

А.П. Ефремов

**ЗАКОНЫ ФИЗИКИ
В МАТЕМАТИКЕ
ГИПЕРКОМПЛЕКСНЫХ ЧИСЕЛ
И ОБЩАЯ ТЕОРИЯ МЕХАНИКИ**

Москва
Российский университет дружбы народов
2014

УДК 512.62:530.12:531.01(035.3)
ББК 22.144+22.313/314
Е92

Утверждено
РИС Ученого совета
Российского университета
дружбы народов

Рецензенты:

доктор физико-математических наук, профессор
К.А. Бронников (ВНИИМС);

доктор физико-математических наук, профессор *Ю.С. Владимиров*
(физический факультет МГУ имени М.В. Ломоносова);

Всероссийский НИИ метрологических стандартов

Ефремов, А. П.

Е92 Законы физики в математике гиперкомплексных чисел
и общая теория механики : монография / А. П. Ефремов. –
Москва : РУДН, 2014. – 134 с. : ил.
ISBN 978-5-209-06261-5

Работа имеет обзорный характер. В компактной форме даны сведения об алгебрах гиперкомплексных чисел: кватернионов, бикватернионов, двойных и дуальных чисел. В частности, отмечено, что условие стабильности алгебр относительно допустимых преобразований фрактального базиса, записанное в физических единицах, оказывается эквивалентным уравнениям квантовой и классической механики. Продемонстрировано, что изоморфизм группы инвариантности умножения кватернионов и группы Лоренца имеет своим следствием формулировку векторной версии теории относительности, что упрощает решение задач релятивистской механики в неинерциальных системах отсчета. Наконец показано, что уравнения типа Коши–Римана для функции кватернионного переменного в точности повторяют запись вакуумных уравнений Максвелла, а тензор кривизны кватернионного пространства с неметричностью идентичен выражению для напряженности поля Янга–Миллса.

Издание предназначено для студентов-математиков, аспирантов, научно-педагогических работников, занимающихся математикой, теоретической и математической физикой.

УДК 512.62:530.12:531.01(035.3)
ББК 22.144+22.313/314

ISBN 978-5-209-06261-5

© Ефремов, А.П., 2014
© Российский университет дружбы народов,
Издательство, 2014

ПРЕДИСЛОВИЕ

В предлагаемой монографии представлены результаты многолетнего изучения и исследования автором одной из областей фундаментальной математики – множества ассоциативных алгебр гиперкомплексных чисел, главным образом кватернионов и бикватернионов.

Поскольку автор по своей основной специальности является физиком-теоретиком, от его внимания не ускользнуло следующее удивительное обстоятельство. Многие характерные для этой «гиперкомплексной среды» формулы – чисто математические соотношения – оказались весьма похожими на формулы известных физических законов, ранее записанных по результатам анализа многих экспериментов (эмпирическая природа), либо как следствие глубокого осмысления известных, но необъясненных физических фактов и последующего «гениального озарения» (эвристическая природа).

Конечно, в математическом – безразмерном – формате сходство этих соотношений сводится лишь к внешним признакам – это просто одинаковые алгебраические и дифференциальные уравнения или их системы. Однако введение естественных физических единиц и масштабов превращает эти соотношения в точные или «чуть подправленные» законы физики: квантовой, классической и релятивистской механики, теории относительности, теории векторных калибровочных полей.

Замечательная особенность такого подхода к выводу известных уравнений состоит в том, что он не требует использования вариационной процедуры и искусственного построения лагранжианов и функционалов действия, поскольку, как отмечено выше, эти эмпирические и эвристические соотношения являются естественными атрибутами «гипер-

комплексной среды», своим существованием определяя специфику ее свойств.

Факт наличия целой серии «бесспорно физических» уравнений в чистой математике сам по себе представляется значащим и заслуживающим пристального внимания. В привлечении внимания и, возможно, в мотивации к новому осмыслению законов природы и состоит первая цель данной монографии.

Вторая цель – дать представление об иных вариантах получения информации о физическом строении мира, следовательно, о других – не только исторически сложившихся – методах изложения физических теорий, тем более что в методах, привлекающих гиперкомплексные числа, имманентно заложена возможность геометризации и визуализации объектов, традиционно считавшихся в физике абстрактными.

Наконец, есть и третья цель: попытаться использовать чистую математику для «улучшения» собственно законов физики, ибо, как показано в тексте книги, «математические законы физики» не всегда точно соответствуют известным «физическим законам», что может дать ориентиры для новых исследований.

Монография содержит два раздела. Первый раздел включает математические и физико-теоретические исследования; здесь достаточно подробно рассмотрена собственно «гиперкомплексная среда», в которой отслежены формулы законов из различных областей физики. Второй раздел – скорее, философский, в нем обсуждаются проблемы геометризации физики и факт существования фрактального пространства; здесь также детально изложена логическая цепочка превращения базовых соотношений, характерных для фрактальной поверхности, в уравнения «общей теории механики», включающей все традиционные разделы.

Основные результаты, приведенные в данной книге, опубликованы в серии статей в период 1983–2014 гг.

Раздел 1

**ГИПЕРКОМПЛЕКСНЫЕ ЧИСЛА
КАК СРЕДА ОБИТАНИЯ ЗАКОНОВ ФИЗИКИ**

«...Пытаясь приспособить кватернионную технику для развития физической теории, я обнаружил, что эта техника очень неудобна. Она была в своей векторной части антифизической и неестественной и не гармонировала с привычной скалярной математикой. Поэтому я совершенно оставил кватернионы...»¹.

Оливер Хэвисайд

Введение

Цель первого раздела – в сжатой форме представить результаты более чем 30-летней работы автора по изучению математики гиперкомплексных чисел и их взаимосвязи с формулировкой физических законов. При этом имеется в виду отнюдь не методическая процедура записи известных законов в новом формате, а поиск и анализ таких имманентно присущих данной математической среде соотношений, которые встречаются в физической науке в виде эмпирических или эвристических формулировок или имеют сходные с ними черты.

Выделенной в этом смысле оказывается математика кватернионов, удовлетворяющих соотношениям последней по размерности ассоциативной – но уже некоммутативной – алгебре с делением. Исследования показали удивительное сходство целого ряда формул этой математики с известными «точными» («нестатистическими») законами физики. Возможной причиной этого, вероятно, является почти сверхъестественная «геометричность» кватернионной математики. Детальный анализ показал, что эта математика естественным образом несет в себе не только привычные черты трехмерно-го физического мира, но, как представляется, и «более фун-

¹ Heaviside O. Electromagnetic theory. L.: The Electrician, Co. Vol. III. P. 519 (1912).

даментальных», «догеометрических» структур, которые также допускают визуальное представление, облегчая тем самым восприятие и понимание таких абстрактных разделов физики, как аналитическая и квантовая механика.

Более того, наличие точных математических соотношений, имеющих внятный геометрический смысл, дает (с известной степенью успеха) шанс вносить коррекцию в формулировки соотношений физики и выстраивать соответствующие модели, в том числе, отличные от традиционных.

Работа организована следующим образом. Глава 1 посвящена краткому описанию систем гиперкомплексных чисел. В частности, в параграфе 1 приведены основные соотношения и описаны специфические черты кватернионной математики. В параграфе 2 с достаточной детализацией представлена процедура введения фундаментальной предгеометрической (фрактальной) поверхности, единственный локальный базис которой (диада) служит основой для определения единиц всех ассоциативных алгебр. В параграфе 3 даны общие сведения о трехмерной дифференциальной геометрии кватернионных пространств. В главе 2 рассматривается связь соотношений математики гиперкомплексных чисел и формул, описывающих физические закономерности. В параграфе 4 показано, что требование стабильности базисов (единиц) ассоциативных алгебр эквивалентно, в зависимости от масштаба, уравнению квантовой или классической механики. В параграфе 5, на базе группы комплексного вращения, изоморфной группе Лоренца и сохраняющей правило кватернионного умножения, сформулирована векторная версия теории относительности. В параграфе 6 продемонстрировано, что соотношения, характерные для «калибровочных» полей – электромагнитного поля и поля Янга–Миллса, обнаруживаются в теории функций кватернионного переменного и геометрии кватернионных пространств. Итоги работы подводятся в заключении к данному разделу.

Глава 1

МАТЕМАТИЧЕСКАЯ СРЕДА ГИПЕРКОМПЛЕКСНЫХ ЧИСЕЛ

В этой части будут рассмотрены понятия гиперкомплексных чисел, указан ряд их представлений, а также приведены основные соотношения, свойственные соответствующим алгебрам. При этом, по возможности, эти сведения будут соотноситься с геометрическими структурами и объектами, которые, как представляется автору, имеют непосредственное отношение к строению физического мира.

1. Общие сведения о гиперкомплексных числах

Для описания результатов физических экспериментов, имеющих дело с реальными объектами и измеряемыми величинами, традиционно (и обоснованно) используются действительные числа. В то же время комплексные числа активно используются «на промежуточном» вычислительном уровне в целом ряде физических теорий, сформулированных в XX веке и актуальных сегодня. К таковым относятся квантовая механика, классическая теория фермионных полей, квантовая теория поля и др.; определенная тенденция к применению комплексных чисел наметилась даже в классической теории гравитации.

Алгебры действительных и комплексных чисел хорошо изучены и по свойствам похожи: это коммутативные и ассоциативные (по умножению) алгебры с делением, хотя два этих множества чисел базируются на различном числе единиц. Известны и соответствующие геометрические образы, для действительных чисел – это непрерывная бесконеч-

ная линия, для комплексных чисел бесконечная или конечная (сфера Римана) поверхность. Впрочем, ниже будет показано, что детальное изучение структуры мнимых единиц приводит к еще одному – весьма нетрадиционному – образу комплексного числа в виде «конической передачи».

Гиперкомплексными естественно называть числа, имеющие большее число базовых единиц, чем числа комплексные. К таким числам обычно относят числа, подчиненные «хорошим» алгебрам: кватернионы, имеющие четыре базовые единицы, и октонионы (алгебра Кэли), базирующиеся на восьми единицах. Однако в сегодняшней научной литературе к гиперкомплексным зачастую относят и специфические (экзотические) числа с двумя базовыми единицами (дуальные и двойные числа), а также бикватернионы, построенные на кватернионных единицах, но с комплексными коэффициентами.

Четыре «хорошие» алгебры – действительных, комплексных, кватернионных и октонионных чисел иногда называют исключительными. Размерность этих алгебр задается числом базовых единиц, ее можно представить показательным рядом с основанием 2 и целым показателем степени (табл. 1).

Таблица 1

Алгебра	Размерность алгебры $n = 2^p$	Показатель степени p
Действительные числа	$1 = 2^0$	0
Комплексные числа	$2 = 2^1$	1
Кватернионы	$4 = 2^2$	2
Октонионы	$8 = 2^3$	3

Здесь особое внимание будет уделено кватернионам.

Кватернионы

Кватернион (в декартовой гамильтоновой форме) – это математический объект вида $q = a + b\mathbf{i} + c\mathbf{j} + d\mathbf{k}$, где a, b, c, d – действительные числа, причем a есть множитель действительной единицы 1 (которая часто опускается в записи), величины $\mathbf{i}, \mathbf{j}, \mathbf{k}$ – мнимые кватернионные единицы: $\mathbf{i}^2 = \mathbf{j}^2 = \mathbf{k}^2 = -1$. Для кватернионных единиц постулированы следующие правила умножения

$$\begin{aligned} \mathbf{i}\mathbf{i} = \mathbf{i}\mathbf{i} = \mathbf{i}, \quad \mathbf{j}\mathbf{j} = \mathbf{j}\mathbf{j} = \mathbf{j}, \quad \mathbf{k}\mathbf{k} = \mathbf{k}\mathbf{k} = \mathbf{k}, \\ \mathbf{i}\mathbf{j} = -\mathbf{j}\mathbf{i} = \mathbf{k}, \quad \mathbf{j}\mathbf{k} = -\mathbf{k}\mathbf{j} = \mathbf{i}, \quad \mathbf{k}\mathbf{i} = -\mathbf{i}\mathbf{k} = \mathbf{j}, \end{aligned} \quad (1)$$

видно, что умножение, вообще говоря, некоммутативно. Таким образом, полная таблица умножения кватернионных единиц (вместе с $1^2 = 1$) постулируется в виде 16 равенств. Запись кватернионных единиц в гамильтоновой форме громоздка, более компактна векторная форма $\mathbf{i}, \mathbf{j}, \mathbf{k} \rightarrow \mathbf{q}_1, \mathbf{q}_2, \mathbf{q}_3 \rightarrow \mathbf{q}_k$, где строчные латинские индексы изменяются от одного до трех: $j, k, l, m, n \dots = 1, 2, 3$. Тогда произвольный кватернион имеет вид суммы скалярной (a) и векторной ($b_k \mathbf{q}_k$) частей

$$q \equiv a + b_k \mathbf{q}_k,$$

$a, b_k \in \mathbf{R}$, а таблица умножения (1) записывается короче

$$1 \mathbf{q}_k = \mathbf{q}_k 1 = \mathbf{q}_k, \quad \mathbf{q}_k \mathbf{q}_l = -\delta_{kl} + \varepsilon_{klj} \mathbf{q}_j; \quad (2)$$

здесь по повторяющимся индексам есть суммирование, $\delta_{kl}, \varepsilon_{jkl}$ – 3D-символы Кронекера и Леви–Чивиты.

С кватернионами возможно осуществлять такие же действия, как и с комплексными числами. Сравнение кватернионов сводится лишь к определению их равенства: два кватерниона равны, если соответственно равны их коэффициен-

ты при каждой из единиц. Сложение (вычитание) кватернионов осуществляется покомпонентно: соответственно складываются (вычитаются) коэффициенты при каждой единице. Операция сложения перестановочна. Умножаются кватернионы как многочлены, но с использованием приведённой выше таблицы умножения для кватернионных единиц (1) или (2); умножение некоммутативно, поэтому приходится говорить о правом и левом произведении.

Как и для комплексных чисел, для кватернионов вводится операции сопряжения.

Всякому кватерниону $q = a + b_k \mathbf{q}_k$ можно поставить в соответствие сопряжённый ему кватернион $\bar{q} \equiv a - b_k \mathbf{q}_k$. Произведение кватерниона на сопряжённый есть действительное число; арифметический квадратный корень из этого числа называют модулем кватерниона $|q| = \sqrt{q\bar{q}} = \sqrt{a^2 + b_k b_k}$. Квадрат модуля кватерниона носит название нормы $q\bar{q} = |q|^2$; отсюда следует выражение для кватерниона, обратного исходному $q^{-1} = \bar{q}/|q|^2$. Таким образом, для двух кватернионов q_1 и q_2 возможно определить деление, которое, как и умножение, оказывается правым и левым $(q_1 / q_2)_{right} = q_1 \bar{q}_2 / |q_2|^2$, $(q_1 / q_2)_{left} = \bar{q}_2 q_1 / |q_2|^2$.

Если кватернион q представляет собой произведение сомножителей $q_1 = a + b_k \mathbf{q}_k$ и $q_2 = c + d_k \mathbf{q}_k$, то из определения нормы следует

$$\begin{aligned} |q|^2 &= |q_1 q_2|^2 = (q_1 q_2) \overline{(q_1 q_2)} = \\ &= q_1 q_2 \bar{q}_2 \bar{q}_1 = q_1 \bar{q}_1 q_2 \bar{q}_2 = |q_1|^2 |q_2|^2, \end{aligned} \quad (3a)$$

т.е. модуль произведения кватернионов равен произведению модулей сомножителей. В развернутом виде – это известное

тождество четырёх квадратов: норма произведения равна произведению норм, или (читая справа налево) произведение суммы четырёх квадратов на сумму четырёх квадратов есть снова сумма четырёх квадратов

$$\begin{aligned}
 & (ac - b_1d_1 - b_2d_2 - b_3d_3)^2 + (ad_1 + cb_1 + b_2d_3 - b_3d_2)^2 + \\
 & + (ad_2 + cb_2 + b_3d_1 - b_1d_3)^2 + (ad_3 + cb_3 + b_1d_2 - b_2d_1)^2 = \quad (36) \\
 & = (a^2 + b_1^2 + b_2^2 + b_3^2)(c^2 + d_1^2 + d_2^2 + d_3^2).
 \end{aligned}$$

Здесь стоит напомнить, что «тождества квадратов» существуют лишь в четырех алгебрах: действительных чисел (где оно тривиально), комплексных чисел (тождество двух квадратов), кватернионов (тождество четырех квадратов) и октонионов (тождество восьми квадратов). В теореме Фробениуса–Гурвица (см., например, [1]) доказано, что эти четыре алгебры составляют все множество числовых алгебр с делением. Но если алгебра комплексных чисел структурно не отличается от алгебры действительных чисел, то алгебра кватернионов (некоммутативное кольцо) теряет коммутативность, оставаясь ассоциативной по умножению, а алгебра октонионов по умножению не только не коммутативна, но и не ассоциативна (ассоциативность заменяется ослабленным свойством – альтернативностью) [2, 3].

Кватернионы и геометрия

Хотя удовлетворительный геометрический образ всего множества кватернионов (как плоскость – для комплексных чисел) пока не найден, некоторые кватернионные числа имеют определенный геометрический образ. Так, кватерниону, содержащему скалярную и векторную части, но с модулем, равным единице, можно поставить в соответствие дугу большого круга сферы [4].

Однако наиболее характерно геометрическое представление векторных кватернионов. Достаточно заметить, что произведение двух таких кватернионов $\mathbf{a} = a_k \mathbf{q}_k$, $\mathbf{b} = b_k \mathbf{q}_k$

$$\mathbf{ab} = a_k b_n \mathbf{q}_k \mathbf{q}_n = -a_k b_k + \varepsilon_{kmn} a_k b_n \mathbf{q}_m$$

в скалярной части содержит выражение, похожее на скалярное произведение двух векторов в декартовых координатах, а в векторной части – выражение похожее на векторное произведение, т.е. мнимые кватернионные единицы математически «ведут себя» как направляющие векторы правой декартовой системы координат, а коэффициенты при них как компоненты вектора в этой системе координат. Именно эта интерпретация, данная векторным кватернионам еще Гамильтоном, дала толчок развитию векторной алгебры Хэвисайдом и Гибсом.

Несложно видеть, что скалярная единица в таком случае определенного геометрического образа не имеет, хотя общее число размерностей кватернионной алгебры (четыре) и выделенность одной (действительной) размерности, казалось бы, провоцируют интерпретировать коэффициенты при кватернионных единицах как компоненты физического объекта в четырехмерном пространстве-времени. Но такая эвристическая интерпретация оказывается физически не слишком плодотворной. Тем не менее недавние исследования показали, что математика кватернионных чисел (а также других обсуждаемых здесь чисел с ассоциативным умножением) базируется на мощном «пред-геометрическом» фундаменте – базисной двумерной поверхности, «подлежащей» под геометрией трехмерного пространства. Представленные ниже исследования и их результаты в значительной своей части будут связаны именно с таким представлением о физическом мире.

Специфические «гиперкомплексные» числа и бикватернионы

Помимо трех типов числовых объектов, формирующих «хорошие» ассоциативные (по умножению) алгебры действительных, комплексных и кватернионных чисел, существуют также три типа различных объектов, составляющих по-прежнему ассоциативные по умножению алгебры, но обладающие рядом «недостатков». К ним относятся двойные числа, дуальные числа и бикватернионы. В силу того, что эти объекты находят применение для описания физических структур, полезно кратко описать их свойства, тем более что в ряде исследований эти три вида чисел рассматриваются как принадлежащие трем независимым замкнутым множествам.

Двойные числа (split-complex numbers, hyperbolic numbers, tessarines, motors,) [5-8] вида $s = x \cdot 1 + y \cdot j$ (или просто $s = x + jy$, где x, y – произвольные действительные числа) подобно комплексным числам строятся на двух базисных единицах $1, j$, но квадрат каждой из них есть действительная единица $1^2 = 1, j^2 = -1$, притом что $1 \cdot j = j \cdot 1 = j$.

