго растворов, вошедших в смесь, если известно, что процент содержания безводной серной кислоты в первом растворе на 10 % больше, чем процент содержания безводной серной кислоты во втором.

33. От двух кусков сплава с различным процентным содержанием меди, масса которых m кг и n кг, отрезано по куску равной массы. Каждый из отрезанных кусков сплавлен с остатком другого куска, после чего процентное содержание меди в обоих сплавах стало одинаково. Какова масса каждого из отрезанных кусков?

34. В сосуд ёмкостью 6 л налито 4 л 70%-ного раствора серной кислоты. Во второй сосуд той же ёмкости налито 3 л 90%-ного раствора серной кислоты. Сколько литров раствора нужно перелить из 2-го сосуда в первый, чтобы в нём получился r %-ный раствор серной кислоты? Найти все значения r при которых задача имеет решения.

35. В одном сплаве массы золота и серебра относятся как $1:2$, а в другом – как $2:3$. Какова должна быть масса (в граммах) каждого сплава, чтобы после совместной переплавки получилось 95 г нового сплава, содержащего 7 частей золота и 12 частей серебра?

36. От двух кусков сплавов, масса которых 12 кг и 8 кг с процентным содержанием в них олова p % и q % соответственно ($p \neq q$), отрезали по куску равной массы. Каждый из отрезанных кусков сплавлен с остатком другого

куска, после чего процентное содержание олова в обоих сплавах стало одинаковым. Определить массу каждого из отрезанных кусков.

37. Из колбы в пробирку отлили 1/3 раствора соли. Раствор в пробирке выпаривали, пока процентное содержание соли в нём не увеличилось в 2 раза. Получившийся раствор вернули в колбу, что увеличило процентное содержание соли в находившемся в колбе растворе на 2 %. Какое процентное содержание соли было в растворе первоначально?

38. Имелось два разных сплава меди. Процентное содержание меди в первом сплаве было на 40 % меньше, чем процентное содержание меди во втором сплаве. После того как их сплавили вместе, получили сплав, содержащий 36 % меди. Определить процентное содержание меди в первом и во втором сплавах, если известно, что меди в первом сплаве было 6 кг, а во втором 12 кг.

39. Одна бочка содержит смесь спирта с водой в отношении 2 : 3, а другая в отношении 3 : 7. По сколько вёдер нужно взять из каждой бочки, чтобы составить 12 вёдер смеси, в которой масса спирта и воды была бы в отношении 3 : 5?

40. Пять человек выполняют некоторую работу. Первый, второй и третий, работая вместе, выполняют всю работу за 7,5 ч, первый третий и пятый за 5 ч, первый, третий и четвёртый за 6 ч, второй, четвертый и пятый за 4 ч. За какой промежуток времени выполняют эту работу все пять человек, работая вместе?

Ответы: **1.** 14. **2.** 0. **3.** 1 м 90 см. **4.** 3 км. **5.** 70 км/ч. **6.** 6. **7.** 75. **8.** 25. **9.** 70. **10.** 270. **11.** 60. **12.** 200. **13.** 40. **14.** 50. **15.** 2 ч. **16.** 56. **17.** 12. **18.** 20. **19.** 12,55. **20.** 27,6. **21.** 4. **22.** 4. **23.** 5. **24.** 4. **25.** 90 км/ч; 150 м. **26.** 90. **27.** $\frac{2}{5}$. **28.** 50. **29.** 4. **30.** 14208000. **31.** 2 л и 3 л. **32.** 4 кг и 6 кг. **33.** $\frac{mn}{m+n}$ кг.

34. $\dfrac{4(r-70)}{90-r}$ л, задача имеет решения при $70 < r < 76\dfrac{2}{3}$.

35. 45 г и 50 г. **36.** 4,8 кг. **37.** 10 %. **38.** 20 % и 60 %.

39. 9 вёдер из первой бочки и 3 ведра из второй бочки.

40. За 3 ч.

Алгебраические преобразования

Разложите на множители (1 - 2):

1. $(2c+1)^3-27$. 2. $(p-2)^3+27$.