Числа этого множества допускают большинство действий, свойственных алгебре комплексных чисел: сложение, коммутативное, ассоциативное и дистрибутивное (по сложению) умножение, сопряжение $s^* = x - jy$, для них можно определить «норму» $\|s\|^2 = x^2 - y^2$; последнее соотношение иногда ассоциируется с 2D-метрикой Минковского и соответствующими преобразованиями Лоренца [8]. При $\|s\| = 1$ для двойных чисел возникает аналог формулы Эйлера $e^{j\eta} = \cosh\eta + j \sinh\eta$, где $x = \cosh\eta$, η – параметр гиперболического поворота. Однако понятно, что «норма» двойного числа может быть не определена как действительное число, а также может быть равной нулю; это ведет к дефекту обрати-

мости и, следовательно, делимости двойных чисел. Геометрически двойное число может быть представлено как вектор на 2D-поверхности (плоскости). Тогда два простых сопряженных вектора $e = (1 + j)/2$, $e^* = (1 - j)/2$ ортогональны $ee^* = 0$ и идемпотентны $e^N = e$, $e^{*N} = e^*$ (N – натуральное число), они формируют ортогональный базис любых двойных чисел $s = (x + y)e + (x - y)e^*$. Число $s = x + jy$ может быть представлено простейшей 2×2 -матрицей

$$s = \begin{pmatrix} x & y \\ y & x \end{pmatrix},$$

при этом модуль оказывается детерминантом $\|s\| = \det s$. Данное представление, конечно, не является единственным, эта тема будет рассмотрена ниже.

Дуальные (параболические) числа $d = x \cdot 1 + y \cdot \varepsilon$ (или просто $d = x + \varepsilon y$, где x, y – действительные числа) [9–11] также строятся на двух единицах $1, \varepsilon$, первая из которых – действительная (обыкновенный скаляр) $1^2 = 1$, а вторая – нильпотентна $\varepsilon^2 = 0$, притом что $1 \cdot \varepsilon = \varepsilon \cdot 1 = \varepsilon$. Множество дуальных чисел также допускает действия, свойственные комплексным числам: сложение, коммутативное, ассоциативное и дистрибутивное (по сложению) умножение, сопряжение вида $d^* = x - \varepsilon y$. Норма дуального числа $\|d\|^2 = d \cdot d^* = (x + \varepsilon y)(x - \varepsilon y) = x^2$ совпадает с нормой его действительной части, следовательно, норма дуального числа вида $d = \varepsilon y$ исчезает, что, как и в случае двойных чисел, приводит к дефекту обратимости и делимости. Однако дуальные числа обладают любопытным свойством: нильпотентная единица ε может рассматриваться как бесконечно малый параметр, что позволяет представить полный ряд Тей-

лора некоторой функции всего двумя членами. Так, дуальное число с единичной нормой ($x = 1$) есть полный ряд разложения экспоненты $e^{\varepsilon y} = 1 + \varepsilon y$, представляющей дуальный аналог формулы Эйлера, в которой компонента «у» играет роль углового параметра. Несложно видеть, что экспонента вида $e^{\varepsilon t}$ (где t – некоторый параметр) является оператором «параболического поворота» произвольного дуального числа $d = x + \varepsilon y$, результатом действия этого оператора является трансляция $e^{\varepsilon t} d = x + \varepsilon (y + xt)$, что в физике позволяет связывать дуальные числа с группой Галилея. В литературе предлагаются следующие простейшие 2×2 -матричные представления дуальных чисел

$$d^\uparrow = \begin{pmatrix} x & y \\ 0 & x \end{pmatrix}, \text{ или } d^\downarrow = \begin{pmatrix} x & 0 \\ y & x \end{pmatrix};$$

понятно, что эти представления не единственны, о чем также будет сказано ниже.

Наконец, бикватернионами [12–14] называют числа вида $b = x \cdot 1 + y_k \cdot \mathbf{q}_k$ (или просто $b = x + y_k \mathbf{q}_k$), где x , y_k (скалярная и векторная компоненты) принадлежат множеству комплексных чисел, а единицы 1 , \mathbf{q}_k подчинены закону умножения кватернионов (2). Бикватернионы допускают алгебраическое сложение, некоммутативное, ассоциативное и дистрибутивное (по сложению) умножение и сопряжение, аналогичное кватернионному $\bar{b} = x - y_k \mathbf{q}_k$. Но последняя операция не позволяет удовлетворительно определять норму числа, поскольку произведение $b\bar{b} = (x + y_k \mathbf{q}_k)(x - y_m \mathbf{q}_m) = x^2 + y_k y_k$, вообще говоря, не является действительным (и положительным) числом. Норма «определяется» (как действительное число) лишь для некоторых подмножеств бикватернионов, в частности, для таких

чисел, которые содержат взаимно ортогональные действительные и мнимые векторные части: $b = y_k \mathbf{q}_k$, $y_k = w_k + iz_k$, $w_k z_k = 0$, тогда $\|b\|^2 = b\bar{b} = w_k w_k - z_k z_k$. При этом, как и в общем случае, среди значений нормы могут быть делители нуля, то есть присутствует дефект обратимости (делимости). Однако ниже будет показано, что подмножество именно таких векторных бикватернионов содержит все основные соотношения теории относительного движения произвольно движущихся систем отсчета [15]. Представления бикватернионов наиболее часто реализуются с помощью матриц Паули $\mathbf{p}_k : \mathbf{q}_k = -i\mathbf{p}_k$

$$b = \begin{pmatrix} x - iy_1 & -y_3 - iy_2 \\ y_3 - iy_2 & x + iy_1 \end{pmatrix}.$$

Несложно показать, что двойные и дуальные числа составляют подмножества бикватернионов специального вида [16].

Поскольку до последнего времени не известны физические величины, не ассоциативные по умножению, элементы математики октонионов в данной работе рассматриваться не будут.

2. Предгеометрический базис гиперкомплексных чисел

Базовая предгеометрическая поверхность, диада и производные объекты

Пусть есть гладкое двумерное (2D) пространство (поверхность), наделенное метрикой g_{AB} (существует ей обратная: $g^{BC} \rightarrow g_{AB} g^{BC} = \delta_A^C$) и системой координат $x^A = \{x^1, x^2\}$; здесь $A, B, C \dots = 1, 2$; δ_A^C – 2D-символ Кронекера

ра, действует правило суммирования по повторным индексам. Линейный элемент поверхности имеет вид

$$ds^2 = g_{AB} dx^A dx^B; \quad (4)$$

метрика может быть неевклидовой, так что различие ковариантных и контрвариантных компонент объектов существенно. В заданной точке такой поверхности всегда можно выбрать пару единичных ортогональных векторов a^A, b^B (диаду)

$$g_{AB} a^A a^B = g_{AB} b^A b^B = 1, \quad (5)$$

$$g_{AB} a^A b^B = a^A b_A = 0. \quad (6)$$

Окрестность данной поверхности вместе с касательной к ней (в начале диады) плоскостью с декартовой метрикой $\delta_{MN} = \delta^{MN} = \delta_M^N$ будет называться предгеометрической 2D-ячейкой (2D-cell); смысл этого термина будет раскрыт ниже.

Оказывается полезным рассмотреть прямые (тензорные) произведения векторов диады со смешанными компонентами [17]; эти объекты являются 2×2 -матрицами. Такие матрицы, составленные из компонент разных векторов

$$D^A_B \equiv a^A g_{BC} b^C = a^A b_B, \quad (7)$$

$$F^A_B \equiv b^A g_{BC} a^C = b^A a_B \quad (8)$$

несимметричны; в силу условий (5), (6) они имеют равный нулю след и определитель. Квадраты (7) и (8) также равны нулю, то есть эти матрицы нильпотентны

$$D^2 = D^A_B D^B_C = 0, \quad F^2 = F^A_B F^B_C = 0.$$

Взаимные произведения матриц (7) и (8) порождают две новые 2×2 -матрицы – прямые произведения компонент каждого из векторов диады

$$G_C^A \equiv D^A_B F^B_C = a^A a_C, \quad (9)$$

$$H_C^A \equiv F^A_B D^B_C = b^A b_C. \quad (10)$$

Матрицы G и H симметричны, имеют единичный след и равный нулю определитель. Квадрат каждой из этих матриц равен ей самой, то есть объекты (9), (10) – идемпотентны

$$G^2 \equiv G_B^A G_C^B = G_C^A, \quad (11)$$

$$H^2 \equiv H_B^A H_C^B = H_C^A. \quad (12)$$

Притом матрицы G и H взаимно ортогональны

$$GH \equiv G_B^A H_C^B = 0, \quad HG \equiv H_B^A G_C^B = 0.$$

Итак, наличие диады на некоторой поверхности позволяет определить два (базовых) нильпотентных объекта D и F , и два (производных) идемпотентных объекта G и H , представимых в форме 2×2 -матриц. Этим все множество прямых произведений векторов диады исчерпывается.

Единицы ассоциативных алгебр как функции векторов базисной диады

Простейшие линейные комбинации (сумма и разность) определенных выше нильпотентных матриц (между собой) и идемпотентов (также между собой) оказываются содержательными математическими объектами.

Вначале лучше проанализировать сумму и разность идемпотентов. Сумма G и H

$$E \equiv E_B^A \equiv G_B^A + H_B^A = a^A a_B + b^A b_B \quad (13)$$

есть симметричная матрица, свойства которой

$$\det E = 1, \text{Tr } E = 2, E^2 = E$$

позволяют отождествить ее с единицей множества 2×2 -матриц

$$a^A a_B + b^A b_B = \delta_B^A \rightarrow E = 1; \quad (14)$$

это согласуется с записью компонент метрики 2D-ячейки как функции векторов диады в голономных координатах

$$a_A a_B + b_A b_B = g_{AB}, \quad a^A a^B + b^A b^B = g^{AB}. \quad (15a)$$

В координатах касательной плоскости та же метрика имеет вид единичной матрицы

$$a_M a_N + b_M b_N = \delta_{MN}. \quad (15b)$$

Разность G и H

$$\tilde{K} \equiv \tilde{K}_B^A \equiv G_B^A - H_B^A = a^A a_B - b^A b_B \quad (16)$$

есть симметричная матрица, свойства которой

$$\det \tilde{K} = -1, \text{Tr } \tilde{K} = 0, \tilde{K}^2 = E, \tilde{K}E = E\tilde{K} = \tilde{K} \quad (17)$$

свидетельствуют, что \tilde{K} также является некоторой действительной единицей, но отличной от E ; это отличие проявится в умножении со следующими простейшими линейными комбинациями нильпотентов D и F .

Сумма D и F

$$\tilde{I}_B^A \equiv D_B^A + F_B^A = a^A b_B + b^A a_B \quad (18)$$

есть симметричная матрица со свойствами, аналогичными свойствам (18) матрицы \tilde{K}

$$\det \tilde{I} = -1, \text{Tr } \tilde{I} = 0, \tilde{I}^2 = E, \tilde{I}E = E\tilde{I} = \tilde{I},$$

то есть \tilde{I} – также некоторая единичная матрица, коммутирующая с единицей E . Однако произведение единиц \tilde{K} и \tilde{I} , во-первых, уже не коммутативно (антикоммутативно)

$$\begin{aligned}\tilde{K}\tilde{I} &= \tilde{K}_B^A \tilde{I}_C^B = (a^A a_B - b^A b_B)(a^B b_C - b^B a_C) = \\ &= a^A b_C - b^A a_C \equiv J^A{}_C \equiv J,\end{aligned}$$

$$\tilde{I}\tilde{K} = -J, \quad (19)$$

а во-вторых, это в точности разность нильпотентов

$$J \equiv J^A{}_B \equiv D^A{}_B - F^A{}_B = a^A b_B - b^A a_B. \quad (20)$$

Матрица (20) антисимметрична и имеет свойства

$$\det J = 1, \quad \text{Tr } J = 0, \quad J^2 = -E, \quad JE = EJ = J,$$

$$J\tilde{K} = -\tilde{K}J = -\tilde{I}, \quad \tilde{I}J = -J\tilde{I} = -\tilde{K}, \quad (21)$$

т.е. J есть мнимая единица, антикоммутирующая с единицами \tilde{K} и \tilde{I} ; последнее свойство характерно для векторных гиперкомплексных единиц.

Итак, векторы одной диады своими квадратичными комбинациями порождают серию замечательных объектов: это нильпотенты D и F , антикоммутирующие между собой (векторные) единицы (мнимая единица J и действительные единицы \tilde{K} и \tilde{I}), а также скалярная единица E , с которой коммутируют все остальные. Данное множество объектов достаточно для построения базиса любой из перечисленных выше ассоциативных алгебр. Базис действительных чисел – единица E ; базис комплексных чисел – единицы E и J ; базис дуальных чисел – единицы E и D (или F); базис двойных чисел – единицы E и \tilde{I} (или \tilde{K}). Наконец, если «подправить» единицы (16) и (18) так, чтобы циклические подстановки в парных произведениях векторных единиц давали третью единицу со знаком плюс, то получается базис кватернионов

$$1 \equiv E, \mathbf{q}_1 \equiv -i\tilde{I}, \mathbf{q}_2 \equiv J, \mathbf{q}_3 \equiv i\tilde{K}. \quad (22)$$

Из вышеизложенного следует:

1. Все единицы указанных ассоциативных алгебр (в том числе трех исключительных) могут рассматриваться как производные (составленные из) «более фундаментальных» объектов – векторов единственной диады, задающей формат локальной области некоторой поверхности (2D-ячейки).

2. Единственным требованием к базовой поверхности является ее локальная гладкость, поэтому число матричных представлений алгебраических единиц бесконечно.

3. Скалярная единица является метрикой 2D-ячейки, в частности, декартовой метрикой плоскости, касательной (в начале диады) к базовой поверхности.

4. Если связывать кватернионную векторную триаду \mathbf{q}_k с (гамильтоновым) представлением о геометрии локальной области физического 3D-пространства, то базовую поверхность и 2D-ячейку приходится ассоциировать с некоторым «более фундаментальным» представлением о предгеометрии (в частности, см. работу Уилера, предложившего этот термин [18]). При этом каждая из двух предгеометрических размерностей есть «корень квадратный» из размерности физического пространства.

5. Все 3D-пространство может быть построено из большого (бесконечного) числа 2D-ячеек, объединение таких ячеек можно рассматривать как некий «мировой экран».

Теория матриц, спектральная теорема и новые обозначения

Несложно увидеть, что полученные выше соотношения есть следствия спектральной теоремы теории матриц. Эта теорема утверждает [19], что любую обратимую матрицу с некратными собственными значениями можно разложить по идемпотентным матрицам-проекторам, коэффициентами

при которых являются собственные значения, а проекторы суть прямые произведения элементов некоторого би-ортогонального базиса. Пример такого разложения – выражение для единицы \mathbf{q}_3 , следующее из формул (16) и (22)

$$\mathbf{q}_3 \Big|_B^A = i a^A a_B - i b^A b_B = i G_B^A - i H_B^A; \quad (23)$$

здесь правые и левые собственные функции \mathbf{q}_3 – соответственно векторы a^A, b^B и ковекторы a_A, b_B диады, собственные числа $+i$ (для a) и $-i$ (для b), а G_B^A, H_B^A – проекторы.

С другой стороны, очевидно, что преобразование подобия векторных единиц

$$\mathbf{q}'_{k'} \equiv \hat{S} \mathbf{q}_k \hat{S}^{-1}, \quad (24)$$

где \hat{S} – некоторая 2×2 -матрица (компоненты, вообще говоря, – комплексные числа), не изменяет базовых соотношений алгебры, например, закона (2), скалярная единица при этом не изменяется. Если $\det \hat{S} = 1$, то $\hat{S} \in SL(2, C)$, т.е. закон умножения алгебры форм инвариантен относительно спинорной группы $SL(2, C)$, реализующей обобщенные повороты (отражения) векторов. Следовательно, все векторные единицы (22) преобразованием подобия (24) могут быть получены из одной единицы, например из \mathbf{q}_3 . Тогда, согласно теории матриц, все векторные единицы имеют одинаковые собственные числа $\pm i$, что легко проверить, при этом собственные функции производных единиц являются линейными комбинациями собственных функций исходной единицы [20]. Этот факт, в частности, отражает то обстоятельство, что преобразование (24) само оказывается производным, а базовым является преобразование векторов диады, представляющих собой $SL(2, C)$ -спиноры (с «точки зрения» 3D-пространства, если считать, что его описывают векто-

ры \mathbf{q}_k). Чтобы подчеркнуть спинорную природу диады, а также для упрощения дальнейших записей предлагается перейти к новым матричным обозначениям, свободным от 2D-индексов

$$a^A \rightarrow \psi^+, a_A \rightarrow \varphi^+, b^A \rightarrow \psi^-, b_A \rightarrow \varphi^-. \quad (25a)$$

Тогда условия нормировки (5) и ортогональности (6) векторов диады приобретают вид

$$\varphi^\pm \psi^\pm = 1, \quad \varphi^\mp \psi^\pm = \varphi^\pm \psi^\mp = 0, \quad (25b)$$

нильпотентные и идемпотентные матрицы переобозначаются так

$$N^+ \equiv D = \psi^+ \varphi^-, \quad N^- \equiv F = \psi^- \varphi^+,$$

$$C^+ \equiv G = \psi^+ \varphi^+, \quad C^- \equiv H = \psi^- \varphi^-,$$

а матричные единицы (22) переписываются следующим образом

$$1 = C^+ + C^- = \psi^+ \varphi^+ + \psi^- \varphi^-, \quad (26a)$$

$$\mathbf{q}_1 = -i(N^+ + N^-) = -i(\psi^+ \varphi^- + \psi^- \varphi^+), \quad (26б)$$

$$\mathbf{q}_2 = N^+ - N^- = \psi^+ \varphi^- - \psi^- \varphi^+, \quad (26в)$$

$$\mathbf{q}_3 = i(C^+ - C^-) = i(\psi^+ \varphi^+ - \psi^- \varphi^-). \quad (26г)$$

Понятно, что базовое преобразование спиноров (записанное в новых обозначениях)

$$\psi'^{\pm} = S \psi^{\pm}, \quad \varphi'^{\pm} = \varphi^{\pm} S^{-1}, \quad (27)$$

при учете соотношений (26), имеет своим следствием преобразование подобия (24).

«Коническая передача» – образ комплексного числа в матричной форме

Примитивная предгеометрия базовой 2D-ячейки и представление алгебраических единиц как матричных величин, составленных из «подлежащих» векторов диады (спиноров), позволяют строить новые визуальные образы даже известных величин. Полезной иллюстрацией служит предгеометрическая модель комплексного числа в матричной форме

$$\begin{aligned} z &\equiv x + y \mathbf{q}_3 = x(\psi^+ \phi^+ + \psi^- \phi^-) + i y(\psi^+ \phi^+ - \psi^- \phi^-) = \\ &= r e^{i\beta} C^+ + r e^{-i\beta} C^-, \end{aligned} \quad (28)$$

где $r = \sqrt{x^2 + y^2}$, $\tan \beta = y/x$; мнимая единица представлена здесь вектором \mathbf{q}_3 , но это может быть любая из единиц \mathbf{q}_k , ибо каждая такая единица допускает разложение типа (26г). Соотношение (28) показывает, что в матричной форме число z содержит сразу некоторое комплексное число и ему сопряженное; «предгеометрически» эти компоненты расположены на двух комплексных плоскостях, «направляемых» проекторами C^+ и C^- , следовательно, ортогональных друг другу. Часть каждой из этих плоскостей, ограниченная радиусом r , есть диск; поворот одного диска на угол β сопровождается поворотом второго на угол $-\beta$.

Этим свойствам вполне удовлетворяет модель «конической передачи» [20], имеющей две одинаковые взаимно перпендикулярные «шестерни», которые могут вращаться без скольжения на ортогональных осях, сходящихся к некоторой центральной точке. Если в этой точке расположить начало диады, сопоставив направления осей с направлением ее векторов, то проекторы C^+ и C^- визуализируются в виде потоков векторов ψ^+ и ψ^- .

Иным (но связанным) образом комплексного числа (28) является собственно пара осей «конической передачи», каждая из которых, имея длину r , также снабжена флагом (типа флага Пенроуза [21]), указывающим фазу $\pm \beta$, т.е. отклонение радиуса диска от задаваемого осями действительного сечения (рис. 1).