Выделите полный квадрат (3 - 4):

3. $3y^2+6y-8$. 4. $3x^2+2x+4$.

Произведите деление многочленов (5 - 6):

5. $(x^4+3x^3+7x^2+7x+6):(x^2+2x+3)$.

6. $(x^4-25x^2+60x-36):(x-1)$.

Выполните действия (7 - 20)

7. $\dfrac{(a^2-b^2)\cdot(a^2-ab+b^2)}{a-b}$. 8. $\dfrac{a^3-3a^2b+3ab^2-b^3}{a-b}$.

9. $\dfrac{a^3+3a^2b+3ab^2+b^3}{a+b}$.

10. $\left(\dfrac{x+5}{x^2-81}+\dfrac{x+7}{x^2-18x+81}\right):\left(\dfrac{x+3}{x-9}\right)^2+\left(\dfrac{7+x}{9+x}\right)$.

11. $\left(\dfrac{a+2}{a-2}\right):\left(\dfrac{6a}{a^3-8}+\dfrac{2a}{a^2+2a+4}+\dfrac{1}{2-a}\right)-\dfrac{4a+4}{a-2}$.

12. $\dfrac{a^{-1}-x^{-1}}{a^{-3}+x^{-3}}:\left(\dfrac{xa^{-2}+ax^{-2}}{x-a}\right)^{-1}$.

13. $\dfrac{x+2+\sqrt{x^2-4}}{x+2-\sqrt{x^2-4}}+\dfrac{x+2-\sqrt{x^2-4}}{x+2+\sqrt{x^2-4}}$.

14. $\left(\dfrac{1}{\sqrt{a}-4\sqrt{a^{-1}}}-\dfrac{2\sqrt[3]{a}}{\sqrt[3]{a^4}-\sqrt[3]{64a}}\right)^{-2}-\sqrt{a^2+8a+16}$.

15. $\left(\dfrac{\sqrt{a^2+1}}{a^2+b+1}-\dfrac{\sqrt{b}\left(\sqrt{a^2+1}-\sqrt{b}\right)^2}{\left(a^2+1\right)^2-b^2}\right)^{-1}-\sqrt{a^2+1}$.

16. $\dfrac{\left(1-\left(\dfrac{a}{b}\right)^{-2}\right)\cdot a^2}{\left(\sqrt{a}-\sqrt{b}\right)^2+2\sqrt{ab}}$.

17. $ab\sqrt[n]{a^{1-n}b^{-n}-a^{-n}b^{1-n}}\cdot\sqrt[n]{(a-b)^{-1}}$.

18. $\dfrac{\sqrt{\dfrac{1+a}{1-a}}+\sqrt{\dfrac{1-a}{1+a}}}{\sqrt{\dfrac{1+a}{1-a}}-\sqrt{\dfrac{1-a}{1+a}}}-\dfrac{1}{a}$.

19. $\dfrac{1}{\sqrt{a+2\sqrt{a-1}}}+\dfrac{1}{\sqrt{a-2\sqrt{a-1}}}$, *если* $1<a<2$.

20. $\sqrt[3]{\dfrac{x^3-3x+\left(x^2-1\right)\sqrt{x^2-4}}{2}}+\sqrt[3]{\dfrac{x^3-3x-\left(x^2-1\right)\sqrt{x^2-4}}{2}}$.

Ответы: **1.** $2(c-1)\left(4c^2+10c+13\right)$.

2. $(p+1)\left(p^2-7p+19\right)$. **3.** $3(y+1)^2-11$. **4.** $3\left(x+\dfrac{1}{3}\right)^2+3\dfrac{2}{3}$**.**

5. x^2+x+2. **6.** $x^3+x^2-24x+36$. **7.** a^3+b^3. **8.** $(a-b)^2$.

9. $(a+b)^2$. **10.** a^3-b^3. **11.** 1. 28. a. **12.** 1. **13.** x.

14. $4\sqrt{a}$. **15.** $\sqrt{b}$. **16.** $a-b$.

17. 1, если $n = 2k + 1$ или $n = 2k$ и $a > b$ и $ab > 0$;
-1, если $n = 2k$ и $a > b$ и $ab < 0$.