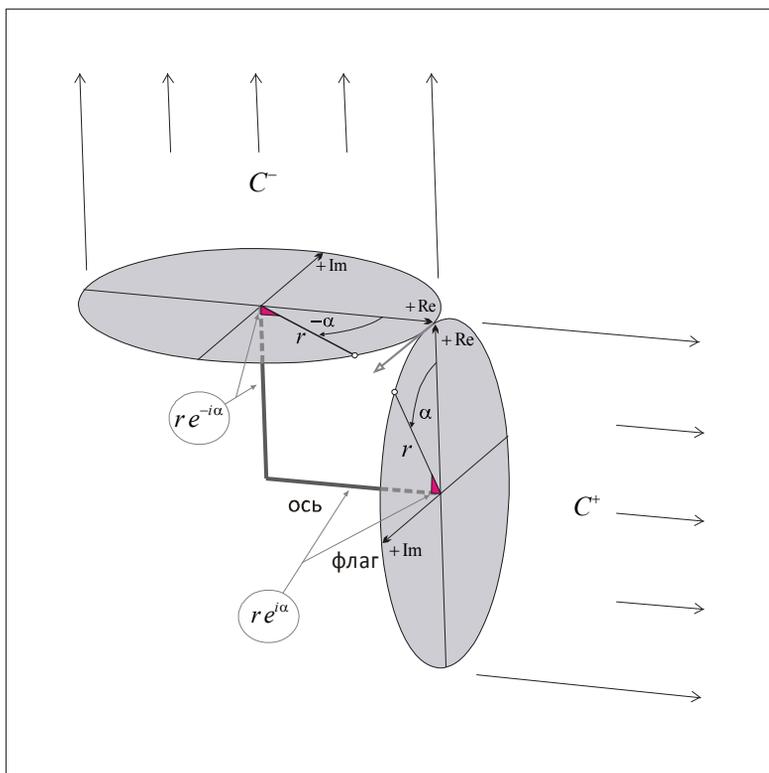


Рис. 1

В частном случае унимодулярного комплексного числа поворот конической пары может ассоциироваться с простейшим фазовым преобразованием спиноров типа преобразования (27)

$$\psi'^{\pm} = e^{\pm i\alpha} \psi^{\pm}, \quad \varphi'^{\pm} = e^{\mp i\alpha} \varphi^{\pm}; \quad (29)$$

при этом 3D-вектор \mathbf{q}_3 внешне не изменяется, тогда как остальные два вектора новой триады \mathbf{q}'_k , вычисляемые по формулам (26б) и (26в), поворачиваются вокруг \mathbf{q}_3 на угол 2α . Поворот диады (29) не изменяет единичную длину ее векторов, но у каждого из них при этом возникает и действительная, и мнимая составляющие

$$\psi'^{\pm} = (\cos \alpha \pm i \sin \alpha) \psi^{\pm}, \quad (30)$$

т.е. можно условно говорить о действительной и мнимой площадках, составляющих 2D-ячейку. Изменение угла поворота приводит к «перекачиванию» одной площадки в другую при изменении фазы. Процесс такого «мерцания» 2D-ячейки, конечно, не наблюдаем, его 3D-пространственным проявлением является вращение кватернионной триады \mathbf{q}'_k на двойной угол.

Но существование 2D-ячейки и ее предгеометрические особенности оказываются «математически заметными» для всех рассмотренных выше ассоциативных алгебр. Примером служит конформное преобразование векторов диады.

Конформное растяжение мерцающей 2D-ячейки и стабильность алгебр

Пусть мерцающая 2D-ячейка с базисом (29) подвергается также конформному растяжению

$$\psi''^{\pm} \equiv \sigma \psi' = \sigma e^{\pm i\alpha} \psi^{\pm}, \quad \varphi''^{\pm} \equiv \sigma \varphi' = \sigma e^{\mp i\alpha} \varphi^{\pm}, \quad (31)$$

где масштабный фактор – действительное число $\sigma \in R$, отличное от нуля и единицы. В целях упрощения последующих записей удобно сделать обозначение

$$\lambda \equiv \sigma e^{i\alpha}, \quad (32)$$

тогда $\lambda^* = \sigma e^{-i\alpha}$ и $\psi''^+ = \lambda \psi^+$, $\psi''^- = \lambda^* \psi^-$, $\varphi''^+ = \lambda^* \varphi^+$, $\varphi''^- = \lambda \varphi^-$.

Векторы нового базиса (31) по-прежнему ортогональны, $\varphi^{+\mp} \psi^{+\pm} = \varphi^{+\pm} \psi^{+\mp} = 0$, но уже не единичны

$$\varphi^{+\pm} \psi^{+\pm} = \lambda \lambda^* = \sigma^2. \quad (33)$$

Преобразование (31), по сути, вносит метрический дефект: ковекторы $\varphi^{+\pm}$ и векторы $\psi^{+\pm}$ более не являются взаимными объектами. Наличие дефекта (33) немедленно сказывается на свойствах объектов (26): они не являются единицами ассоциативных алгебр, например,

$$\psi^{++} \varphi^{++} + \psi^{--} \varphi^{--} = \sigma^2 \neq 1, \quad i(\psi^{++} \varphi^{++} - \psi^{--} \varphi^{--}) = \sigma^2 \mathbf{q}_3 \neq \mathbf{q}_3.$$

Однако при таком нарушении метрических свойств базовой поверхности, «предгеометрически предшествующей» единицам (26), есть возможность сохранить алгебры посредством введения некоторого условия, «сглаживающего» дефект. Таким условием служит задание нормализующего функционала над абстрактным пространством.

Пусть имеется абстрактное M -мерное евклидово пространство \mathbf{P} с координатами ξ_Λ ($\Lambda = 1, 2, \dots, M$) и некоторый свободный параметр θ ; величины θ, ξ_Λ безразмерны, т.е. не измеряются в физических единицах. И пусть фактор (32) есть функция $\lambda(\theta, \xi_\Lambda)$, такая, что следующий интеграл по объему V_Λ имеет конечное (нормальное) значение

$$f \equiv \int_{V_\Lambda} \lambda \lambda^* dV_\Lambda = 1. \quad (34)$$

Тогда над пространством \mathbf{P} метрический дефект базовой поверхности «сглаживается», и на базисе (31) растянутой мерцающей 2D-ячейки можно построить алгебраические единицы

$$I'' = f(\psi'^+ \varphi'^+ + \psi'^- \varphi'^-) = I, \quad (35a)$$

$$\mathbf{q}_1'' = -if(\psi'^+ \varphi'^- + \psi'^- \varphi'^+) = (\cos 2\alpha) \mathbf{q}_1 + (\sin 2\alpha) \mathbf{q}_2, \quad (35b)$$

$$\mathbf{q}_2'' = f(\psi'^+ \varphi'^- + \psi'^- \varphi'^+) = -(\sin 2\alpha) \mathbf{q}_1 + (\cos 2\alpha) \mathbf{q}_2, \quad (35\text{в})$$

$$\mathbf{q}_3'' = if(\psi'^+ \varphi'^+ - \psi'^- \varphi'^-) = \mathbf{q}_3. \quad (35\text{г})$$

При этом «внешне» единицы (35) идентичны единицам, полученным в результате преобразования (29): скалярная и векторная \mathbf{q}_3 единицы не изменяются (хотя диада 2D-ячейки подвергается фазовому преобразованию), а векторы \mathbf{q}_1'' и \mathbf{q}_2'' в 3D-пространстве поворачиваются вокруг \mathbf{q}_3 на двойной угол. Однако единицы (35) остаются функциями параметра θ ; можно наложить условие стабильности единиц (35) (по сути, – стабильности алгебр) в смысле значений этого параметра

$$\partial f / \partial \theta \equiv \partial_\theta f = 0. \quad (36)$$

В силу теоремы Стокса это условие, примененное к функционалу (34), сводится к дифференциальному уравнению типа уравнения неразрывности

$$\partial_\theta(\lambda \lambda^*) + \nabla_\Lambda(\lambda \lambda^* k_\Lambda) = 0, \quad (37)$$

где k_Λ – некоторый M -мерный «вектор распространения 2D-ячейки», который может быть задан различными способами. Условие стабильности алгебр (37), как будет показано ниже, имеет непосредственное отношение к законам физики.

Здесь стоит сделать одно существенное замечание. «Законами физики» принято считать математические соотношения, полученные эмпирически или эвристически и описывающие свойства и поведение физических величин, как правило, наблюдаемых в 3D-пространстве. Но какой бы ни была природа этих величин, их экспериментальное измерение фактически всегда сводится к измерению только пространственной длины (отрезка числового ряда). Как показано выше, «хорошие математики» – исключительные ассоциативные алгебры, традиционно используемые для описания

физических (геометрических) реальностей, допускают представление о предгеометрической поверхности, «длина» на которой определяется как «корень квадратный» из длины физического мира. Это означает, что некоторые «законы физики», записанные в естественном для наблюдателя «геометрическом» формате (скалярном, векторном или тензорном), могут быть также представлены в виде специфических предгеометрических соотношений. В последующих разделах данной работы продемонстрировано, что такие представления хорошо известны и используются для вычислений. Однако в силу своего эвристического (не математико-логического) происхождения они вызывают интерпретационные сложности.

Поскольку ниже уделено внимание и стандартному 3D-описанию физических закономерностей, в математическую часть данного исследования следует добавить сведения о геометрических свойствах объектов, вовлеченных в эти описания.

3. Геометрия кватернионных пространств

Эвристика введения декартовых координат для описания физического пространства получила мощное логическое обоснование с открытием кватернионов, векторная триада которых \mathbf{q}_k геометрически эквивалентна ортонормированному 3D-реперу. Этот факт, установленный Гамильтоном и использованный Максвеллом в уравнениях электродинамики, был, по сути, выражением первого «физического закона», обнаруженного в среде гиперкомплексных чисел. Однако затем более 100 лет тематика изучения собственно кватернионных реперов и описываемых ими пространств не затрагивалась. Последние десятилетия показали, что эта тема оказалась весьма плодотворной [22].

Векторные преобразования кватернионных единиц

Несложно показать, что группа $SL(2, C)$ преобразований подобия (24), сохраняющая форм-инвариантность закона умножения (2) и действующая, по существу, на 2D-базовые спиноры (27), имеет свой векторный аналог, группу $SO(3, C)$, представленную унимодулярными ортогональными 3×3 -матрицами $O_{k'n}$, действующими непосредственно на векторную триаду

$$\mathbf{q}_{k'} \equiv O_{k'n} \mathbf{q}_n. \quad (38)$$

Если параметры матрицы $O_{k'n}$ действительные, то преобразование (38) есть обычный трехмерный поворот репера \mathbf{q}_k , если параметры мнимые, то поворот – гиперболический (хотя единицы $\mathbf{q}_{k'}$, удовлетворяя закону (2), тем не менее, остаются кватернионными). Простой поворот векторной триады, например, вокруг вектора \mathbf{q}_3 на угол γ реализуется матрицей $O_{k'n} \equiv O_3^\gamma$, компоненты которой вполне определены формулами (35б) и (35в) (в данном случае $\gamma = 2\alpha$). Произвольная матрица $O_{k'n}$ есть произведение матриц простых поворотов вокруг различных векторов триады.

При вычислениях, связанных с геометрией 3D-объектов, векторные преобразования (38) оказываются удобнее спинорных преобразований (24). Так, рассматривая вектор с компонентами a_k в некотором репере \mathbf{q}_k , легко заметить, что вектор-кватернион $\mathbf{a} \equiv a_k \mathbf{q}_k$ форм инвариантен относительно преобразований типа (38) с *действительными параметрами*

$$\mathbf{a} = a_k \mathbf{q}_k = a_{k'} \mathbf{q}_{k'}, \quad (39)$$

поскольку $a_k = O_{n'k} a_{n'}$ и $O_{n'k} O_{n'm} = \delta_{kn}$. Равенство (39), в частности, позволяет вычислять компоненты вектора в любых

заданных реперах, а также в неинерциальных (в данном случае – только вращающихся) системах отсчета, если известны компоненты в одном репере.

Для преобразований группы $SO(3, C)$ с комплексными параметрами соотношение (39) не выполняется, если компоненты вектора действительны (т.е. если \mathbf{a} – кватернион). Но физически значимыми оказываются условия форм-инвариантности объектов, принадлежащих множеству векторных бикватернионов $\mathbf{z} = (a_k + ib_k) \mathbf{q}_k = \mathbf{a} + i\mathbf{b}$ с определяемой «нормой»

$$\mathbf{z} \bar{\mathbf{z}} = (a_n + ib_n)(a_n + ib_n) = a^2 - b^2. \quad (40)$$

Из требования (40) следует, что векторы \mathbf{a} и \mathbf{b} ортогональны друг другу, и эта ортогональность, конечно, не зависит от выбора триады:

$$a_k b_{k'} = a_n O_{nk'} b_m O_{mk'} = \delta_{mn} a_n b_m = 0.$$

Поэтому без потери общности один вектор триады можно направить вдоль одной из составляющих, например, \mathbf{q}_1 – вдоль мнимой части \mathbf{b} , тогда $\mathbf{z} = ib_1 \mathbf{q}_1 + a_2 \mathbf{q}_2 + a_3 \mathbf{q}_3$, и условие форм-инвариантности \mathbf{z} отображает равенство

$$\mathbf{z} = ib_1 \mathbf{q}_1 + a_2 \mathbf{q}_2 + a_3 \mathbf{q}_3 = ib_{1'} \mathbf{q}_{1'} + a_{2'} \mathbf{q}_{2'} + a_{3'} \mathbf{q}_{3'}. \quad (41)$$

Детальный анализ показывает [22, с. 160], что вектор \mathbf{z} остается форм-инвариантным в смысле соотношения (41) относительно множества таких преобразований, матрицы которых представляют собой сумму простых поворотов, выполняемых в произвольном порядке, но поворотов на действительный угол относительно «мнимой оси» (здесь \mathbf{q}_1) и поворотов с мнимым параметром относительно «вещественной оси» (здесь \mathbf{q}_2 или \mathbf{q}_3). В сделанных выше обозначениях такие повороты соответственно реализуются матрицами O_1^γ , $O_2^{i\eta}$, $O_3^{i\zeta}$. Среди всех матриц такого типа есть тождествен-

ный оператор, и для каждой такой матрицы однозначно определена обратная, т.е. множество всех таких матриц образует группу $SO(1, 2) \subset SO(3, C)$.

Если в каком-либо репере известны компоненты вектора \mathbf{z} , то с помощью условия типа (41) легко вычисляются его проекции на любое направление, заданное поворотом исходного репера матрицей $SO(1, 2)$. Кстати, проекция произвольного вектора-кватерниона (или бикватерниона) \mathbf{a} на направление, заданное одной из единиц триады \mathbf{q}_k , может быть вычислена также с помощью собственных функций $[\varphi_{(k)}, \psi_{(k)}]$ этой единицы по правилу

$$a_k \equiv \langle \mathbf{a} \rangle_k = -i \varphi_{(k)}^+ \mathbf{a} \psi_{(k)}^+.$$

Стоит также напомнить, что группа отражений $SL(2, C)$ дважды накрывает группу вращений $SO(3, C)$; соотношения между соответствующими матрицами известны [22, с. 65]

$$O_{k'n} = -\frac{1}{2} \text{Tr}(S \mathbf{q}_k S^{-1} \mathbf{q}_n),$$

$$S = \frac{1}{2} \sqrt{1 + O_{m'm}} - \frac{O_{k'n}}{2\sqrt{1 + O_{m'm}}} \varepsilon_{knj} \mathbf{q}_j.$$

Приведенные в данном разделе сведения будут в основном использованы при формулировке кватернионной версии теории относительности.

Дифференцирование репера и кватернионные пространства

Кватернионные величины могут быть достаточно гладкими функциями параметров. Ниже рассмотрены дифференциальные соотношения для векторов кватернионной

триады, параметры которой Φ_ξ (здесь ξ – номер параметра) для простоты считаются действительными переменными [23]. Малые приращения репера \mathbf{q}_k выражаются через сами векторы этого репера с коэффициентами вращения – собственной связности ω

$$d\mathbf{q}_k(\Phi) = \omega_{\xi kn} \mathbf{q}_n d\Phi_\xi. \quad (42)$$

Эта связность антисимметрична по векторным индексам, число ее компонент определяется по формуле $N = G \frac{p(p-1)}{2} = 3G$, где G – число параметров, $p = 3$ – число векторов.

Из уравнения (42) определяется производная вектора репера по параметру

$$\frac{\partial}{\partial \Phi_\xi} \mathbf{q}_k(\Phi) \equiv \partial_\xi \mathbf{q}_k(\Phi) = \omega_{\xi kn} \mathbf{q}_n. \quad (43a)$$

Формулу для вычисления собственной связности можно записать в трех вариантах как функции:

$$- \text{репера } \omega_{\xi kn} = -i \varphi_{(n)}^+ (\partial_\xi \mathbf{q}_k) \psi_{(n)}^+ \equiv -i \langle \partial_\xi \mathbf{q}_k \rangle_n^+,$$

$$- \text{спиноров } \omega_{\xi kn} = -i \langle S^{-1} \partial_\xi S \mathbf{q}_{\tilde{k}} - \mathbf{q}_{\tilde{k}} S^{-1} \partial_\xi S \rangle_{\tilde{n}}^+,$$

$$\mathbf{q}_k = S(\Phi) \mathbf{q}_{\tilde{k}} S^{-1}(\Phi), \quad \mathbf{q}_{\tilde{k}} = const,$$

$$- \text{матриц векторного поворота } \omega_{\xi kn} = \partial_\xi O_{k\tilde{n}} O_{m\tilde{i}},$$

$$\mathbf{q}_k = O_{kp'} \mathbf{q}_{p'}, \quad \mathbf{q}_k \equiv O_{k\tilde{n}} \mathbf{q}_{\tilde{n}}.$$

Последнюю формулу удобно использовать для установления трансформационных свойств связности

$$\omega_{\xi kn} = O_{kp'} O_{mn'} \omega_{\xi p'n'} + O_{mp'} \partial_\xi O_{kp'}, \quad (43б)$$

т.е. связность не является тензором.