18. 0. **19.** $\dfrac{2}{2-a}$. **20.** x.

Задачи с параметрами

1. Для каждого значения параметра a определить число решений уравнения $ax+\frac{|x|}{x}=2a+1$. Кратные корни уравнения считаются одним решением.

2. Для каждого значения параметра a определить число решений уравнения $|x| = |x - 2|(a - 2)$. Кратные корни уравнения считаются одним решением.

3. Для каждого значения параметра a определить число решений уравнения $x-\frac{1}{|x|}=a-\frac{1}{a}$. Кратные корни уравнения считаются одним решением.

4. Для каждого значения параметра a определить число решений уравнения $ax^2+4|x|-5=0$. Кратные корни уравнения считаются одним решением.

5. Для каждого значения параметра a определить число решений уравнения $x^4-14x^2+49=a$. Кратные корни уравнения считаются одним решением.

6. Для каждого значения параметра a определить число решений уравнения $\sqrt{x-2}=ax$. Кратные корни уравнения считаются одним решением.

7. Для каждого значения параметра a определить число решений уравнения $\sqrt{ax-2}=-x$. Кратные корни уравнения считаются одним решением.

8. Найти все значения параметра p, когда уравнение $(p-1)\cdot 4^x-4\cdot 6^x+(p+2)\cdot 9^x=0$ имеет хотя бы одно решение.

9. При каких значениях параметра p функция

$f(x)=\lg\left((4-p)x^2-5x+\frac{5(1-p)}{8}\right)$ определена при всех x?

10. При каких значениях параметра a уравнение $\sin^2 4x+\left(a^2-3\right)\sin 4x+a^2-4=0$ имеет ровно четыре корня на отрезке $\left[\frac{3\pi}{2};2\pi\right]$?

11. Найти все значения параметра a, при каждом из которых система уравнений $\begin{cases} x^2+y^2=1, \\ y+|x|-a=0 \end{cases}$ имеет ровно 4 решения.

12. При каком действительном значении параметра a сумма квадратов корней уравнения $x^2-(a+1)x+a^2-\frac{1}{2}=0$ будет наибольшей?

13. Для каждого положительного значения параметра a решить неравенство $a^{x+2}+8a^{x-1}-4a^{-1}>a-2$ относительно x.

14. Решить неравенство $\sin^4 x+\cos^4 x>a$ относительно x.

15. Решить неравенство $x^{\log_a x}<a$ $(x\neq 1)$ относительно x.

16. Найти все значения параметра a, при которых ни одно решение неравенства $x^2-2(a+1)x+a^2+2a<0$ не удовлетворяет неравенству $x^2+2ax+a-4<0$.

17. Найти все значения параметра a, при которых система $\begin{cases} \sqrt{-x^2-5x-4}<-x, \\ x^2+(3-2a)x-7a-2=0 \end{cases}$ имеет единственное решение.

18. При каких значениях параметра m система неравенств $-6<\frac{2x^2+mx-4}{x^2-x+1}<4$ выполняется для всех действительных значений x?

19. Найти все значения параметра a, при каждом из которых множеством решений системы неравенств

$$\begin{cases} x^2-(2a-15)x+a^2-15a+54\le 0, \\ x^2-2(a-4)x-8a+14\le 0. \end{cases}$$

является отрезок единичной длины.

20. Найти все положительные числа a, для которых все различные неотрицательные значения x удовлетворяющие уравнению $\cos((5a\text{-}9)x) = = \cos((9a+17)x)$ и расположенные в порядке возрастания, образуют арифметическую прогрессию.

Ответы:

1. Если $a \le -1$ или $a > 0$, то одно решение; если $-1 < a < 0$, то два решения; если $a = 0$, то бесконечно много решений.

2. Если $a < 2$, то нет решений; если $a = 2$ или $a = 3$, то одно; если $2 < a < 3$ или $a > 3$, то два решения.

3. Если $a = 0$, то нет решений; если $a \in (-1-\sqrt{2}; 0) \bigcup (-1+\sqrt{2}; +\infty)$, то одно решение; если $a = -1 \pm \sqrt{2}$, то два; если $a \in \left(-\infty; -1-\sqrt{2}\right) \bigcup \left(0; -1+\sqrt{2}\right)$, то три решения.