Дифференциальные соотношения векторных кватернионов удобно изучать, сформулировав их в общем виде с привлечением понятия векторного кватернионного пространства – такого 3D-пространства U_3 , что описание декартовых реперов в касательном ему пространстве с неизбежностью требует привлечения кватернионной триады. Иными словами, каждая точка U_3 оказывается отождествленной с началом триады \mathbf{q}_k , при этом задано правило $\Phi_\xi(y^a)$, связывающее ориентацию триады со значениями, вообще говоря, криволинейных координат (голономных) данной точки y^a . Пространство U_3 будет считаться достаточно гладким; в общем случае оно может быть неплоским, но в каждой его точке можно построить плоское касательное пространство $T(U_3)$, координаты которого x_n связаны с координатами y^a локальным соотношением (через коэффициенты Ламе)

$$dx_k = g_{ka} dy^a, \quad g_{ka} g_n^A = \delta_{kn}, \quad g_{ka} g_k^b = \delta_a^b.$$

Метрика пространства $T(U_3)$ в данном случае есть «скалярное произведение» векторных кватернионных единиц (с сопряженным вектором для обеспечения положительной декартовой части), $\mathbf{g}_{kl} \equiv \mathbf{q}_k \bar{\mathbf{q}}_l = \delta_{kl} - \varepsilon_{klj} \mathbf{q}_j$. Эта метрика асимметрична и является кватернионом; но она обладает характерным метрическим свойством: свертка двух таких метрик по первым или по последним индексам имеет своим результатом ту же метрику, например,

$$\mathbf{g}_{kn} \mathbf{g}_{km} = (\delta_{kn} - \varepsilon_{knj} \mathbf{q}_j)(\delta_{km} - \varepsilon_{kml} \mathbf{q}_l) = \delta_{nm} - \varepsilon_{nmj} \mathbf{q}_j = \mathbf{g}_{nm}.$$

Геометрические характеристики кватернионных пространств компактно описываются в касательном пространстве, в котором задается перенос произвольного вектора B_n

$$d_p B_n = -\Omega_{jkn} B_k dx_j,$$

где $\Omega_{jkn} = \Phi_{jkn} + \omega_{jkn} + \sigma_{jkn}$ – аффинная связность $T(U_3)$, включающая обычные коэффициенты вращения Риччи $\Phi_{jkn} = g_n^a \nabla_j g_{ka}$, отражающие криволинейный характер координатных линий в U_3 , собственную связность ω_{jkn} и, возможно, произвольное слагаемое σ_{jkn} ; все эти геометрические объекты антисимметричны в двух последних индексах. Если теперь определить ковариантную производную с аффинной связностью $D_j B_n \equiv \partial_j B_n + B_k \Omega_{jkn}$, то оказывается, что кватернионная триада, а значит, и метрика g_{kl} не постоянны относительно этой производной

$$D_j \mathbf{q}_n = \partial_j \mathbf{q}_n + \mathbf{q}_k \Omega_{jkn} = \mathbf{q}_k (\Phi_{jkn} + \sigma_{jkn}).$$

В связи с этим сумму частей связности

$$\hat{\sigma}_{jkn} \equiv \Phi_{jkn} + \sigma_{jkn}$$

можно рассматривать как кватернионную неметричность, вынуждающую триаду совершать дополнительный поворот к тому, что обусловлен ее собственной связностью. Далее по известной процедуре из первых уравнений структуры (Картана) определяется взаимозависимость базисной 1-формы, связности и кручения исследуемого пространства, а вторые уравнения структуры позволяют установить вид тензора кривизны; последнего в данном случае достаточно

$$R_{kmij} = \partial_i \Omega_{jkm} - \partial_j \Omega_{ikm} + \Omega_{jkn} \Omega_{imn} - \Omega_{ikn} \Omega_{jnm}.$$

Существенно, что в структуре этого тензора слагаемые, содержащие только собственную связность ω_{jkn} , тождественно обращаются в ноль, так что в целом кривизна содержит лишь неметрические составляющие: коэффициенты вращения Риччи и чисто кватернионную неметричность

$$R_{kmij} = {}^{\Phi}R_{kmij} + {}^{\mathcal{Q}}R_{kmij} ,$$

где

$${}^{\Phi}R_{kmij} = \hat{D}_i \Phi_{jkm} - \hat{D}_j \Phi_{ikm} + \Phi_{jkn} \Phi_{inm} - \Phi_{ikn} \Phi_{jnm}$$

здесь ковариантные производные относительно полной кватернионной связности,

$${}^{\mathcal{Q}}R_{kmij} = \tilde{D}_i \sigma_{jkm} - \tilde{D}_j \sigma_{ikm} + \sigma_{jkn} \sigma_{inm} - \sigma_{ikn} \sigma_{jnm} \quad (44)$$

здесь ковариантные производные относительно собственной связности.

Изложенные выше сведения о гиперкомплексных числах достаточны для представления математической «среды обитания» целой серии физических законов и соотношений; о них речь во второй части данного обзора.

Глава 2

ФОРМУЛЫ ФИЗИЧЕСКИХ ЗАКОНОВ В ГИПЕРКОМПЛЕКСНОЙ СРЕДЕ

Здесь будет продемонстрировано, что целый ряд формул и соотношений, присущих математике гиперкомплексных чисел, имеет формат физических закономерностей и величин, известных из эмпирических или эвристических соображений. Среди них – уравнения квантовой и классической механики, теория относительности, уравнения электродинамики, а также соотношения нелинейных полевых теорий – теории гравитации и Янга–Миллса.

4. Спинорные уравнения механики

Этот раздел базируется на введенном выше представлении о 2D-ячейке базовой фрактальной поверхности, «подстилающей» 3D-мир. Здесь понадобится определение коэффициентов преобразования диады (32), условие нормализации конформного фактора (34) над абстрактным пространством и условие стабильности алгебр (37).

Уравнение квантовой механики (уравнение Шрёдингера)

Эрвин Шрёдингер эмпирически предложил уравнение, описывающее квантово-механические структуры и процессы в 1926 г. Решения этого уравнения в основном удовлетворительно описывают результаты экспериментов, и на сегодняшний день базирующаяся на уравнении Шрёдингера теория квантовой механики оценивается научным сообществом как общепринятая.

Несложно показать, что это уравнение есть специальный случай условия стабильности алгебр, представленного в развернутом виде

$$\lambda^* \partial_\theta \lambda + \lambda \partial_\theta \lambda^* + \partial_\Lambda (\lambda \lambda^* k_\Lambda) = 0. \quad (45)$$

Пусть в частном случае вектор k_Λ задает направление приращения фазы поворота диады $k_\Lambda = \partial_\Lambda \alpha$, фаза при этом выражается из определения $\lambda = \sigma e^{i\alpha}$, тогда $\alpha = \frac{i}{2} \ln \frac{\lambda^*}{\lambda}$ и $k_N = \frac{i}{2} \left(\frac{\partial_\Lambda \lambda^*}{\lambda^*} - \frac{\partial_\Lambda \lambda}{\lambda} \right)$. Подстановка этого выражения и простые преобразования приводят уравнение (45) к виду (есть суммирование по M -мерному индексу Λ)

$$\partial_\theta \lambda - \frac{i}{2} \partial_\Lambda \partial_\Lambda \lambda + iW\lambda + e^{2\alpha} \left(\partial_\theta \lambda^* + \frac{i}{2} \partial_\Lambda \partial_\Lambda \lambda^* - iW\lambda^* \right) = 0, \quad (46)$$

где также проделана тождественная операция: добавлена и вычтена произвольная функция. Это уравнение удовлетворяется, если исчезает каждая из комплексно сопряженных его частей; достаточно записать одно уравнение для комплексной функции $\lambda(\xi_\Lambda, \theta)$

$$\left(\partial_\theta - \frac{i}{2} \partial_\Lambda \partial_\Lambda + iW \right) \lambda = 0. \quad (47)$$

Пусть абстрактное математическое пространство, в переменных которого записано уравнение (47), является трехмерным физическим миром (то есть рассматривается еще более частный случай). Тогда абстрактные, не имеющие единиц координаты становятся размерными пространственными координатами

$$\xi_\Lambda \rightarrow x_k / \varepsilon, \quad (48a)$$

свободный параметр – временем

$$\theta \rightarrow t/\tau. \quad (48б)$$

Если коэффициенты размерностей (они же – стандарты масштабов) выбрать в виде

$$\varepsilon \equiv \frac{\hbar}{mu}, \quad (49а)$$

$$\tau \equiv \frac{\varepsilon}{u} = \frac{\hbar}{mu^2}, \quad (49б)$$

где \hbar – постоянная Планка, m – некоторая масса, u – некоторая характерная скорость ($u_{\max} \rightarrow c$) и подставить соотношения (48) и (49) в уравнение (47), то оно в точности становится уравнением Шрёдингера

$$\left(i\hbar \partial_t + \frac{\hbar^2}{2m} \partial_k \partial_k - U \right) \lambda(x, t) = 0, \quad (50)$$

где произвольная функция $U \equiv mu^2 W$ имеет смысл потенциала. Нормализующий функционал в физическом пространстве приобретает вид

$$\int_{V_\Lambda} \lambda \lambda^* dV_\Lambda \rightarrow \frac{1}{\varepsilon^3} \int_V \sigma^2 dV = 1, \quad (51)$$

откуда следует геометрическая и физическая трактовка «функции состояния» λ . С точки зрения (пред-)геометрии, как было показано выше, $\lambda(x, t) = \sigma(x, t) e^{i\alpha(x, t)}$ описывает повернутую в комплексной плоскости на угол α (или мерцающую) и растянутую в σ раз 2D-ячейку фундаментальной поверхности, параметры мерцания и растяжения зависят от координат физического пространства и времени. С точки зрения физики, функция σ может рассматриваться как относи-

тельная «полу-плотность» массы $\sigma = \sqrt{\rho(x,t) / \rho_{mean}}$, где $\rho(x,t)$ – локальная плотность, $\rho_{mean} = const$ – средняя плотность в объеме V . Тогда соотношение (51) приобретает смысл определения массы, очевидно, входящей в уравнение Шредингера и в определение масштабных стандартов (49)

$$\int_V \rho(x,t) dV = \rho_{mean} \varepsilon^3 = m. \quad (52)$$

С крупномасштабных позиций физического мира весь объект представляет собой, по сути, материальную точку, в которой расположено начало кватернионной триады, повернутой на угол 2α (или вращающейся с удвоенной частотой). Подобная трактовка позволяет целенаправленно искать статические и динамические решения уравнения (50).

Атом водорода: решение Шредингера и модель Бора

Модель водородоподобного атома Шредингера, считающаяся сегодня единственно верной, возникает как интерпретация точного решения уравнения (50) с потенциалом центрального заряда $U \equiv -q^2 / r$; в этом решении от времени зависит лишь фаза $\lambda(r,t) \equiv \sigma(x) e^{-i\frac{Et}{\hbar}}$, $E = const$, поэтому оно обычно называется стационарным. Здесь будут рассматриваться только круговые орбитали, т.е. масштабный фактор есть функция радиуса $\sigma = \sigma(r)$, тогда уравнение (50) в сферических координатах имеет вид

$$E + \frac{\hbar^2}{2m} \frac{1}{r\sigma} d_r d_r (r\sigma) + \frac{q^2}{r} = 0. \quad (53)$$

Традиционно его записывают в безразмерных величинах r/a , E/E_0 , где

$$a = \hbar^2 / (mq^2), \quad E_0 = mq^4 / (2\hbar^2).$$

Решение уравнения (53), как известно, приводит к полиномам Лягерра для функции σ/r и к выражению для уровней энергии

$$E = -E_0/n^2.$$

С фрактальных позиций, модель Шредингера представляет собой 2D-ячейку фундаментальной поверхности, мерцающую с циклической частотой $\omega = E/\hbar$, при этом в окрестности каждого дискретного радиального уровня есть компактное (и конформное) растяжение метрики ячейки, заданное функцией $\sigma(r)$.

С точки зрения макромира, это имеющая массу электрона точка, совпадающая с центром симметрии модели. В этой точке находится начало кватернионной триады, вращающейся с частотой 2ω вокруг произвольно направленного вектора \mathbf{q}_3 . В 3D-координатах эта точка остается неподвижной, поэтому модель Шредингера правильнее было бы классифицировать не как стационарную, а как статическую.

Однако можно показать, что уравнение (50) с тем же потенциалом допускает иное стационарное решение, где понятие стационарности связывается с устоявшимся движением. Именно если электрон действительно обращается вокруг ядра по круговой орбите, то можно ожидать волнового решения с фазой

$$\alpha = k\varphi - \omega t, \tag{54}$$

где $k = const$ – угловое волновое число, φ – азимутальный угол 3D-сферических координат, $\omega = const$ – циклическая частота гармонического мерцания ячейки. При этом масштабный фактор также может быть функцией времени, угловой и радиальной координат, например, следующего вида

$$\sigma = g(\varphi, t) f(r). \tag{55}$$

Пусть в центральном поле протона электрон движется по плоской круговой орбите (полярный угол равен $\pi/2$), тогда подстановка функций (54, 55) в уравнение (50) приводит к системе уравнений (действительной и мнимой части)

$$\omega \hbar - \frac{k^2 \hbar^2}{2mr^2} + \frac{q^2}{r} + \frac{\hbar^2}{2m} \left[\frac{1}{rf} \partial_r \partial_r (rf) + \frac{1}{g r^2} \partial_\varphi \partial_\varphi g \right] = 0, \quad (56a)$$

$$\partial_t g + \frac{k\hbar}{mr^2} \partial_\varphi g = 0. \quad (56b)$$

Система (56) имеет точное решение. Умножение уравнения (56a) на r^2 и перенос последнего слагаемого в правую часть приводит к разделению переменных, при этом уравнение для функции $g(\varphi, t)$ имеет вид $\partial_\varphi \partial_\varphi g + \mu^2 g = 0$, где μ – действительный параметр; следовательно, $g = A \sin(\mu\varphi + \gamma)$. Условие нормировки

$$\begin{aligned} \int_0^{2\pi} g^2 d\phi &= \frac{A^2}{2} \int_0^{2\pi} [1 - \cos 2(\mu\phi - \gamma)] d\phi = \\ &= \frac{A^2}{2} \left\{ 2\pi - \frac{1}{2\mu} [\sin(4\pi\mu + 2\gamma) + \sin 2\gamma] \right\} = 1 \end{aligned}$$

определяет значение амплитуды $A = 1/\sqrt{\pi}$ и налагает ограничения на параметр

$$\mu = n/2, \quad n = \pm 1, \pm 2, \dots$$

Достаточно значения натурального ряда

$$n = 1, 2, 3, \dots, \quad (57)$$

так как отрицательные значения n соответствуют встречному движению. Функция $g(\varphi, t)$ приобретает вид

$$g(\varphi, t) = \frac{1}{\sqrt{\pi}} \sin \left[\frac{n}{2} \varphi - \gamma(t) \right]. \quad (58)$$

Угловая скорость движения электрона на круговой орбите определяется фазовой скоростью волны (58) $\Omega \equiv \dot{\phi} = 2\dot{\gamma} / n$; с другой стороны, $\Omega = 2\pi / (kT_0)$, где $T_0 = \pi / \omega$ – период половинного мерцания 2D-ячейки (или полный период вращения 3D-репера), следовательно, $\Omega = 2\omega / k$. Выражения для угловой скорости очевидно совместны при

$$\dot{\gamma} = \omega, \quad k = n. \quad (59)$$

Тогда $g(\varphi, t) = \frac{1}{\sqrt{\pi}} \sin\left[\frac{n}{2}(\varphi - \Omega t)\right]$; подстановка этой функции в уравнение (56б) дает соотношение

$$m\Omega_n r_n^2 = n\hbar, \quad (60)$$

выражающее тот факт, что каждому значению натурального параметра n соответствует определенное значение радиуса круговой орбиты r_n и угловой скорости Ω_n движения электрона по этой орбите.

Соотношение (60) хорошо известно в квантовой физике как формула квантования момента импульса электрона, постулированная Бором в его весьма успешной модели атома водорода; в данном случае эта формула появляется как часть решения уравнения Шредингера.

Считая далее величины дискретными, можно определить энергию электрона как $E_n = \omega_n \hbar$, и из формулы (60) выразить его импульс $p_n \equiv m \Omega r_n = n\hbar / r_n$, тогда, с учетом решения (58), уравнение (56а) можно записать в виде, не нарушающем равенство

$$E_n - \frac{p_n^2}{2m} + \frac{q^2}{r_n} = 0 = -\frac{\hbar^2}{2m} \left[\frac{1}{rf} \partial_r \partial_r (rf) + \frac{n^2}{4r^2} \right]. \quad (61)$$

Равная нулю левая часть (61) выражает энергию макрочастицы, равномерно движущейся по окружности в поле кулоновского потенциала, что эквивалентно уравнению Ньютона $p_n^2 / (mr_n) = q^2 / r_n^2$. Отсюда следуют известные соотношения для атома водорода Бора: радиус орбиты электрона

$$r_n = an^2 = \frac{\hbar^2 n^2}{mq^2}, \quad (62)$$

угловая скорость обращения по орбите

$$\Omega_n = \frac{n\hbar}{mr_n^2} = \frac{mq^4}{n^3\hbar^3},$$

циклическая частота мерцания 2D-ячейки, определяющая энергию электрона на боровской орбите

$$\omega_n = \frac{E_n}{\hbar} = \frac{n^2\hbar}{2mr_n^2} = \frac{mq^4}{2n^2\hbar^3}.$$

Правую часть (61) можно было бы рассматривать как уравнение, определяющее радиальную амплитуду волновой функции на каждой орбите. Общим решением этого уравнения является функция

$$f_n(r) = Ar_n^{-\frac{1+\sqrt{1+n^2}}{2}} + Br_n^{-\frac{1-\sqrt{1+n^2}}{2}};$$

если $A \neq 0, B = 0$, то амплитуда убывает при увеличении квантового числа n (на более высокой орбите), тогда $f_{n+1} < f_n$. Впрочем, условие нормировки делает знание амплитуды формальным, поскольку в данной модели (типа модели Бора) радиус орбиты электрона определен соотношением (62).

Однако в целом, по сравнению с решением Шредингера, полученное решение имеет иную геометрическую трактовку.

С фрактальных позиций, полученная как решение уравнения Шредингера «модель Бора» представляет собой 2D-ячейку, мерцающую с циклической частотой $\omega_n = E_n / \hbar$ и распространяющуюся как волна по круговой орбите с фазовой скоростью $\Omega_n = 2\omega_n / n$; конформное растяжение метрики 2D-ячейки определяется функцией $\sigma_n \sim (1/\sqrt{\pi}) \sin[n/2(\varphi - \Omega t)]$, то есть полученное (до нормализации) решение описывает волновое гармоническое распределение относительной плотности $\sigma_n^2(\varphi, t)$ частицы на круговой орбите, по сути, вращающееся тонкое кольцо, число максимумов плотности на котором равно номеру орбиты. На этом уровне данная модель отличается от модели Бора, где электрон изначально считается компактным массивным телом.

Но, с точки зрения макромира (после нормализации), картина в известном смысле восстанавливается, тем более что момент инерции (значит, и импульса) тонкого кольца радиуса r_n и массы m равен моменту инерции массивной точки, имеющей те же параметры. После интегрирования плотности по циклической координате распределенный объект становится точкой, имеющей массу электрона и движущейся по орбите со скоростью $u_n = \Omega_n r_n \cong u_1 n$, где характерная скорость (на нижней орбите) $u_1 = \Omega_1 r_1 \cong c \tilde{\alpha}$ имеет значение, впервые найденное Зоммерфельдом [24], $\tilde{\alpha} \cong 1/137,036$ – постоянная тонкой структуры. Характерная длина, определяемая формулой (49a), в данном случае равна величине радиуса первой орбиты $\varepsilon = \hbar/(mu) = r_1$. В свою очередь движущаяся по орбите массивная точка является началом кватернионной

триады, вращающейся с частотой $2\omega_n$ так, что на длине каждой орбиты укладывается целое число длин волн (вращения), как было замечено Де Бройлем в модели Бора, при этом на нижней орбите угловая частота орбитального обращения равна частоте вращения репера.

Здесь также стоит напомнить о «чувствительности» уравнения Шредингера по отношению к выбору потенциальной энергии $U(x)$, дополнительная константа в которой, в отличие от уравнений классической механики, приводит к новому решению. Представляется, что этот, казалось бы, нестандартный для механики факт можно несколько прояснить при разделении уравнения Шредингера (в общем виде) на действительную и мнимую части, подобно тому, как это сделано в частном случае при получении уравнений (56).

«Универсальные» уравнения механики

Здесь полезно вернуться к условию стабильности (47) («математическому уравнению Шредингера») до введения физических единиц и масштабов. Зная общий вид функции $\lambda = \sigma(\xi_\Lambda, \theta) e^{i\alpha(\xi_\Lambda, \theta)}$, в уравнении (47) можно выделить действительную и мнимую части

$$\partial_\theta \sigma + \partial_\Lambda \sigma \partial_\Lambda \alpha + \frac{1}{2} \sigma \partial_\Lambda \partial_\Lambda \alpha = 0, \quad (63a)$$

$$\partial_\theta \alpha + \frac{1}{2} (\partial_\Lambda \alpha)(\partial_\Lambda \alpha) + W - \frac{1}{2} \partial_\Lambda \partial_\Lambda \sigma / \sigma = 0 \quad (63b)$$

(стоит напомнить, что здесь и далее везде есть суммирование по M -мерному индексу Λ). Эта система уравнений вполне эквивалентна условию стабильности; тем не менее «предыдущее знание физики» позволяет каждому из уравнений (63) дать свою трактовку. Уравнение (63a) есть «корень квадратный» из уравнения непрерывности для конформного факто-

ра, что демонстрируется умножением этого уравнения на $2\sigma(\xi_\Lambda, \theta)$

$$2\sigma\partial_\theta\sigma + 2\sigma\partial_\Lambda\sigma\partial_\Lambda\alpha + \sigma^2\partial_\Lambda\partial_\Lambda\alpha = \partial_\theta\sigma^2 + \partial_\Lambda(\sigma^2\partial_\Lambda\alpha) = 0.$$

Над физическим пространством (и временем) это уравнение идентично закону непрерывности плотности, определяемой фактором σ .

Что же касается уравнения (63б), то для него возможны две трактовки.

С одной стороны, переменные этого уравнения могут быть функциями, сравнимо быстро изменяющимися при изменении координат; тогда в физических единицах соотношение (63б) есть часть уравнения квантовой механики [каким, в частности, является уравнение (53)].