4. Если $a < -0,8$, то нет решений; если $a \ge 0$ или $a = -0,8$, то два; если $-0,8 < a < 0$, то четыре решения.

5. Если $a < 0$, то нет решений; если $a = 0$ или $a > 49$, то два; если $0 < a < 49$, то четыре; если $a = 49$, то три решения.

6. Если $a < 0$ или $a > \dfrac{\sqrt{2}}{4}$, то нет решений; если $a = 0$ или $a = \dfrac{\sqrt{2}}{4}$, то одно; если $0 < a < \dfrac{\sqrt{2}}{4}$, то два решения.

7. Если $-2\sqrt{2} < a < +\infty$, то нет решений; если $a = -2\sqrt{2}$, то одно; если $a < -2\sqrt{2}$, то два решения.

8. (-2; 2]. **9.** $(-\infty; -1)$. **10.** ± 2. **11.** $a \in \left(1; \sqrt{2}\right)$. **12.** 1.

13. Если $0 < a < 1$, то $x \in \left(-\infty; -\log_a(a+2)\right)$; если $a = 1$, то $x \in R$; если $a > 1$, то $x \in \left(-\log_a(a+2); +\infty\right)$.

14. Если $a \le \frac{1}{2}$, то R; если $a \ge 1$, то $\varnothing$; если $\frac{1}{2} < a < 1$, то $\left(-\frac{\varphi}{4} + \frac{\pi n}{2}; \frac{\varphi}{4} + \frac{\pi n}{2}\right)$, $n \in Z$, $\varphi = \arccos(4a - 3)$.

15. Если $0 < a < 1$, то $x \in (0; a) \cup \left(\frac{1}{a}; +\infty\right)$; если $a > 1$, то $x \in \left(\frac{1}{a}; 1\right) \cup (1; a)$.

16. $(-\infty; -3] \cup [1; +\infty)$. **17.** $(-\infty; -2) \cup \left(-\frac{4}{5}; +\infty\right)$.

18. (-2; 4). **19.** $\pm\sqrt{7}$. **20.** $\frac{1}{19}; \frac{5}{12}; \frac{9}{5}; \frac{22}{3}; 35$.

Системы уравнений

Решите системы уравнений (1 – 4):

1. $\begin{cases} 2x + 11y = -2, \\ x - 3y = -1. \end{cases}$

2. $\begin{cases} 18x + 23y = 46, \\ 3x - 11y = -22. \end{cases}$

3. $\begin{cases} 2y - 3x = 318, \\ \dfrac{x}{y} = 0,(13). \end{cases}$

4. $\begin{cases} y - x = 55, \\ \dfrac{x}{y} = 0{,}8(7). \end{cases}$

5. Найдите все значения параметра *a*, при которых система уравнений имеет единственное решение $\begin{cases} (a-1)^2 x + y = 2, \\ x + y = 2a - 2. \end{cases}$

6. Найдите все значения параметра *a*, при которых система уравнений не имеет решений $\begin{cases} (a+1)^2 x + y = 2, \\ x + y = 2a + 2. \end{cases}$

7. Найдите все значения параметра a, при которых система уравнений имеет бесконечно много решений

$$\begin{cases} (a-1)^2 x + y = 2, \\ x + y = 2a - 2. \end{cases}$$

Решите системы уравнений (8 – 21):

8. $\begin{cases} |y-10| - |x+6| = 10, \\ \dfrac{y-30}{x-4} = 2. \end{cases}$

9. $\begin{cases} |2x+7| + \dfrac{1}{7}|y-7| = 6, \\ \dfrac{y+14}{x+5} = 14. \end{cases}$

10. $\begin{cases} 2|x+1| = 6 + 2y, \\ |y+3| + 4x = -10. \end{cases}$

11. $\begin{cases} |y+2| - 10x - \dfrac{y}{2} + 2 = 0, \\ |x-2| + 12x - y - 1 = 0. \end{cases}$

12. $\begin{cases} \sqrt{2x+y+2} = 3, \\ \sqrt{x+2y+5} = y - x. \end{cases}$

13. $\begin{cases} \sqrt{\dfrac{x}{y}} + \sqrt{\dfrac{y}{x}} = \dfrac{5}{2}, \\ x + y = 10. \end{cases}$

14. $\begin{cases} 3^y \cdot 2^x = 972, \\ y - x = 3. \end{cases}$

15. $\begin{cases} 3^x \cdot 25^y = 5625, \\ 5^x \cdot 9^y = 2025. \end{cases}$

16. $\begin{cases} 3^{2x} - 2^y = 725, \\ 3^x - 2^{0,5y} = 25. \end{cases}$

17. $\begin{cases} \log_3 2x - \log_3 \dfrac{2}{y} = 1, \\ 4x - y = 1. \end{cases}$

18. $\begin{cases} \log_2 x + \log_2 y = 4, \\ 2\lg x - \lg y + \lg 2 = 0. \end{cases}$

19. $\begin{cases} x + \log_2 y = y + \log_2 x, \\ x\log_2 32 + \log_2 x = 2y + \log_2 y. \end{cases}$

20. $\begin{cases} y + 3^{-x+2} = 2x + 2^{-y+4}, \\ 5y + 2^{-y+4} = 10x + 3^{-x+2}. \end{cases}$

21. $\begin{cases} y^x = 3, \\ \log_3 x - 2 + y = 0. \end{cases}$

Ответы: **1.** (-1; 1). **2.** (0; 2). **3.** (26; 198). **4.** (393; 450). **5.** $a \in (-\infty; 0) \cup (0; 2) \cup (2; +\infty)$. **6.** –2. **7.** 2. **8.** (-16; 10).

9. (-2; 28). **10.** (-3; -1). **11.** (1; 12). **12.** (1; 5).
13. (8; 2), (2; 8). **14.** (2; 5). **15.** (2; 2). **16.** (3; 2). **17.** (1; 3).
18. (2; 8). **19.** (1; 2). **20.** (2; 4). **21.** (3; 1).

Уравнения

Решите уравнения (1 – 26):

1. $x^3 + 27 = 0$. 2. $x^2 + 6x - 1 = 0$.
3. $(x - 5)^2 = 400$. 4. $x^6 - 3x^3 + 2 = 0$.
5. $x^4 + x^3 - 5x - 5 = 0$. 6. $x^4 - 16 - 5x(x^2 - 4) = 0$.
7. $x^4 - 2x^3 - 3 = 0$. 8. $6x^3 + 7x^2 - 1 = 0$.
9. $x^4 - 4x^3 + 27x^2 + 44x - 14 = 0$.
10. $x^5 = \dfrac{133x - 78}{133 - 78x}$. 11. $(2x - 3)^4 + (2x - 5)^4 = 12$.
12. $(x^2 + 2x)^2 - 7(x^2 + 2x) + 6 = 0$.
13. $(x^2 - 2x + 7)^2 - (x^2 - 5x + 7) - 2 = 0$.
14. $x^2 + 2x + 7 = (x^2 + 2x + 4)(x^2 + 2x + 3)$.
15. $\dfrac{1}{2x^2 - x + 1} + \dfrac{3}{2x^2 - x + 3} = \dfrac{10}{2x^2 - x + 7}$.
16. $\dfrac{x^2 + 2x + 7}{x^2 + 2x + 3} = 4 + 2x + x^2$.
17. $(x - 2)(x + 1)(x + 4)(x + 7) = 19$.
18. $(6x + 5)^2(3x + 2)(x + 1) = 35$.
19. $\left(\dfrac{x}{x+1}\right)^2 + \left(\dfrac{x+1}{x}\right)^2 = \dfrac{17}{4}$.
20. $(x^2 + 4x + 8)^2 + 3x(x^2 + 4x + 8) + 2x^2 = 0$.
21. $7\left(x + \dfrac{1}{x}\right) - 2\left(x^2 + \dfrac{1}{x^2}\right) = 9$.
22. $x^4 + x^3 - 10x^2 + x + 1 = 0$.
23. $x^4 - x^3 - 10x^2 + 2x + 4 = 0$.
24. $x^3 + \dfrac{1}{x^3} = 6\left(x + \dfrac{1}{x}\right)$.