С другой стороны, фаза может быть функцией, медленно меняющейся по сравнению с масштабным фактором; тогда произвольную функцию W в уравнении (63б) можно представить в виде суммы $W = W_{ext} + W_{int}$ внешнего «макропотенциала» W_{ext} и внутреннего «микрopotенциала» W_{int} . В этом случае уравнение (63б) распадается на две независимые части

$$\partial_\theta\alpha + \frac{1}{2}(\partial_\Lambda\alpha)(\partial_\Lambda\alpha) + W_{ext} = 0, \quad (64a)$$

$$\partial_\Lambda\partial_\Lambda\sigma / \sigma = 2W_{int}. \quad (64б)$$

Несложно видеть, что уравнение (64a) имеет форму уравнения Гамильтона–Якоби аналитической механики, при этом смысл функции действия (или величины, пропорциональной действию) имеет фаза α . Величину полной фазы на отрезке $[\theta_1, \theta_2]$ можно найти, подставив в (64a) выражение частной производной через полную $\partial_\theta\alpha = d_\theta\alpha - (d_\theta\xi_\Lambda)(\partial_\Lambda\alpha)$

$$\alpha = \int_{\theta_1}^{\theta_2} \left[d_{\theta} \xi_{\Lambda} \partial_{\Lambda} \alpha - \frac{1}{2} (\partial_{\Lambda} \alpha) (\partial_{\Lambda} \alpha) - W_{ext} \right] d\theta \equiv$$

$$\equiv \int_{\theta_1}^{\theta_2} L(d_{\theta} \xi_{\Lambda}, \xi_{\Lambda}) d\theta;$$
(65)

подынтегральное выражение в функционале (65) имеет вид математического обобщения функции Лагранжа классической механики. Величина фазы на данном отрезке экстремальна, если исчезает вариационная производная $\delta\alpha = 0$, что приводит к математическому обобщению уравнения динамики

$$d_{\theta} \left[\partial_{\kappa} \alpha + \frac{\partial(\partial_{\Lambda} \alpha)}{\partial(d_{\theta} \xi_{\kappa})} (d_{\theta} \xi_{\Lambda} - \partial_{\Lambda} \alpha) \right] + \partial_{\kappa} W_{ext} = 0; \quad (66)$$

здесь $\partial_{\kappa} \alpha \equiv P_{\kappa}$ – аналог M -мерного импульса частицы, $d_{\theta} \xi_{\kappa} \equiv V_{\kappa}$ – аналог скорости, $-\partial_{\kappa} W \equiv F_{\kappa}$ – аналог внешней силы. Над 3D-пространством в физических единицах уравнение (68), очевидно, должно становиться уравнением динамики Ньютона.

В свою очередь однородное уравнение (64б) определяет зависимость функции σ от внутренних факторов, обусловленных зависимостью от координат «потенциала» W_{int} , который на этом уровне построения модели может быть задан произвольно.

Теперь предлагается рассмотреть уравнения (63) над 3D-физическим пространством с использованием введенных ранее масштабных стандартов (49). В этом случае уравнения (63) принимают вид уравнений Боме [25]

$$\partial_t \sigma + \frac{\hbar}{m} \partial_m \sigma \partial_m \alpha + \frac{\hbar}{2m} \sigma \partial_m \partial_m \alpha = 0, \quad (67a)$$

$$\hbar \partial_t \alpha + \frac{\hbar^2}{2m} (\partial_m \alpha)(\partial_m \alpha) + U - \frac{\hbar^2}{2m} \partial_m \partial_m \sigma / \sigma = 0, \quad (67б)$$

оставаясь при этом эквивалентом уравнения Шредингера. В частности, для модели атома водорода Шредингера, уравнение (67а) удовлетворяется тождественно, а соответствующее решение получается лишь из уравнения (67б); в приведенном выше анализе модели Бора решаются оба уравнения, при этом уравнению (64а) соответствует уравнение (56б), а уравнению (67б) – уравнение (56а).

Но если определить новую переменную $S \equiv \hbar \alpha$, ассоциируя ее с классической функцией действия, то уравнения (64) можно представить в виде (здесь $V_m \equiv \partial_m S / m$)

$$\partial_t \sigma + V_m \partial_m \sigma + \frac{1}{2} \sigma \partial_m V_m = 0, \quad (68а)$$

$$\partial_t S + \frac{1}{2m} (\partial_m S)(\partial_m S) + U_{ext} + U_{int} - \frac{\hbar^2}{2m} \partial_m \partial_m \sigma / \sigma = 0. \quad (68б)$$

В силу данной выше трактовки масштабного фактора $\sigma = \sqrt{\rho(x, t) / \rho_{mean}}$ уравнение (68а) после умножения на функцию $\sigma \rho_{mean}$ приводится к виду закона сохранения массы

$$\partial_t \rho + \partial_m (\rho V_m) = 0. \quad (69)$$

Уравнение (68б) в свою очередь распадается на две части, оперирующие в разных масштабах: классическое уравнение Гамильтона–Якоби для массивной точки в 3D-макром мире

$$\partial_t S + \frac{1}{2m} (\partial_m S)(\partial_m S) + U_{ext} = 0 \quad (70)$$

и уравнение, определенное в некоторой малой области (в объеме частицы)

$$\partial_m \partial_m \sigma - R_{\text{int}} \sigma = 0, \quad (71)$$

здесь $R_{\text{int}} \equiv (2m/\hbar^2)U_{\text{int}}$ есть произвольная функция, регулирующая распределение полуплотности массы $\sqrt{\rho(x,t)}$ и имеющая размерность см^{-2} , свойственную, например, компонентам тензора кривизны 3D-пространства.

Таким образом, систему (67) можно трактовать как своего рода «универсальные» уравнения механики, и в зависимости от пространственного масштаба они представляют собой, с одной стороны, точный эквивалент уравнения квантовой механики (50), а с другой – систему разобобщенных уравнений: непрерывности массы (69), аналитической механики (70) и распределения массы (71).

При этом физико-геометрическим образом функции действия S оказывается фаза мерцания 2D-ячейки фундаментальной поверхности или половина угла поворота кватернионной триады с началом в массивной точке, изображающей классическую частицу. Представляется, что такой допускающий визуализацию образ действия – абстрактной функции классической механики – не лишен оригинальности. Ниже показано, что эта геометрическая интерпретация оказывается связанной также с механикой релятивистской частицы.

Классический принцип экстремума действия теперь имеет смысл требования минимального значения угла поворота триады (оптически не наблюдаемой, конечно) при движении связанной с ней частицы. Легко проверить, что подинтегральное выражение функционала при $\alpha = S/\hbar$ в физических переменных имеет точный вид функции Лагранжа, а уравнение (68) становится уравнением динамики Ньютона.

Модель 3D-частицы, теория относительности и волна де Бройля

Функционал (65) можно рассмотреть, ограничиваясь представлением о частице как о массе, распределенной в малом объеме, и связанной с ней триадой, вращающейся вокруг произвольно направленного вектора \mathbf{q}_3 .

Пусть на малом отрезке траектории dz этот вектор совпадает с направлением скорости частицы $\mathbf{V} = V\mathbf{q}_3$. Тогда на границе малого объема $\varepsilon/2$ каждый из ортогональных \mathbf{q}_3 векторов триады, например \mathbf{q}_1 , описывает винтовую линию (цилиндрическую спираль) с элементом длины

$$dl^2 = dz^2 + (\varepsilon/2)^2 d(2\alpha)^2 = dz^2 + \varepsilon^2 d\alpha^2; \quad (72)$$

здесь учтено, что угол поворота триады в 3D-пространстве есть удвоенная фаза мерцания 2D-ячейки, а радиус цилиндрической спирали равен $\varepsilon/2$. Из соотношения (72) следует изменение фазы мерцания (половинного угла поворота)

$$d\alpha = \pm \frac{1}{\varepsilon} \sqrt{dl^2 - dz^2}, \quad (73)$$

и если считать, что на радиусе $\varepsilon/2$ скорость движения вектора триады – характерная скорость микропроцесса – максимальна $u = c$, то есть $\varepsilon = \hbar/(mc)$, то $dl = cdt$; в свою очередь $dz = Vdt$, подстановка этих выражений в формулу (73) преобразует ее к виду

$$d\alpha = \pm \frac{mc^2 dt}{\hbar} \sqrt{1 - \frac{V^2}{c^2}}, \quad (74)$$

знаки \pm , очевидно, задают правый или левый винт спирали. Величина фазы (в единицах постоянной Планка) на отрезке $[t_1, t_2]$ определяется интегрированием (74). Взятый со знаком минус определенный интеграл

$$\alpha \hbar = -mc^2 \int_{t_1}^{t_2} dt \sqrt{1 - \frac{V^2}{c^2}} \equiv -mc \int_{t_1}^{t_2} ds \equiv S \quad (75)$$

имеет точную форму функционала действия свободной релятивистской частицы (или частицы с адиабатными параметрами).

Если частица классическая, $V \ll c$, то из формулы (74) следует приближенное выражение для дифференциала действия

$$dS \cong \hbar d\alpha = -mc^2 dt + \frac{mV^2}{2} dt. \quad (76)$$

Добавление и вычитание слагаемого $mV^2/2$ с заменой $Vdt = dz$ и представление полной производной фазы $d\alpha = \omega dt + k_n dx_n$ для адиабатных функций $k_n \sim const$, $\omega \sim const$ (отрицательное число) приводит соотношение (76) к виду

$$\begin{aligned} dS &= \omega \hbar dt + k_z \hbar dz = \\ &= -\left(mc^2 + \frac{mV^2}{2} \right) dt + mV dz \equiv -E dt + p_z dz. \end{aligned} \quad (77)$$

Из уравнения (77) сразу следуют классические и квантовые соотношения для энергии частицы

$$\frac{\partial S}{\partial t} = -E = \omega \hbar \quad (78a)$$

и ее импульса $\frac{\partial S}{\partial z} = p_z = k_z \hbar$, или

$$\frac{\partial S}{\partial x_n} = p_n = k_n \hbar. \quad (78b)$$

Согласно формулам (78), фаза мерцания 2D-ячейки частицы есть $\alpha \sim (p_n x_n - Et) / \hbar$, то есть частица в рассматриваемой модели обладает свойствами волны де Бройля с функцией состояния

$$\lambda(x_n, t) \sim \sigma \exp[i(p_n x_n - Et) / \hbar]. \quad (79)$$

Следует подчеркнуть, что соотношения (78, 79), известные ранее как эвристические предположения, в данном случае являются неизбежным атрибутом «спиральной структуры» 3D-частицы, которая, в свою очередь, есть следствие сильных математических требований.

Стоит перечислить следующие результаты анализа «спиральной структуры».

1. Единственное предположение в данной модели – о фундаментальной скорости вращения триады на пограничном радиусе – автоматически приводит к лагранжиану свободной релятивистской частицы; при этом подтверждается, что фаза мерцания есть функция действия, измеренная в величинах постоянной Планка $\alpha = S / \hbar$.

2. При этом фаза мерцания пропорциональна также величине пространственно-временного интервала частицы, который, с точки зрения 3D-мира, представляет собой длину дуги окружности, описываемой «поперечным» вектором триады на пограничном радиусе частицы в ее собственной системе отсчета.

3. Для свободной покоящейся частицы $d\alpha = \omega dt$ тогда из соотношения (76) следует $\omega \hbar = mc^2$, то есть собственная энергия частицы оказывается связанной с частотой мерцания ее 2D-ячейки или с собственным вращением 3D-частицы, которое таким образом должно быть непрерывным; если частица движется, то $\omega \hbar = mc^2 \sqrt{1 - V^2 / c^2} \equiv m_\nu c^2$.

4. Функция мерцания $\lambda(x_n, t)$ для свободной нерелятивистской частицы автоматически оказывается функцией состояния волны де Бройля.

Уравнение Шредингера–Паули

Уравнение (47), выведенное для скаляра λ , очевидно, представляет собой простейший вариант условия стабильности. Однако векторы диады являются спинорами (31), в частности, четными (здесь и далее символ $^+$ опущен) $\psi'' = \lambda \psi$, $\varphi'' = \lambda * \varphi$; $\psi, \varphi = const$, и интеграл (34) в общем виде, но эквивалентно записывается так (для простоты область определения функции $\lambda(\xi_n, \theta)$ будет считаться 3D-пространством)

$$f(\theta) \equiv \int_{V_n} \varphi'' \psi'' dV_n = 1. \quad (80)$$

Спинорную природу векторов диады можно учесть, если рассмотреть более сложный случай, когда в 3D-пространстве задано векторное поле $A_k(x_n, t)$, влияющее на распространение 2D-ячейки

$$k_n = \partial_n \alpha + A_n. \quad (81)$$

При этом локальную 3D-метрику следует представить формулой алгебры Клиффорда

$$\delta_{kn} \equiv \frac{1}{2} (\mathbf{p}_k \mathbf{p}_n + \mathbf{p}_n \mathbf{p}_k); \quad (82)$$

здесь для удобства использованы матрицы Паули общего вида $\mathbf{p}_k \equiv i\mathbf{q}_k$. С учетом соотношений (81, 82) условие сохранения интеграла (80) приобретает вид

$$\begin{aligned} & \partial_\theta (\phi \lambda * \lambda \psi) + \\ & + \frac{1}{2} (\mathbf{p}_m \mathbf{p}_n + \mathbf{p}_n \mathbf{p}_m) \partial_m [\phi \lambda * \lambda \psi (\partial_n \alpha + A_n)] = 0. \end{aligned} \quad (83)$$

Дифференцированием квадратичных функций уравнение (83) приводится к форме

$$(\lambda^* \phi) \times \left[\left(\partial_\theta - \frac{i}{2} \partial_k \partial_k + \frac{1}{2} \partial_k A_k + A_k \partial_k + \frac{i}{2} A_k A_k + \frac{i}{2} \varepsilon_{kmj} \mathbf{p}_j \partial_m A_k + iW \right) (\lambda \psi) \right] + \\ + \left[\left(\partial_\theta + \frac{i}{2} \partial_k \partial_k + \frac{1}{2} \partial_k A_k + A_k \partial_k - \frac{i}{2} A_k A_k + \frac{i}{2} \varepsilon_{mj} \mathbf{p}_j \partial_m A_k - iW \right) (\lambda^* \phi) \right] \times (\lambda \psi) = 0,$$

где добавлено и вычтено слагаемое $i(\lambda^* \phi) \times \left(\frac{1}{2} A_k A_k + W \right) \times (\lambda \psi)$. Последнее уравнение распадается на уравнение для вектора-спинора

$$\left[i\partial_\theta - \frac{1}{2} (-i\partial_k + A_k)(-i\partial_k + A_k) - \frac{1}{2} \mathbf{p}_k B_k - W \right] \psi'' = 0, \quad (84)$$

где $B_k \equiv \varepsilon_{kmn} \partial_m A_n$, и комплексно-сопряженное уравнение для эрмитово-сопряженного спинора. При переходе от математических переменных к физическим посредством соотношений (48, 49) новое условие стабильности (84) становится уравнением Шредингера–Паули

$$\left[i\hbar \partial_t - \frac{1}{2m} (-i\hbar \partial_k + \frac{q}{c} \tilde{A}_k)(-i\hbar \partial_k + \frac{q}{c} \tilde{A}_k) - \frac{q\hbar}{2mc} \mathbf{p}_k \tilde{B}_k - U \right] \Psi = 0, \quad (85)$$

где q – электрический заряд частицы, $\tilde{A}_k \equiv \frac{mc^2}{e} A_k$,

$\tilde{B}_k \equiv \frac{mc^2}{e} B_k$ – потенциал и напряженность магнитного поля,

$U \equiv mc^2 W$ – некоторый скалярный потенциал. Таким образом, уравнение Паули, так же как и уравнение Шредингера, строго выводится из чисто математических соображений: в присутствии внешнего векторного поля оно является физи-

ческим эквивалентом математического условия стабильности ассоциативных алгебр. Стоит заметить, что вид эмпирического слагаемого Паули $\frac{q\hbar}{2mc} \mathbf{p}_k \tilde{B}_k$ однажды был выведен теоретически из предположения о взаимодействии электрического заряда с микроструктурой кватернионного пространства, представленной несимметричным метрическим тензором [26]. Перспективы развития методики получения фундаментальных математических соотношений, имеющих аналоги в виде физических законов, будут обсуждены в заключительном разделе данной работы.

5. Кватернионная версия теории относительности

Здесь пойдет речь о подмножестве гиперкомплексных чисел – кватернионов (и бикватернионов), правило умножения базисных единиц которых (2), как отмечено выше, не изменяет своего формата при преобразованиях векторных единиц $\mathbf{q}_{k'} \equiv O_{k'n} \mathbf{q}_n$, $O_{k'n} \in SO(3, C)$. Этот факт позволяет выделить в структуре алгебры математические соотношения, являющиеся точными аналогами базовых соотношений теории относительности.

Кватернионные системы отсчета

Векторные единицы кватернионной алгебры геометрически представляют собой ортонормированный базис, или триаду \mathbf{q}_k , компоненты 2×2 -матричного представления которой, возможно, содержат переменные параметры. Поскольку любые триады локально задают область 3D-пространства, ниже будет рассматриваться их зависимость только от точек физического пространства (координат) и времени. Если с началом триады связывать позицию физического наблюдателя, то такая триада может рассматриваться

как система отсчета, вообще говоря, движущаяся. Есть физическое различие между триадами, явно зависящими лишь от действительных параметров и триадами, векторы которых суть функции комплексных параметров.

Действительно, триада, векторы которой преобразуются матрицами подгруппы $SO(3, R)$, с точки зрения геометрии, совершает поворот относительно исходного положения на некоторый действительный угол. Каждый пространственный вектор $\mathbf{a} \equiv a_k \mathbf{q}_k$ при любых таких поворотах остается неизменным $\mathbf{a} \equiv a_n \mathbf{q}_n = a_{k'} \mathbf{q}_{k'}$, хотя компоненты его, конечно, изменяются: $a_{k'} = a_n O_{nk'}$. Типичный такой поворот – «простое вращение» – представляет собой поворот всей триады вокруг одного из ее векторов; например, поворот на угол α вокруг \mathbf{q}_3 , такое вращение удобно представить упрощенной понятной формулой $\mathbf{q}' \equiv R_3^\alpha \mathbf{q}$. Параметры подобных простых вращений (здесь α) называются углами Крылова [28]. Триада, осуществляющая пространственные повороты, станет вращающейся (неинерциальной) системой отсчета, если действительные параметры – углы поворота – зависят от времени наблюдателя (то есть триаду нужно дополнить часами).

Ситуация меняется, когда векторы триады преобразуются матрицами группы $SO(3, C)$, компоненты которых содержат комплексные параметры. Правило умножения единиц алгебры при этом не нарушается, но каждое такое преобразование превращает вектор кватернион в бикватернион. Физически значимым оказывается выделение подмножества векторных бикватернионов вида

$$\mathbf{s} \equiv (a_n + ib_n) \mathbf{q}_n \quad (86)$$

с «определяемой нормой»

$$s^2 = b^2 - a^2, \quad (87)$$

что возможно при условии ортогональности действительной и мнимой составляющих $a_n b_n = 0$. Это условие всегда выполняется, когда вещественный и мнимый векторы направлены вдоль разных составляющих триады, например

$$\mathbf{s} \equiv ib_1 \mathbf{q}_1 + a_2 \mathbf{q}_2. \quad (88)$$

Иными словами, вектор (86, 88) есть (шестимерный) бикватернионный «корень квадратный» из скаляра (87). Не-сложно доказать теорему [22, 28], которая гласит, что вектор (88) сохраняет свою форму

$$\mathbf{s} \equiv ib_1 \mathbf{q}_1 + a_2 \mathbf{q}_2 = ib_{1'} \mathbf{q}_{1'} + a_{2'} \mathbf{q}_{2'}, \quad (89)$$

если векторы триады преобразуются $SO(3, C)$ -матрицами, представляющими собой сумму простых вращений, выполняемых в произвольном порядке, но с действительным параметром (углом поворота) относительно «мнимой оси» и мнимым параметром – относительно «вещественной оси». В целом такое преобразование реализуется произведением соответствующих матриц, образующих подгруппу $SO(1,2) \subset SO(3, C)$. Понятно, что простое вращение с мнимым параметром является гиперболическим.

Соотношение форм-инвариантности (89) можно рассматривать как математический аналог следующего «физического» равенства

$$ds \equiv idt \mathbf{q}_1 + dr \mathbf{q}_2 = idt' \mathbf{q}_{1'} + dr' \mathbf{q}_{2'}, \quad (90)$$

где dr, dt – изменения координаты частицы и интервал времени наблюдения этого изменения в триаде $\Sigma \equiv \mathbf{q}_k$, dr', dt' – соответствующие параметры движения в другой триаде $\Sigma' \equiv \mathbf{q}_{k'}$, некоторым образом движущейся относительно Σ ; фундаментальная скорость принята за единицу. Здесь существенно сделать два следующих замечания. Во-первых, поскольку в данном случае (мнимое) время измеряется вдоль

одного из векторов триады, дополнительный хронометр не нужен, так что каждая триада с наблюдателем представляет собой полноценную систему отсчета (репер). И, во-вторых, равенство (90) будет выполняться, если системы отсчета связаны преобразованием, удовлетворяющим требованиям вышеизложенной теоремы:

$$\Sigma' = O\Sigma, \quad O \in SO(1, 2). \quad (91)$$

Преобразования (91) оставляют инвариантным также, конечно, и квадрат вектора (90) – квадрат пространственно-временного интервала $ds^2 = dt^2 - dr^2$, следовательно, кватернионная теория своего рода «корень квадратный» из стандартной теории относительности должна содержать все эффекты последней. И это действительно так, поскольку шестипараметрическая группа $SO(3, C)$ изоморфна специальной группе Лоренца $SO(1, 3)$ и легко показать, что матричные элементы этих групп однозначно выражаются друг через друга [28]. Релятивистские эффекты «содержатся» в уравнениях (90, 91) при задании соответствующих матриц поворота; полезно рассмотреть ряд примеров.

Простой буст. Пусть Σ' есть результат поворота Σ на гиперболический «угол» $i\psi$

$$\Sigma' = O_3^{i\eta} \Sigma, \quad O_3^{i\eta} = \begin{pmatrix} \cosh \eta & i \sinh \eta & 0 \\ -i \sinh \eta & \cosh \eta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}; \quad (92)$$

тогда из уравнения (90) сразу следует известное преобразование координат и времени

$$dr' = dt \sinh \eta + dr \cosh \eta,$$

$$dt' = dt \cosh \eta + dr \sinh \eta.$$

Если при этом Σ' – наблюдаемый репер, то $dr' = 0$ и величина скорости ее движения относительно репера Σ определяется формулой $u = dr / dt = \tanh \eta$.

Сложение скоростей. Пусть реперы Σ' и Σ'' движутся относительно Σ так, что их скорости $u_1 = \tanh \eta_1$, $u_2 = \tanh \eta_2$ направлены под углом β друг к другу в пространственной плоскости $\{\mathbf{q}_2, \mathbf{q}_3\}$ репера Σ , и пусть при этом $\mathbf{u}_1 \uparrow\uparrow \mathbf{q}_2$. Тогда штрихованные системы удовлетворяют уравнениям поворота типа (91) $\Sigma' = O_3^{i\eta_1} \Sigma$, $\Sigma'' = O_3^{i\eta_2} O_1^\beta \Sigma$, откуда сразу определяются выражения для базисных векторов системы Σ'' как функций векторов системы Σ' : $\Sigma'' = O_3^{i\eta_2} O_1^\beta O_3^{-i\eta_1} \Sigma'$ или в явной матричной форме

$$\begin{pmatrix} \mathbf{q}_{1''} \\ \mathbf{q}_{2''} \\ \mathbf{q}_{3''} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cosh \eta_2 & i \sinh \eta_2 & 0 \\ -i \sinh \eta_2 & \cosh \eta_2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos \beta & \sin \beta \\ 0 & -\sin \beta & \cos \beta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \cosh \eta_1 & -i \sinh \eta_1 & 0 \\ i \sinh \eta_1 & \cosh \eta_1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \mathbf{q}_{1'} \\ \mathbf{q}_{2'} \\ \mathbf{q}_{3'} \end{pmatrix}.$$

Первая строка этого матричного уравнения представляет собой зависимость первого вектора Σ'' от векторов Σ'

$$\begin{aligned} i\mathbf{q}_{1''} &= (\cosh \eta_1 \cosh \eta_2 - \cos \beta \sinh \eta_1 \sinh \eta_2) i\mathbf{q}_{1'} + \\ &+ (\sinh \eta_1 \cosh \eta_2 - \cos \beta \cosh \eta_1 \sinh \eta_2) \mathbf{q}_{2'} - \\ &- \sin \beta \sinh \eta_2 \mathbf{q}_{3'}. \end{aligned} \quad (93a)$$

Поскольку в данном случае Σ'' наблюдается из Σ' , соотношение (90) для этих систем отсчета записывается в виде $dt'' i\mathbf{q}_{1''} = dt' (i\mathbf{q}_{1'} + u_y \mathbf{q}_{2'} + u_z \mathbf{q}_{3'})$, или, полагая $dt' / dt'' = \cosh \eta$,

$$i\mathbf{q}_{1''} = \cosh\eta (i\mathbf{q}_{1'} + u_y \mathbf{q}_{2'} + u_z \mathbf{q}_{3'}) . \quad (93б)$$

Из соотношений (93а,б) сразу определяется неизвестный гиперболический косинус

$$\cosh\eta = \cosh\eta_1 \cosh\eta_2 (1 - \mathbf{u}_1 \cdot \mathbf{u}_2)$$

и следуют формулы для компонент и (квадрата) модуля скорости Σ'' относительно Σ'

$$u_y = \frac{u_1 - u_2 \cos\beta}{1 - \mathbf{u}_1 \cdot \mathbf{u}_2}, \quad u_z = -\frac{u_2 \sin\beta \sqrt{1 - u_1^2}}{1 - \mathbf{u}_1 \cdot \mathbf{u}_2},$$

$$u^2 = \frac{(u_1 - u_2)^2 - (\mathbf{u}_1 \times \mathbf{u}_2)^2}{(1 - \mathbf{u}_1 \cdot \mathbf{u}_2)^2} . \quad (94)$$

Если реперы Σ'' и Σ' движутся в противоположных направлениях $\beta = \pi$, то уравнения (94) сводятся к случаю параллельного движения: $u = (u_1 + u_2)/(1 + u_1 u_2)$. Следует отметить, что рассмотренная здесь задача о сложении скоростей при непараллельном движении релятивистских систем отсчета в специальной теории относительности оказывается более трудоемкой.

Кинематика неинерциальных систем отсчета в кватернионной версии

Параметры преобразований кватернионных триад могут быть функциями координат и времени физического пространства, тогда соответствующие системы отсчета являются неинерциальными. Описание такого движения в векторном формате с использованием дифференциальных соотношений (42, 43) оказывается весьма удобным. Ниже приводится ряд известных примеров, демонстрирующих удобство метода, и расчет новых эффектов релятивистского неинерциального движения.

Гиперболическое движение. Прямолинейное (вдоль вектора \mathbf{q}_2) движение репера Σ' относительно репера Σ с постоянным ускорением $a' = const$ описывается уравнением поворота $\Sigma' = O_3^{i\eta(t')} \Sigma$, где матрица $O_3^{i\eta(t')}$ идентична (92), но имеет переменные компоненты, а параметр $\eta(t')$ нужно определить.

Пусть вначале Σ' наблюдается из Σ . Тогда базисный вектор-интервал имеет вид ($c = 1$)

$$ds = idt' \mathbf{q}_1' = idt \mathbf{q}_1 + dr \mathbf{q}_2, \quad (95a)$$

а вектор ускорения, вычисляемый как вторая производная (95a),

$$\mathbf{a}' = d^2 \mathbf{s} / dt'^2 = id \mathbf{q}_1' / dt' = i\omega_{112} \mathbf{q}_2 = \dot{\eta} \mathbf{q}_2 = a' \mathbf{q}_2, \quad (95b)$$

дает решение для параметра $\eta(t') = a't'$, постоянная интегрирования (начальная скорость) выбрана равной нулю. Теперь, используя следующее из равенства (95) соотношение $dt / dt' = \cosh \eta$, легко найти зависимость времени наблюдателя Σ от времени Σ'

$$t(t') - t_0 = \int dt' \cosh(a't') = \frac{1}{a'} \sinh(a't');$$

$$t'(t) = \frac{1}{a'} \ln \left[a't + \sqrt{1 + (a't)^2} \right], \quad t_0 = 0,$$

и все «наблюдаемые» кинематические характеристики:

- относительную скорость

$$u(t) = \tanh(a't') = \tanh[\sinh(a't)] = \frac{a't}{\sqrt{1 + (a't)^2}}, \quad (96a)$$

- ускорение и координату как функции времени наблюдателя

$$a(t) = \frac{du(t)}{dt} = \frac{a'}{[1+(a't)^2]^{3/2}},$$

$$r(t) = \int u(t)dt = \frac{1}{a'}\sqrt{1+(a't)^2} - \frac{1}{a'}. \quad (96б)$$

Но если формулы (96) можно получить в рамках специальной теории относительности [29], то обратная задача о движении инерциального репера, наблюдаемого из равноускоренной системы отсчета, в скалярном (стандартном) формате теории обычно не рассматривается. Но она легко решается в рассматриваемом векторном формате.

Пусть теперь Σ наблюдается из Σ' . Этой кинематической ситуации соответствует обращенное уравнение поворота $\Sigma = O_3^{-i\eta(t')} \Sigma'$ с прежней функцией параметра $\eta(t') = a't'$; вектор-интервал имеет вид

$$ds = idt' \mathbf{q}_1 - dr' \mathbf{q}_2 = idt \mathbf{q}_1,$$

откуда определяется (ожидаемо исчезающий) вектор ускорения инерциального репера

$$\mathbf{a} = d^2\mathbf{s}/dt^2 = id\mathbf{q}_1/dt = 0$$

и соотношение интервалов времени $dt'/dt = \cosh\eta$. Далее по вышеизложенному алгоритму вычисляются все кинематические характеристики движения Σ «наблюдаемого» из Σ'

$$t(t') = \int dt' / \cosh(a't') = \frac{1}{a'} \arcsin[\tanh(a't')], \quad t_0 = 0; \quad (97а)$$

$$u(t') = \tanh(a't'); \quad r'(t') = \frac{1}{a'} \ln[\cosh(a't')], \quad r_0 = 0;$$

$$a(t') = \frac{a'}{\cosh^2(a't')} . \quad (976)$$

Как и в предыдущем случае, при малых значениях времени формулы (97) сводятся к формулам нерелятивистского ускоренного движения, но для больших значений времени Σ' часы в репере Σ замедляются и останавливаются в пределе $t_{t' \rightarrow \infty} \rightarrow \pi c / (2a')$.

Прецессия Томаса. Пусть репер Σ постоянно ориентирован относительно «неподвижных звезд» и находится в центре круговой орбиты радиуса R , по которой равномерно движется репер Σ' , ориентированный так же. Требуется найти проекцию $\mathbf{q}_{2'}$ на векторы \mathbf{q}_k притом, что в начальный момент времени $\mathbf{q}_{2'} \uparrow \uparrow \mathbf{q}_2$. В нерелятивистском случае всегда $\mathbf{q}_{2'} = \mathbf{q}_2$, но при больших относительных скоростях должен возникать эффект, называемый прецессией Томаса [30]. В рамках специальной теории относительности расчет этого эффекта достаточно сложен (см., например, [31, 32]), в векторной версии задача решается просто. Репер Σ переводит в Σ' следующее тройное преобразование: (i) вращение вокруг вектора No 1 на угол $\gamma(t) = \omega t$; (ii) гиперболический поворот вокруг вектора No 2 на «угол» $i\eta$, $\tanh \eta = \omega R = const$; (iii) обратное вращение вокруг нового вектора No 1 на угол $-\gamma(t') = -\omega t'$, что задает прежнюю ориентацию репера Σ' относительно «неподвижных звезд». Уравнение такого поворота $\Sigma' = O_1^{-\gamma(t')} O_2^{i\eta} O_1^\gamma \Sigma$ имеет явный вид

$$\begin{pmatrix} \mathbf{q}_1 \\ \mathbf{q}_2 \\ \mathbf{q}_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos(\omega t') & -\sin(\omega t') \\ 0 & \sin(\omega t') & \cos(\omega t') \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \cosh \eta & 0 & -i \sinh \eta \\ 0 & 1 & 0 \\ i \sinh \eta & 0 & \cosh \eta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos(\omega t) & \sin(\omega t) \\ 0 & -\sin(\omega t) & \cos(\omega t) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \mathbf{q}_1 \\ \mathbf{q}_2 \\ \mathbf{q}_3 \end{pmatrix},$$

откуда с учетом соотношения $t' = t / \cosh \eta$ определяется, например, проекция \mathbf{q}_2 на \mathbf{q}_3

$$\langle \mathbf{q}_2 \rangle_3 = \sin[(\omega - \omega')t] - 2 \sinh^2(\eta/2) \cos(\omega t) \sin(\omega' t) \cong \sin(\omega_T t).$$

Таким образом, с точки зрения Σ -наблюдателя, вектор \mathbf{q}_2 прецессирует (ретроградно) с постоянной частотой, наибольшая часть которой (по порядку величины) соответствует прецессии Томаса

$$\omega_T \equiv \omega - \omega' = \omega (1 - \cosh \eta) = -\frac{\omega}{2} \left(\frac{\omega R}{c} \right)^2.$$

Полезно заметить, что в векторном формате теории относительности несложно рассчитываются эффекты типа прецессии Томаса для орбит произвольной формы, а также аналогичные эффекты, наблюдаемые из неинерциальных систем отсчета (детали см. в книге [22]).

Релятивистский гармонический осциллятор. Репер Σ' движется под действием гармонической силы, направленной вдоль \mathbf{q}_2 , и наблюдается из инерциального репера Σ . Эта кинематическая ситуация аналогична рассмотренной выше задаче гиперболического движения, описывается сходным уравнением поворота и базовым интервалом. Но величина собственного ускорения репера Σ' (то есть силы на единицу массы) в данном случае должна быть гармонической функцией

$$\mathbf{a}' = d^2\mathbf{s}/dt'^2 = \frac{d\eta}{dt'} \mathbf{q}_2 = \Omega' \beta \cos \Omega' t' \mathbf{q}_2;$$

здесь Ω' – собственная частота осциллятора, $\beta < 1$ – некоторая постоянная, $c = 1$. Последнее равенство определяет функцию гиперболического параметра $\eta(t') = \beta \sin \Omega' t'$, а с ним – соотношение времен

$$t = \int \cosh \eta(t') dt' = \int \cosh(\beta \sin \Omega' t') dt'.$$

При условии $\beta < 1$ этот интеграл вычисляется точно в виде ряда (см., например, [15])

$$t = t' + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\beta^{2n}}{(2n)!} \left[\frac{1}{2^{2n}} \binom{2n}{n} t' + \frac{(-1)^n}{2^{2n-1}} \sum_{k=0}^{n-1} (-1)^k \binom{2n}{k} \frac{\sin(2n-2k)\Omega' t'}{(2n-2k)\Omega'} \right], \quad (98a)$$

откуда при $\Omega' T' = 2\pi$ определяются соотношения периодов и частот в Σ и Σ'

$$T = T' \left(1 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\beta^{2n}}{(2n)!} \frac{1}{2^{2n}} \binom{2n}{n} \right),$$

$$\Omega = \Omega' \left(1 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\beta^{2n}}{(2n)!} \frac{1}{2^{2n}} \binom{2n}{n} \right)^{-1}. \quad (98b)$$

Из соотношений (98б) следует, что в репере Σ колебательный процесс представляется более медленным, чем в реальности. Расчет кинематических характеристик осциллятора, наблюдаемого из Σ , требует обращения формулы (98а): $t' = t'(t)$, что может быть сделано в приближении $\beta = v/c \ll 1$; $v = \text{const}$

$$t' \cong t - \frac{\beta^2}{4} \left(t - \frac{1}{2\Omega} \sin 2\Omega t \right).$$

Относительная скорость реперов определяется стандартной формулой

$$u(t) = c \tanh(\beta \sin \Omega t') \cong v \sin \Omega t \left(1 - \frac{1}{3} \beta^2 + \frac{7}{12} \beta^2 \cos^2 \Omega t \right), \quad (99)$$

согласно которой в начале и в конце периода реперы друг относительно друга неподвижны $u(0, T) = 0$, а максимальная наблюдаемая скорость есть $u_{\max} \equiv V(T/4) = v(1 - \beta^2/3)$. Таким образом, движение осциллятора Σ' , с точки зрения Σ , оказывается негармоническим. Наблюдаемые величины ускорения и координаты соответственно получаются дифференцированием и интегрированием функции (99) по времени наблюдателя.

Обратная задача наблюдения инерциального репера Σ из системы отсчета Σ' , связанной с осциллятором, решается по тому же алгоритму. В этом случае нет необходимости обращать функцию времени, поэтому все кинематические характеристики определяются в виде сходящихся рядов точно, что выделяет эту задачу из многих других релятивистских задач, допускающих лишь приближенные решения.

Нелишне также отметить, что данная задача о релятивистском осцилляторе позволяет проанализировать известный «парадокс близнецов» с весьма «физичных» позиций. Действительно, если космическое путешествие рассматривать как одно колебание осциллятора Σ' , то «близнецы» покоятся друг относительно друга в начале и в конце движения, где положения их строго совпадают, а также в точке поворота, тогда как околосветовая скорость на всех частях траектории достигается постепенно (детали см. в книге [22]). Ни одно из вышеперечисленных условий не выполняется при ана-

лизе этого парадокса в рамках специальной теории относительности.

Наблюдаемые с Земли релятивистские эффекты в ближнем космосе

Векторный (кватернионный) формат теории относительности весьма удобен для моделирования широкого спектра кинематических ситуаций в неинерциальных реперах, в том числе и таких, где телом отсчета является Земля. Это позволяет рассмотреть ряд релятивистских эффектов в масштабах Солнечной системы, где скорости тел уже значительны, а скорость света не представляется слишком большой величиной, так что такие эффекты становятся заметными.

Релятивистский сдвиг спутников планет. Пусть Земля (репер Σ) и планета (репер Σ') движутся вокруг Солнца по круговым орбитам с постоянными линейными скоростями V_E , V_P и пусть при этом разность их угловых орбитальных скоростей есть $\Omega \equiv \Omega_E - \Omega_P = \text{const}$; все величины измерены земным Σ -наблюдателем. Тогда гиперболический параметр $\eta(t) \ll 1$, определяющий стандартное соотношение времен $t = t' \cosh \eta$, с достаточной точностью определяется из геометрии треугольника скоростей

$$V^2 = V_E^2 + V_P^2 - 2V_E V_P \cos \Omega t = c^2 \tanh^2 \eta.$$

Пусть наблюдаемая планета имеет спутник, $\omega' = \text{const}$ – его собственная угловая частота обращения по орбите радиуса $r = \text{const}$. В силу соотношения времен частота, наблюдаемая с Земли, оказывается меньше $\omega = \omega' / \cosh \eta$, то есть часы «релятивистски отстают». Несложно найти наблюдаемый угол положения спутника относительно его позиции в некоторый начальный момент времени

$$\begin{aligned}\phi_{obs}(t) &= \int \omega dt = \omega' \int dt / \cosh \eta(t) \cong \\ &\cong \omega' t \left\{ \left[1 - \frac{1}{2c^2} (V_E^2 + V_P^2) \right] + \frac{V_E V_P}{c^2} \frac{\sin(\Omega t)}{\Omega t} \right\},\end{aligned}$$

а затем – выражение для наблюдаемого с Земли (кажущегося) орбитального сдвига спутника

$$\Delta l \equiv r(\varphi_{obs} - \varphi_{real}) \cong -\frac{V_E^2 + V_P^2}{2c^2} r\omega' t + \frac{V_E V_P}{c^2} \frac{\sin(\Omega t)}{\Omega} r\omega'. \quad (100)$$

Видно, что этот эффект накапливается со временем и, кроме того, движение спутника наблюдается как неравномерное с переменным ускорением

$$a_{obs} = -\frac{V_E V_P}{c^2} r\omega' \Omega \sin(\Omega t); \quad (101)$$

эти факторы могут оказаться физически значимыми. В частности, расчет показывает, что самые быстрые спутники Юпитера – Метида и Адрастея – за 10 лет наблюдений «релятивистски отстают» от своего реального положения на расстояния, существенно превышающие их размеры [15].