25. $\dfrac{x^2-6x-9}{x}=\dfrac{x^2-4x-9}{x^2-6x-9}$.

26. $x^2+\dfrac{25x^2}{(x+5)^2}=11$.

Ответы: **1.** –3. **2.** $-3\pm\sqrt{10}$. **3.** –15; 25. **4.** 1; $\sqrt[3]{2}$.
5. -1; $\sqrt[3]{5}$. **6.** ±2; 1; 4. **7.** -1; $1\pm\sqrt[3]{2}$. **8.** -1; $-\dfrac{1}{2}$; $\dfrac{1}{3}$.
9. 1; 7; $-2\pm\sqrt{6}$. **10.** ±1; $-\dfrac{6}{13}$; $\dfrac{13}{6}$. **11.** $2\pm\dfrac{1}{2}\sqrt{\sqrt{14}-3}$.
12. $-1\pm\sqrt{2}$; $-1\pm\sqrt{7}$. **13.** $\dfrac{5\pm\sqrt{5}}{2}$. **14.** –1. **15.** 1; $-\dfrac{1}{2}$.
16. –1. **17.** $\dfrac{-5\pm\sqrt{85}}{2}$; $\dfrac{-5\pm\sqrt{5}}{2}$. **18.** $\dfrac{-5\pm\sqrt{21}}{6}$.
19. -2; $-\dfrac{2}{3}$; $-\dfrac{1}{3}$; 1. **20.** –4; -2. **21.** 2; $\dfrac{1}{2}$.
22. $-2\pm\sqrt{3}$; $\dfrac{3\pm\sqrt{5}}{2}$. **23.** $\dfrac{3\pm\sqrt{17}}{2}$; $-1\pm\sqrt{3}$.
24. $\dfrac{3\pm\sqrt{5}}{2}$; $\dfrac{-3\pm\sqrt{5}}{2}$. **25.** -1; 9; $\dfrac{5\pm\sqrt{61}}{2}$. **26.** $\dfrac{1\pm\sqrt{21}}{2}$.

ОПИСАНИЕ И ПРОГРАММА КУРСА «МАТЕМАТИКА»

Учебное пособие «Математика» авторов А.И. Громова, В.И. Кузьминова интегрировано в учебно-методический комплекс «Математика», предназначенный для подготовки иностранных граждан к освоению профессиональных образовательных программ на русском языке в высшей школе РФ по техническому, естественнонаучному, медико-биологическому и экономическому профилям обучения.

Программа курса разработана в соответствии требованиями к освоению дополнительных общеобразовательных программ, обеспечивающих подготовку иностранных граждан и лиц без гражданства к освоению профессиональных образовательных программ на русском языке (утв. приказом Министерства образования и науки РФ от 3 октября 2014 г. N 1304).

Цель программы – формирование фундаментальных математических знаний, умений и навыков, обеспечивающих прочное и сознательное овладение учащимися курса математики в системе высшего образования.

Реализация этой цели предполагает решение следующих основных задач:

- систематизировать имеющиеся и восполнить недостающие у студентов математические знания, привести их в соответствие с требованиями, предъявляемыми высшей школой к студентам первого курса;
- обеспечить овладение студентами терминологией, лексикой и конструкциями русского языка, характерными для языка математики;
- способствовать формированию научного мировоззрения и развитию математического мышления;
- прививать навыки самостоятельной работы с учебной литературой и электронными материалами.

Студенты должны **ЗНАТЬ:**

- язык предмета (современную математическую символику и лексику);
- предусмотренные программой определения понятий, формулы, правила, формулировки и доказательства теорем.