Однако, как показали астрономические наблюдения и теоретические исследования конца прошлого века, эффект орбитального сдвига может иметь серьезное практическое значение. Действительно, в многолетних наблюдениях Фобоса, быстрого спутника планеты Марс, замечена существенная неравномерность его движения по орбите притом, что построить адекватную теоретическую модель этого движения на базе классической механики не удастся (см., например, [34–38]). Кроме того, известно, что космические аппараты, направляемые к Марсу и тем более к Фобосу, либо оказываются неуспешными (в связи с необъяснимой потерей аппарата), либо обнаруживают Фобос на траектории с существенным опережением его ожидаемой (расчетной) позиции. Ссылки на соответствующие источники приведены в работе

[33], где также показано, что расчет положения и ускорения Фобоса с помощью формул (100, 101) дает значения величин в пределах астрономических измерений и установленных экспериментально в ходе космических миссий. Так, цитируемые в литературе экспериментально измеренные значения ускорения Фобоса $a_{\text{exp}} = +1,88 \times 10^{-3} \text{ град} / \text{год}^2$ (см. [34]), $a_{\text{exp}} = -0,83 \times 10^{-3} \text{ град} / \text{год}^2$ (см. [32]) не превышают предельных значений ускорения $a_{\text{limit}} = \pm 4,84 \times 10^{-3} \text{ град} / \text{год}^2$, рассчитанных по формуле (101). А отмеченное станциями «Маринер-9» (1971 г.) и «Марс Экспресс» (2004 г.) «опережение» спутником на несколько километров его ожидаемого положения соответствует значению $\Delta l = 5,18$ км, рассчитанному по формуле (100) при условии, что в бортовой компьютер космических аппаратов закладывались данные орбитальных параметров Фобоса, полученные в период противостояния планет 8-летней давности. Таким образом, наблюдаемые неравномерности движения и запаздывание Фобоса вполне могут рассматриваться как следствия обсуждаемого релятивистского эффекта.

Данная теория была также применена для оценки успешности российского проекта «Фобос Грунт», реализация которого планировалась в 2011 году. В результате было сформулировано «релятивистское предупреждение» [33], предсказывающее возможный «пролет» космического аппарата мимо Фобоса в случае пренебрежения эффектом релятивистского сдвига. Проверить справедливость этого предсказания, к сожалению, не удалось, так как аппарат потерпел крушение на начальном участке своей траектории.

Релятивистское объяснение «аномалии Пионера». Космический зонд Пионер 10 (США) был направлен к границам Солнечной системы в 1972 году и более 20 лет передавал сигналы на Землю. Анализируя эти данные на базе эффекта Доплера, специалисты НАСА обнаружили аномальное

замедление зонда [38] с почти постоянным (отрицательным) ускорением $a_p = -(8 \pm 3) \cdot 10^{-8} \text{ см} / \text{с}^2$. Аналогичный эффект был отмечен для зонда Пионер 11. Это сообщение вызвало серию попыток объяснить «аномалию Пионера» в основном влиянием новых физических факторов (см. статью [39] и ссылки в ней). Однако построение простейшей кинематической схемы «наблюдатель-зонд» в рамках векторного формата теории относительности показало, что эта «аномалия» может быть релятивистским эффектом, ранее не учитываемым в силу его предполагаемой малости.

Пусть «неподвижный» репер Σ связан с Солнцем (массой M), а репер Σ' – с зондом (массой m), движущимся прямолинейно вдоль направления \mathbf{q}_2 с переменной скоростью $u(t)$. Уравнение поворота $\Sigma' = O_3^{-i\eta} \Sigma$ в «плоском мире» имеет следствием стандартное соотношение времен $dt = dt' \cosh \eta$ и выражение наблюдаемой в Σ частоты сигнала $f(t)$ как функции генерируемой зондом частоты $f' = \text{const}$

$$f(t) = f' / \cosh \eta = f' \sqrt{1 - (u/c)^2} \cong f' \left(1 - \frac{u^2}{2c^2} \right).$$

Отсюда вычисляется относительная разность истинной и наблюдаемой частот, возникающая как следствие эффекта «замедления времени»

$$\Delta f / f' = \frac{f' - f}{f'} = \frac{u^2}{2c^2} = \varepsilon / c, \quad (102)$$

где ε – кинетическая скорость зонда на единицу его массы. Если величина (102) определяется в результате эксперимента, то наблюдатель может прийти к ложному выводу о том, что изменение частоты есть результат движения зонда относительно наблюдателя с некоторой дополнительной (кажу-

щейся) скоростью u_K , в результате чего возникает эффект Доплера

$$f = \frac{f'}{\sqrt{1 - (u_K/c)^2}} \left(1 - \frac{u_K}{c} \cos \gamma \right), \quad (103)$$

где γ – угол между вектором скорости и волновым вектором сигнала. Для простоты будет считаться $\gamma = 0$ (это не существенно влияет на результат), тогда из формулы (103) следует $u_K = c \Delta f / f$ и, с учетом соотношения (102), определяется величина кажущейся скорости

$$u_K \cong \varepsilon / c. \quad (104)$$

В рамках классической механики и гравитации Ньютона полная энергия зонда постоянна $E_0 \equiv m\varepsilon - GMm/r = const$, где G – гравитационная постоянная, r – расстояние $\Sigma - \Sigma'$, то есть $\varepsilon = E_0/m + GM/r$. Подстановка этого выражения в уравнение (104) и дифференцирование последнего по времени дает формулу расчета кажущегося ускорения (замедления) зонда

$$a_K \equiv \dot{u}_K = -u GM / (c r^2). \quad (105)$$

Если же рассматривать этот эффект не в «плоском мире», а в рамках общей теории относительности, где поле тяготений Солнца описывается решением Шварцшильда, то в соотношении времен появляется дополнительное «гравитационное» слагаемое [39]

$$dt = dt' \left(1 + \frac{u^2}{2c^2} - \frac{GM}{c^2 r} \right),$$

так что величина кажущегося замедления по сравнению с формулой (105) удваивается

$$a_K = -2uGM/(cr^2). \quad (106)$$

Подстановка в (106) констант $c = 2,99 \cdot 10^{10} \text{ см} \cdot \text{с}^{-1}$, $G = 6,67 \cdot 10^{-8} \text{ см}^3 \cdot \text{г} \cdot \text{с}^{-2}$, $M = 1,99 \cdot 10^{33} \text{ г}$ и параметров зонда Пионер 10 на среднем этапе наблюдений (1983–1990 гг.) $u = (1,52 - 1,41) \cdot 10^6 \text{ см} / \text{с}$, $r = (4,3 - 7,2) \cdot 10^{14} \text{ см}$ (из данных НАСА [41]) дает диапазон значений кажущегося ускорения

$$a_K = -(7,27 - 2,61) \cdot 10^{-8} \text{ см} \cdot \text{с}^{-2},$$

что сравнимо с приведенными выше экспериментальными данными. Здесь стоит сделать ряд замечаний. Из формул (105, 106) следует, что если «аномалия Пионера» является релятивистским кинематическим эффектом, то, будучи обратной функцией квадрата расстояния, наблюдаемое ускорение не может быть постоянным (как вначале полагали авторы наблюдения), но должно уменьшаться со временем. Последующий анализ экспериментальных данных показал [42], что абсолютная величина ускорения действительно уменьшается, для Пионера 10 это уменьшение составляет $\Delta a_p \approx 2 \cdot 10^{-9} \text{ см} \cdot \text{с}^{-2} \cdot \text{год}^{-1}$. С помощью формулы (106) несложно рассчитать среднегодовое изменение модуля кажущегося ускорения зонда в конце среднего этапа наблюдений (1991 г.), приняв, согласно [41], $r = 7,2 \cdot 10^{14} \text{ см}$, $r_{+200} = 7,58 \cdot 10^{14} \text{ см}$,

$$\Delta a_K = \frac{2uGM}{c} \left(\frac{1}{r_{+200}^2} - \frac{1}{r^2} \right) = 2,51 \cdot 10^{-9} \text{ см} \cdot \text{с}^{-2} \cdot \text{год}^{-1},$$

что соответствует экспериментальным данным.

На основании изложенной здесь теории и приведенных расчетов приходится сделать вывод о том, что релятивистский (и гравитационный) эффект изменения частоты сигнала, принятый за часть эффекта Доплера, должен являться

заметной составляющей «аномалии Пионера» и учитываться при объяснении этого феномена.

Динамика тел в кватернионной версии теории относительности

Таким образом, векторный формат теории относительности оказывается весьма удобным для вычисления реальных физических эффектов на уровне кинематических соотношений. Не менее удобен он и для описания динамики релятивистских механических систем. Однако, прежде чем перейти к динамическим уравнениям, стоит отметить, что эта теория предполагает топологически своеобразную модель вселенной, насчитывающую не четыре измерения, как в стандартной теории относительности, а шесть измерений. Локально такую вселенную можно представить как две трехмерные области, в одной из которых сосредоточен действительный 3D-мир наблюдателя, а вторая представляет собой «мнимый» 3D-мир, где наблюдатель мысленно выделяет направление изменения времени [22]. При этом расстояния мнимого мира, как и действительного, измеряются в единицах длины, а интервал времени определяется наблюдателем как отношение мнимого расстояния к величине фундаментальной скорости. Такая вселенная «симметрична по сопряжению», то есть в каждом из 3D-миров, взаимно мнимых по отношению друг к другу, может находиться наблюдатель, считающий свой мир действительным. Но при этом следует полагать возможным и наличие наблюдателя в «параллельном мире». На сегодняшнем уровне понимания строения физического мира такая модель является абстракцией, поскольку пока она отражает лишь суть математических структур, «правильно» описывающих известные явления. Не исключен, впрочем, и иной взгляд на реальность данной модели. Приведенные здесь пояснения нужны для введения понятий о мнимых компонентах векторных (тензорных) величин, возникающих в 6-мерной модели.

Базовой величиной динамики в кватернионной теории относительности является вектор импульса. Пусть две взаимодействующие частицы с массами покоя M_0 и m_0 являются соответственно телами отсчета реперов Σ и Σ' , вообще говоря, не инерциальных. Если тело отсчета Σ' наблюдается из репера Σ , то выполняется равенство типа (90)

$$ds = i c dt' \mathbf{q}_1 = i c dt \mathbf{q}_1 + dr \mathbf{q}_2, \quad (107)$$

вектор \mathbf{q}_2 всегда параллелен вектору относительной скорости. Эта ситуация описывается уже известным уравнением поворота $\Sigma' = O_3^\eta \Sigma$. Несложно показать, что, помимо базисного вектора-интервала (107), замечательным свойством форм-инвариантности обладает также и вектор импульса. Действительно, из определения импульса наблюдаемого тела в его собственной системе отсчета Σ' с учетом соотношения времен $dt = dt' \cosh \eta$ следует

$$\mathbf{P}' = m_0 \frac{ds}{dt} \frac{dt}{dt'} = m_0 \cosh \eta \frac{ds}{dt} = m \frac{ds}{dt} \equiv \mathbf{P}, \quad (108)$$

где, как в специальной теории относительности, принято $m = m_0 \cosh \eta$. Разложение вектора импульса по компонентам реперов определяется из соотношений (107, 108)

$$\mathbf{P}' = i m_0 c \mathbf{q}_1, \quad (109a)$$

$$\mathbf{P} = m_0 \cosh \eta (i c \mathbf{q}_1 + u \mathbf{q}_2). \quad (109b)$$

Уравнение динамики как закон изменения импульса под действием силы можно записать в формате уравнений Ньютона с позиций разных системы отсчета.

В репере Σ' от времени t' зависит направляющий вектор времени $\mathbf{q}_1(t')$. Производная по t' собственного импульса (109a) выражается через компоненты связности, вводимые по правилу (43) $\partial_{t'} \mathbf{q}_{k'} = \Omega_{k'n'} \mathbf{q}_{n'}$, или в развернутом виде

$$\partial_t \mathbf{P}' = m_0 i c (\Omega_{1'2'} \mathbf{q}_{2'} + \Omega_{1'3'} \mathbf{q}_{3'}),$$

где компоненты связности описывают соответственно собственное касательное и нормальное ускорение репера Σ'

$$\Omega_{1'2'} = -i a_{2'} / c, \quad \Omega_{1'3'} = -i a_{3'} / c.$$

Если определить силу как произведение массы покоя Σ' -наблюдателя и ускорения, которое он ощущает (измеряет), $\mathbf{F}' = m_0 a_{k'} \mathbf{q}_{k'}$, то динамика в репере Σ' описывается соотношением, имеющим формат уравнений Ньютона

$$\partial_t \mathbf{P}' = \mathbf{F}'. \quad (110)$$

Соотношение (110) целесообразно использовать для решения обратной задачи механики для наблюдаемого тела: Σ' -наблюдатель, инструментально измерив собственное ускорение и зная собственную массу покоя, может вычислить компоненты действующей на него силы.

Для Σ -наблюдателя также можно записать уравнение типа (110) $\partial_t \mathbf{P} = \mathbf{F}$; после дифференцирования импульса (109б) по времени t оно принимает вид

$$\begin{aligned} \partial_t \mathbf{P} &= \\ &= m_0 \left[\dot{\eta} \sinh \eta (i c \mathbf{q}_1 + u \mathbf{q}_2) + \cosh \eta (i c \Omega_{12} \mathbf{q}_2 + i c \Omega_{13} \mathbf{q}_3 + i u \mathbf{q}_2 + u \Omega_{21} \mathbf{q}_1 + u \Omega_{23} \mathbf{q}_3) \right] = \\ &= F_k \mathbf{q}_k, \end{aligned} \quad (111)$$

где по правилу $\partial_t \mathbf{q}_k = \Omega_{kn} \mathbf{q}_n$ введены компоненты связности, отождествляемые с нормальной и касательной компонентами $\Omega_{12} = -i a_2 / c, \Omega_{13} = -i a_3 / c$ собственного ускорения репера Σ и с угловой скоростью $\Omega_{23} \equiv \Omega$ его поворота в плоскости векторов \mathbf{q}_2 и \mathbf{q}_3 . При этом векторное уравнение (111) записывается в компонентах следующим образом

$$i m \frac{u}{c} (c \dot{\eta} + a_2) = i F_1, \quad (112a)$$

$$m(c \dot{\eta} + a_2) = F_2, \quad (112б)$$

$$m(u \Omega + a_3) = F_3. \quad (112в)$$

Уравнения (112) описывают динамику релятивистского тела (репера Σ'), движущегося под действием некоторой силы и наблюдаемого из, вообще говоря, неинерциального репера Σ , вектор \mathbf{q}_2 которого постоянно параллелен вектору относительной скорости реперов. Эта система уравнений имеет две существенные отличительные черты. Во-первых, здесь присутствует временная (мнимая) компонента силы F_1 , наличие которой связано с 3+3-симметрией вселенной в данной модели: подобно тому, как сила F_2 изменяет величину относительной скорости, следовательно, масштаба пространства, так сила F_1 симметрично изменяет масштаб времени. Впрочем, компонента (112а), пропорциональная компоненте (112б), не влияет на математическое содержание уравнений. Во-вторых, релятивистский характер динамики очевидно подтверждается тем, что в полученной системе уравнений вместо производных скорости по времени фигурируют производные гиперболического параметра. В целом эта система позволяет решать прямые и обратные задачи динамики и при малых значениях u/c сводится к классической системе уравнений Ньютона.

Взаимосвязь ускорений. Взаимозависимость между собственным ускорением репера Σ' и компонентами его ускорения, наблюдаемого из системы отсчета Σ , устанавливается с помощью уравнения поворота $\Sigma' = O_3^\eta \Sigma$, из которого следуют соотношения

$$\mathbf{q}_{1'} = \cosh \eta \mathbf{q}_1 - i \sinh \eta \mathbf{q}_2,$$

$$\mathbf{q}_{2'} = i \sinh \eta \mathbf{q}_1 + \cosh \eta \mathbf{q}_2,$$

$$\mathbf{q}_{3'} = \mathbf{q}_3,$$

$$\partial_{t'} = \cosh \eta \partial_t.$$

После подстановки этих соотношений с учетом свойства инвариантности (108) уравнение (110) приводится к виду

$$\partial_{t'} \mathbf{P} = m \left(\frac{V}{c} a_{2'} i \mathbf{q}_1 + a_{2'} \mathbf{q}_2 + \frac{a_{3'}}{\cosh \eta} \mathbf{q}_3 \right); \quad (113)$$

сравнение коэффициентов при векторах \mathbf{q}_k в уравнениях (111) и (113) дает формулы искомой взаимосвязи касательного и нормального ускорений

$$a_{2'} = c \dot{\eta} + a_2,$$

$$\frac{a_{3'}}{\cosh \eta} = V \Omega + a_3. \quad (114a)$$

Эти соотношения полезно переписать в виде

$$c \dot{\eta} = a_{2'} - a_2,$$

$$V \Omega = \frac{a_{3'}}{\cosh \eta} - a_3, \quad (114b)$$

явно демонстрирующем особенности релятивистской динамики. Действительно, разность касательных ускорений реперов определяет наблюдаемое касательное ускорение, которое здесь выражается как производная по времени от гиперболического параметра (а не от относительной скорости). Наблюдаемое же нормальное ускорение (заданное здесь модулем векторного произведения относительной скорости реперов и угловой скорости вращения репера Σ) есть релятивистски скорректированная разность собственных нормальных уско-

рений вовлеченных систем отсчета. Несложно проверить, что при условии $V/c \ll 1$ соотношения (114б) сводятся к классическому случаю.

Стоит добавить, что последние соотношения имеют простой геометрический смысл, по сути, являются следствием того факта, что кватернионная связность не является тензором относительно преобразований репера, что продемонстрировано выше в формуле (43б). Для частного случая связности Ω_{kn} эта формула переписывается в виде

$$\Omega_{k'n'} = O_{k'j} O_{n'm} \Omega_{jm} + \partial_t O_{k'j} O_{n'j},$$

тензорные свойства «портит» последнее слагаемое. В случае используемого здесь простого преобразования $\Sigma' = O_3^{\eta} \Sigma$ только две компоненты отличны от нуля

$$\Omega_{1'2'} = \Omega_{12} - i\dot{\psi}, \quad \Omega_{1'3'} = \cosh \psi \Omega_{13} - i \sinh \psi \Omega_{23};$$

подстановка сюда принятых выше обозначений компонент связности через собственные ускорения реперов приводит в точности к уравнениям (114а). Таким образом, уравнения релятивистской динамики представляют собой отражение геометрических свойств рассматриваемого кватернионного пространства.

Формулировка релятивистской задачи двух тел. Пусть M_0 и m_0 – соответственно массы покоя тел отсчета реперов Σ и Σ' , взаимодействующих между собой. Тогда, с позиций базового репера Σ , компоненты ускорений следующим образом выражаются через компоненты силы

$$a_{2'} = F_2' / m,$$

$$a_2 = F_2 / M_0,$$

$$a_{3'} = F_3' / m_0,$$

$$a_3 = F_3 / M_0. \quad (115)$$

Здесь F'_k, F_k – компоненты связующей силы, действующей соответственно на Σ' и Σ , при этом касательное ускорение определяется через релятивистскую массу $m = m_0 \cosh \eta$ наблюдаемого репера Σ' , так как в этом направлении есть относительное движение; нормальное ускорение определяется через массу покоя. Подстановка определений (115) в уравнения (114б) приводит к следующей простой системе динамических уравнений

$$c\dot{\eta} = F'_2 / m - F_2 / M_0, \quad V\Omega = F'_3 / m - F_3 / M_0. \quad (116a)$$

В силу симметричности механической ситуации, аналогичная система должна быть записана для базы Σ' , из которой наблюдается репер Σ

$$-c\dot{\eta} = F'_2 / M - F_2 / m_0, \quad -V\Omega = F'_3 / M - F_3 / m_0, \quad (116б)$$

но с учетом противоположного знака относительной скорости и необходимости проводить все вычисления во времени t' .