Студенты должны **УМЕТЬ:**

1) выполнять арифметические действия с целыми числами (находить НОК и НОД), с обыкновенными и десятичными дробями и смешанными числами, находить приближенные значения арифметических выражений;
2) находить неизвестный член пропорции, решать простейшие задачи на проценты, делить число на части пропорционально данным числам;
3) выполнять действия с алгебраическими дробями и выражениями, содержащими степени с дробными показателями (арифметическими корнями), показательную, логарифмическую и тригонометрическую функции;
4) решать предусмотренные программой типы уравнений и неравенств;
5) строить графики основных элементарных функций;
6) решать задачи элементарной геометрии, а также некоторые типы задач с помощью производной и интеграла.

Содержание программы

1. Числовые множества

1.1. Понятие множества. Пустое множество. Подмножество. Равенство множеств. Операции над множествами: объединение, пересечение, разность.

1.2. Множества натуральных, целых, рациональных, действительных чисел. Числовая ось. Модуль числа.

1.3. Арифметические действия над числами: сложение, вычитание, умножение, деления. Их свойства. Отношения «больше» и «меньше».

1.4. Делимость чисел. Признаки делимости. Простые и составные числа. Четные и нечетные числа. НОД и НОК. Взаимно-простые числа.

1.5. Обыкновенные дроби. Правильные и неправильные дроби. Смешанные числа. Основное свойство дроби. Сокращение дробей. Действия с обыкновенными дробями. Десятичные дроби. Действия с десятичными дробями. Округление чисел. Приближенное значение числа. Абсолютная и относительная погрешности. Действия над приближенными значениями чисел.

1.6. Отношения. Пропорции. Проценты. Основные задачи на проценты.

2. Алгебраические операции. Тождественные преобразования алгебраических выражений

2.1. Равенство и тождество. Их свойства.

2.2. Степень с натуральным и целым показателем. Арифметический корень n-й степени, его свойства. Простейшие преобразования арифметических корней. Степень с рациональным показателем. Свойства степеней.

2.3. Логарифм. Определение, основное логарифмическое тождество. Свойства логарифмов.

2.4. Алгебраические выражения. Одночлен и многочлен. Область определения алгебраического выражения.

2.5. Преобразования алгебраических выражений и действия над ними. Формулы сокращенного умножения. Разложение многочленов на множители. Выделение квадрата двучлена. Освобождение от иррациональности числителя или знаменателя дробного выражения.

2.6. Делимость многочленов. Теорема Безу. Следствия. Рациональные корни многочленов. Разложение правильной рациональной дроби в сумму простейших дробей.

3. Функции

3.1. Понятие функции. Область определения и область значений функции. Прямоугольная система координат. График функции. Способы задания функции. Простейшие свойства функций. Понятие обратной функции. Свойства взаимно обратных функций. Понятие сложной функции.

3.2. Линейная, квадратичная, степенная, дробно-линейная, показательная и логарифмическая функции. Графики и свойства этих функций.

3.3. Тригонометрические функции числового аргумента. Знаки тригонометрических функций по четвертям, значения для некоторых аргументов. Четность, нечетность, периодичность. Основное тригонометрическое тождество. Теоремы сложения; формулы приведения; формулы тригонометрических функций двойного и половинного аргументов; формулы преобразования суммы и разности тригонометрических функций в произведение и обратного преобразования; выражение тригонометрических функций через тангенс половинного аргумента. Тождественные преобразования тригонометрических выражений Обратные тригонометрические функции. Графики и свойства тригонометрических и обратных тригонометрических функций.

3.4. Простейшие преобразования графиков: параллельный перенос, сжатие и растяжение вдоль координатных осей. Построение графиков функций вида $y = f(|x|)$, $y = |f(x)|$.

4. Уравнения и системы уравнений

4.1. Уравнение. Область допустимых значений неизвестного. Решение уравнений. Равносильные уравнения. Теоремы о равносильности уравнений.

4.2. Линейное уравнение с одной неизвестной. Квадратное уравнение. Формулы корней квадратного уравнения. Свойства корней (теорема Виета). Уравнения, приводимые к квадратным. Дробно-рациональные, иррациональные уравнения, их решение.

4.3. Трансцендентные уравнения. Показательные и логарифмические уравнения и их решение. Тригонометрические уравнения и их решение

4.4. Система уравнений. Методы решения системы двух линейных уравнений с двумя неизвестными. Геометрическая интерпретация. Системы нелинейных уравнений с двумя неизвестными и их решение. Решение простейших систем показательных и логарифмических уравнений.

5. Неравенства и системы неравенств

5.1. Числовые неравенства и их свойства. Действия с числовыми неравенствами.

5.2. Алгебраические неравенства. Область допустимых значений неизвестных. Решение неравенств. Равносильные неравенства. Теоремы о равносильности неравенств.

5.3. Линейные, квадратные неравенства и их решение. Неравенства, содержащие неизвестное под знаком модуля, их решение. Решение рациональных неравенств методом интервалов. Решение показательных, логарифмических и иррациональных неравенств.

5.4. Системы неравенств. Решение систем и совокупностей алгебраических неравенств.

6. Элементы математического анализа

6.1. Числовая последовательность. Определение. Способы задания. Виды последовательностей (конечная, бесконечная, возрастающая, убывающая, ограниченная).

6.2. Арифметическая и геометрическая прогрессии. Свойства членов прогрессий. Формулы общего члена и суммы n первых членов арифметической и геометрической прогрессий.

6.3. Понятие о пределе числовой последовательности. Единственность предела. Теоремы о пределах последовательности. Сумма бесконечно убывающей геометрической прогрессии.

6.4. Понятие о пределе функции $y = f(x)$ при $x \to a$ и $x \to \infty$. Теоремы о пределах функции. Раскрытие неопределенностей.

6.5. Производная функции. Механический и геометрический смысл производной. Производная суммы, произведения и частного двух функций, сложной функции. Таблица производных некоторых элементарных функций.

6.6. Первообразная функция. Неопределенный интеграл. Определенный интеграл. Формула Ньютона-Лейбница. Применение определенного интеграла к вычислению площадей.

7. Элементы векторной алгебра

7.1. Вектор. Способы задания вектора. Координаты вектора. Модуль вектора. Действия с векторами: сложение, вычитание, умножение вектора на число.

7.2. Скалярное произведение векторов. Свойства скалярного произведения. Угол между векторами. Условия перпендикулярности двух векторов.

8. Элементы планиметрии

8.1. Основные понятия планиметрии. Геометрическая фигура. Равенство геометрических фигур. Аксиомы планиметрии.

8.2. Треугольник и его элементы. Теоремы синусов и косинусов. Теорема Пифагора. Площадь треугольника.

8.3. Параллелограмм, ромб, прямоугольник, квадрат, трапеция. Их свойства. Площади четырехугольников.

8.4. Окружность. Дуга, хорда, секущая, касательная. Вписанные и описанные многоугольники. Круг. Площадь круга и площадь сектора.

9. Метод математической индукции и элементы комбинаторики

9.1. Метод полной математической индукции.

9.2. Соединения: размещения, перестановки, сочетания. Бином Ньютона. Основные свойства разложения бинома. Треугольник Паскаля.

10. Комплексные числа

10.1. Множество комплексных чисел. Геометрическая интерпретация. Алгебраическая и тригонометрическая формы комплексного числа. Действия над комплексными числами.

10.2. Решение уравнений в поле комплексных чисел. Основная теорема алгебры.

СОДЕРЖАНИЕ

Учебное издание

Александр Иванович Громов
Валерий Иванович Кузьминов

МАТЕМАТИКА

Издание четвертое, переработанное и дополненное

Редактор *Ж.В. Медведева*
Технический редактор *Н.А. Ясько*
Компьютерная верстка *М.Н. Заикина*
Дизайн обложки *Ю.Н. Ефремова*

Тематический план изданий
учебной и научной литературы 2017 г., № 76

Подписано в печать 25.10.2017 г. Формат 60×90/16. Печать офсетная.
Усл. печ. л. 31,5. Тираж 500 экз. Заказ 1044

Российский университет дружбы народов
115419, ГСП-1, г. Москва, ул. Орджоникидзе, д. 3

Типография РУДН
115419, ГСП-1, г. Москва, ул. Орджоникидзе, д. 3, тел. (495) 952-04-41

Для заметок

Для заметок

Для заметок