Уравнения (116) представляют собой систему уравнений релятивистской динамики двух взаимодействующих тел. Существенно заметить, что все компоненты сил оцениваются конкретным наблюдателем в определенный момент времени (t или t'). Эти уравнения весьма удобно использовать для приближенного решения широкого круга задач с учетом эффектов запаздывания взаимодействий и сигналов. Несложно показать, что эти эффекты как минимум пропорциональны V/c при условии, что скорость передачи взаимодействия (как и электромагнитного сигнала) конечна. Например, если на тело Σ со стороны тела Σ' действует переменная сила $\mathbf{F}[r(t)]$, то с точки зрения Σ -наблюдателя, на тело Σ' , находящееся на расстоянии r , такая же по модулю сила со сторо-

ны Σ будет действовать с запаздыванием $\mathbf{F}'[r(t)] = -\mathbf{F}[r(t + \Delta t)]$, $\Delta t = r/c$. Если $\Delta t/t \ll 1$, то

$$\mathbf{F}'[r(t)] \cong \mathbf{F}[r(t)] + \frac{d\mathbf{F}}{dr} \frac{dr}{dt} \Delta t = \mathbf{F}[r(t)] + r \frac{d\mathbf{F}}{dr} \frac{V}{c},$$

где V – радиальная компонента относительной скорости. Подстановка данного разложения в систему (116а) очевидно требует поиска решения до первого порядка по V/c , что достигается представлением радиальной скорости в виде классической и релятивистской составляющих $\dot{r} = V_C + V_R$, $V_R \ll V_C$.

Впрочем, даже в тех случаях, когда параметры запаздывания пренебрежимо малы (статическое поле сил, малы расстояния между телами, малы градиенты силы), в решениях могут проявляться эффекты, отражающие релятивистскую специфику динамических уравнений. Показательный пример – задача движения частицы в поле большой массы.

Пусть тело (массой M_0) системы отсчета наблюдателя Σ , неподвижной ($a_k = 0$), но допускающей повороты, есть источник поля центральной силы, в котором движется частица Σ' с массой покоя m_0 , $M_0 \gg m_0$; поле силы статическое, эффект запаздывания не учитывается (задача будет решаться в приближении малых относительных скоростей).

Поскольку вектор импульса частицы форм-инвариантен по отношению к преобразованиям поворота, уравнение динамики можно записать (и решать) в любом допустимом репере. В данном случае удобно использовать следящий репер, вектор \mathbf{q}_2 которого определяет направление радиуса-вектора частицы $\mathbf{r} = r \mathbf{q}_2$; тогда очевидно $\mathbf{F} = F \mathbf{q}_2$. Вектор импульса частицы (109б) в следящем репере записывается так

$$\mathbf{P} = m_0 \cosh \eta (iV_1 \mathbf{q}_1 + V_2 \mathbf{q}_2 + V_3 \mathbf{q}_3) \equiv m (ic\mathbf{q}_1 + \dot{r}\mathbf{q}_2 + r\dot{\beta}\mathbf{q}_3),$$

здесь β – угол поворота репера Σ , $m = m_0 \cosh \eta$. Динамические уравнения $\partial_t \mathbf{P} = \mathbf{F}$ представлены системой

$$im\dot{\eta}V = iF_1, \quad (117a)$$

$$m \left(\frac{V}{c} \dot{\eta} \dot{r} + \ddot{r} - r\dot{\beta}^2 \right) = F, \quad (117б)$$

$$m \left(\frac{V}{c} \dot{\eta} r \dot{\beta} + 2\dot{r}\dot{\beta} + r\ddot{\beta} \right) = 0, \quad (117в)$$

где $V = (\dot{r}^2 + r^2 \dot{\beta}^2)^{1/2}$ – модуль скорости частицы. При условии $F_1 = (\dot{r}/c)F$ уравнение (117a) является следствием уравнений (117б,в), так что достаточно решить два последних уравнения системы. Стандартная подстановка $\sigma \equiv r^2 \dot{\beta}$ в уравнение (117в) дает первый интеграл системы $\sigma = r^2 \dot{\beta} = \sigma_0 / \cosh \eta(t)$, $\sigma_0 = const$, то есть секторная скорость σ в репере Σ переменна, но модуль момента импульса – величина постоянная $L \equiv m\sigma = m_0\sigma_0$. При этом из уравнения (117б) после умножения его на $\dot{r} \cosh \eta$ следует интеграл энергии $\frac{m_0}{2} \left(\dot{r}^2 \cosh^2 \eta + \frac{\sigma_0^2}{r^2} \right) + U \equiv E = const$, но в предположении, что $\frac{dU(r)}{dr} \equiv \frac{d\tilde{U}(r)}{dr} \left(1 + \frac{PV^2}{2c^2} \right)$, где \tilde{U} – какой-то классический потенциал, P – натуральное число. Выражая из интеграла энергии $V^2 / (2c^2) = (E - \tilde{U}) / m_0 \ll 1$, легко найти решение последнего дифференциального уравнения

$$U \equiv \tilde{U} \left[1 + \frac{PE}{m_0 c^2} - \frac{P\tilde{U}}{2m_0 c^2} \right] + U_0, \quad U_0 = const. \quad (118)$$

Теперь можно найти вторые интегралы движения. В частности, равенство дифференциалов времени, вычисленных из интегралов секторной скорости и энергии, имеет своим следствием уравнение траектории

$$\beta(r) - \beta_0 = \int \frac{\sigma_0 dr}{r^2} \left[\frac{2}{m_0} (E_0 - U) - \frac{\sigma_0^2}{r^2} \right]^{-\frac{1}{2}}, \quad \beta_0 = const, \quad (119)$$

формально классическое, но с потенциалом (118).

Формула (119), примененная для расчета релятивистских поправок к задаче Кеплера с потенциалом $\tilde{U}(r) = -GM_0 m_0 / r$, приводит к траектории в форме искаженного, но статического эллипса, так что эффекта типа смещения перигелия данные поправки не вызывают. Более интересным оказывается пример, связанный с вышеупомянутой аномалией ускорения космического зонда Пионер 10. Радиальное ускорение зонда, записанное в формате $a_r = \frac{d\dot{r}}{dt} = \frac{d\dot{r}}{dr} \frac{dr}{dt} = \frac{d(\dot{r}^2/2)}{dt}$, просто рассчитывается как производная квадрата радиальной скорости, определяемой из интеграла энергии,

$$a_r \cong a_N \left[1 + \frac{(P-4)E}{2m_0 c^2} - \frac{2U_0}{m_0 c^2} + \frac{2(P-4)\alpha}{m_0 c^2} \frac{\alpha}{r} + \frac{3\sigma_0^2}{2c^2} \frac{1}{r^2} \right], \quad (120)$$

где $a_N = -GM_0 m_0 / r^2$ – ньютоновское ускорение. В случае аномалии Пионера целесообразно учитывать только те релятивистские добавки к ускорению, которые убывают не быстрее, чем a_N , то есть в формуле (120) следует оценить только первые две постоянные поправки. По данным НАСА [41], на расстоянии $r_p = 6 \cdot 10^{14}$ см от Солнца зонд Пионер 10 имел скорость $V_p = 1,5 \cdot 10^6$ см/с; известны также масса Солнца $M_S = 1,99 \cdot 10^{33}$ г и величина гравитационной постоянной

$G = 6,67 \cdot 10^{-8} \text{ см}^3 \text{ г}^{-1} \text{ с}^{-2}$. Это позволяет вычислить классическое ускорение зонда $a_N = -GM_S/r_p^2 \cong -3,7 \cdot 10^{-4} \text{ см/с}^2$ и вклад механической энергии зонда в первую поправку $E/(m_0 c^2) \sim 10^{-9}$. В целом первая поправка имеет порядок $\sim 10^{-13} \text{ см/с}^2$, что на 5 порядков меньше значения наблюдаемой аномалии.

Вторая поправка определяется постоянной U_0 , которую можно трактовать как локально постоянную (фоновую) гравитационную энергию части Галактики (включающей гало), расположенной в квазисферической области радиуса солнечной орбиты $R \sim 2 \cdot 10^{22} \text{ см}$ и имеющей массу $M_G \sim 10^{45} \text{ г}$ [45]. Такого рода фоновая гравитация приводит к дополнительному (помимо ньютоновского) замедлению космического зонда

$$a_G \cong -a_N \frac{2U_0}{m_0 c^2} = a_N \frac{GM_G}{Rm_0 c^2} \cong -0,44 \cdot 10^{-8} \text{ см/с}^2,$$

что сравнимо с наблюдаемой величиной «аномалии Пионера», которая (не исключено) может являться суммой влияния различных физических факторов.

Завершая на этом главу о кватернионной модели теории относительности, следует сказать следующее. Здесь не только изложены физико-математические основы построения данной теории, но, как представляется, также продемонстрированы и определенные практические выгоды ее использования для решения широкого спектра кинематических и динамических задач механики. Однако эта практичная теория не может считаться завершенной с чисто математических позиций, поскольку в ней системы отсчета представлены триадами кватернионных векторов, базовыми единицами алгебры, но не элементарными математическими объектами. Такими объектами, как показано выше, являются спиноры, составляющие диады на фундаментальной поверхности, и нет со-

мнения в том, что все основные соотношения векторной теории относительности также могут быть записаны в терминах кватернионных спиноров. Но эта задача пока еще ждет своего решения.

6. Кватернионы и векторные «калибровочные поля»

Здесь кратко изложены сведения о взаимосвязи математики кватернионов и формата двух типов так называемых калибровочных (gauge) полей – физического электромагнитного поля и гипотетического поля Янга–Миллса.

Электромагнитное поле.

Есть несколько способов описания электромагнитных взаимодействий. Стоит напомнить, что изначально Максвелл для записи своих уравнений успешно использовал тогда только что открытую математику кватернионов. Позднее усилиями Гиббса и Хэвисайда эти достаточно сложные гиперкомплексные формулы были редуцированы к более простым соотношениям векторной алгебры, которые широко применяются и в настоящее время. Хорошо известны также варианты записи уравнений Максвелла в тензорном формате четырехмерного пространства-времени, а также с использованием алгебры дифференциальных форм. Однако эти технологические средства не углубляют понимания взаимосвязи математических и физических законов, хотя такая взаимосвязь существует. Так, уравнения электродинамики выводятся из вариационной процедуры, где нужный лагранжиан появляется как следствие преобразования, например, скалярных потенциалов операторами группы $U(1)$ с локализованными параметрами, что требует введения компенсационного («калибровочного») векторного поля. Иначе те же уравнения возникают в вариационной процедуре теории Калуцы с лагранжианом в виде скалярной кривизны пятимерного пространства-времени. Но в обоих этих случаях исходным пунк-

том является принцип экстремума действия – алгоритм, порожденный аналитической механикой.

Другой путь к уравнениям электродинамики прослеживается в математике гиперкомплексных чисел при изучении элементов теории функции кватернионного переменного, первые шаги в разработке которой, видимо, были сделаны в работах Р. Фютера [46]. Впрочем, есть ссылки на исследования и других авторов [47, 48]. В этих работах по аналогии с теорией функций комплексного переменного делается попытка ввести понятие функции-кватерниона с кватернионным аргументом $G(y)$

$$G = G_0(y) + G_n(y)\mathbf{q}_n, \quad y \equiv y_0 - y_k\mathbf{q}_k;$$

все единицы алгебры здесь полагаются постоянными. Обобщая известные понятия, можно считать функцию $G(y)$ непрерывной и достаточно гладкой и определить для нее понятие предела, а затем – производной по аргументу. В силу некоммутативности умножения в данном случае, очевидно, следует определять левую и правую производную

$$\bar{d}_y G \equiv \frac{\partial G}{\partial y_0} + \mathbf{q}_n \frac{\partial G}{\partial y_n}, \quad G \bar{d}_y \equiv \frac{\partial G}{\partial y_0} + \frac{\partial G}{\partial y_n} \mathbf{q}_n. \quad (121)$$

Можно показать, что, как и в случае функции комплексного переменного, производные (121) определяются неоднозначно, и для устранения этого недостатка требуются дополнительные условия типа известных условий Коши–Римана, например,

$$\bar{d}_{\bar{y}} G = 0, \quad (122)$$

где производная берется по сопряженному аргументу $\bar{y} \equiv y_0 + y_k\mathbf{q}_k$,

$$\bar{d}_{\bar{y}} G = \frac{\partial G}{\partial y_0} - \mathbf{q}_n \frac{\partial G}{\partial y_n} = 0.$$

Для перехода к физическим приложениям требуется разрешить компонентам всех величин принимать комплексные значения: так иногда удобно записывать объекты псевдоевклидова пространства с сигнатурой (+ - - -). Пусть в таком пространстве определена дифференцируемая слева Q -функция

$$A(u) \equiv i\varphi + A_k \mathbf{q}_k, \quad (123)$$

где φ, A_k потенциалы электромагнитного поля – действительные функции (скалярная и векторная) формально заданного аргумента

$$u \equiv -ict - x_k \mathbf{q}_k,$$

где x_k, t – координата точки и время ее наблюдения. Соответствующий оператор дифференцирования и ему сопряженный записываются в виде

$$d_u \equiv \frac{i}{c} \frac{\partial}{\partial t} + \mathbf{q}_n \frac{\partial}{\partial x_n}, \quad d_{\bar{u}} \equiv \frac{i}{c} \frac{\partial}{\partial t} - \mathbf{q}_n \frac{\partial}{\partial x_n}.$$

Согласно определению (121) левая производная функции $A(u)$ есть

$$\begin{aligned} \vec{d}_u A &\equiv F(u) = \\ &= -\partial_t \phi / c - \partial_n A_n + \mathbf{q}_n (i\partial_t A_n / c + i\partial_n \phi + \varepsilon_{jmn} \partial_j A_m). \end{aligned} \quad (124a)$$

Если принята калибровка Лоренца $\partial_t \phi / c + \partial_n A_n = 0$, то скалярная компонента F обращается в ноль, а векторная компонента определяет напряженности поля

$$E_n \equiv -\partial_t A_n / c - \partial_n \phi, \quad H_n \equiv \varepsilon_{jmn} \partial_j A_m; \quad (124b)$$

в целом соотношение (124) кратко записывается в виде

$$F(u) = (H_n - iE_n) \mathbf{q}_n.$$

Если Q-функция $F(u)$ дифференцируема, то, согласно условию (122),

$$\begin{aligned} \bar{d}_u F &= i \partial_t F / c - \mathbf{q}_n \partial_n F = \\ &= i \nabla_n E_n - \nabla_n H_n - \mathbf{q}_k \left[i \left(\frac{1}{c} \dot{H}_k + \varepsilon_{mnk} \nabla_m E_n \right) + \frac{1}{c} \dot{E}_k - \varepsilon_{mnk} \nabla_m H_n \right] = 0. \end{aligned}$$

Из последнего соотношения выделяются (как скалярные и векторные, действительные и мнимые компоненты) уравнения

$$\begin{aligned} \partial_n E_n &= 0, \quad \partial_t E_n / c - \varepsilon_{jmn} \nabla_j H_m = 0, \\ \partial_n H_n &= 0, \quad \partial_t H_n / c + \varepsilon_{jmn} \nabla_j E_m = 0, \end{aligned} \quad (125)$$

форма которых точно повторяет вид вакуумных уравнений Максвелла. При этом легко проверить, что в силу определений (124б) последняя пара уравнений (125) представляет собой точные тождества. Существенно отметить, что в данном случае возникновение уравнений типа уравнений электродинамики никак не связано с физико-математической эмпирикой, в том числе с процедурой варьирования действия, но есть результат анализа чисто математических соотношений.

В то же время понятно, что такого рода вывод уравнений Максвелла имеет чисто методический характер, тем более что с физических позиций он содержит ряд недостатков. Среди них – отсутствие источников поля, а также отсутствие естественной для кватернионов $SO(3, C)$ -инвариантности уравнений (125). Следует также заметить, что условие Фютера (122), хотя и приводит к интересному результату, но представляет собой элемент математической эвристики, а не является частью состоятельной теории функций кватернионного переменного; такая теория пока не построена. Тем не менее сделанные замечания задают перспективу дальнейшего изучения очевидной взаимосвязи базовых соотношений математики гиперкомплексных чисел с формулировкой теории

электромагнетизма. Но помимо обозначенных проблем включения источников и поиском $SO(3,C)$ -инвариантных уравнений поля, не менее значимым видится представление векторных полей и их уравнений в спинорном формате, в том числе анализ спин-магнитных взаимодействий, задаваемых слагаемыми типа Паули в уравнении квантовой механики.

Поле Янга–Миллса.

Вначале следует условиться о следующих обозначениях. Пусть индексы $A, B, C \dots$ нумеруют генераторы группы Ли, греческие индексы α, β, \dots относятся к голономным координатам четырехмерного пространства-времени, индексы $a, b, c \dots$ здесь перечисляют поля спинорного мультиплетта, а индексы $j, k, m \dots$, как и прежде, нумеруют векторы триады в некотором касательном кватернионном пространстве.

Обычно поле Янга–Миллса $A_{B\mu}$ вводится как калибровочное в процедуре локализации преобразований некоторого, например, спинорного поля [49, 50]

$$\psi_a \rightarrow U(y^\beta) \psi_a. \quad (126)$$

Если в соответствующем лагранжиане частную производную от ψ_a заменить на ковариантную

$$\partial_\beta \rightarrow D_\beta \equiv \partial_\beta - gA_\beta, \quad A_\beta \equiv iA_{C\beta} \mathbf{T}_C,$$

где g – действительная константа (параметр модели), \mathbf{T}_C – бесследовые матрицы, генераторы некоторой группы Ли, удовлетворяющие перестановочному соотношению $[\mathbf{T}_B, \mathbf{T}_C] = if_{BCD} \mathbf{T}_D$ со структурными константами f_{BCD} , то

$$D_\beta U \equiv (\partial_\beta - gA_\beta)U = 0, \quad (127)$$

и лагранжиан остается инвариантным относительно преобразований (126). Теория становится замкнутой, если в лагранжиан добавляется слагаемое собственно калибровочного поля $L_{ЯМ} \sim F^{\alpha\beta} F_{\alpha\beta}$, $F_{\alpha\beta} \equiv F_{C\alpha\beta} \mathbf{T}_C$, напряженность которого $F_B^{\mu\nu}$ следующим образом выражается через потенциалы $A_{B\mu}$ и структурные константы

$$F_{C\alpha\beta} = \partial_\alpha A_{C\beta} - \partial_\beta A_{C\alpha} + f_{CDE} A_{D\alpha} A_{E\beta}.$$

Вакуумные уравнения калибровочного поля являются результатом варьирования действия, построенного из лагранжиана $L_{ЯМ}$

$$\partial_\alpha F^{\alpha\beta} + [A_\alpha, F^{\alpha\beta}] = 0. \quad (128)$$

В частности, генераторами группы Ли [группы $SU(2)$] могут являться векторные кватернионные единицы, заданные, например, как простейшие 2×2 -матрицы $i\mathbf{T}_B \rightarrow \mathbf{q}_n = -i\sigma_n$, здесь σ_n – матрицы Паули. Тогда $f_{BCD} \rightarrow \varepsilon_{kmn}$ и выражения для потенциала и напряженности калибровочного поля записываются в виде

$$A_\beta = \frac{g}{2} A_{n\beta} \mathbf{q}_n, \quad (129)$$

$$F_{k\alpha\beta} = \partial_\alpha A_{k\beta} - \partial_\beta A_{k\alpha} + \varepsilon_{kmn} A_{m\alpha} A_{n\beta}. \quad (130)$$

Стоит заметить, что этот общепринятый метод введения полей типа Янга–Миллса, как и в случае электромагнитного поля, существенно использует эвристическую базу теоретической физики, в первую очередь, постулат экстремума действия и формализм построения функций Лагранжа. Но поскольку в описании полей такого типа естественно применимы кватернионные единицы, можно предположить, что

некоторые из вышеприведенных соотношений содержатся также в теории кватернионных пространств и имеют геометрические аналоги. Проверить состоятельность этого предположения позволяет обращение к пространственно-временной модели с трехмерным кватернионным сечением.

Пусть на начальном этапе рассматривается четырехмерное пространство-время (с координатами y^α), 3D-сечение которого локально представлено репером \mathbf{q}_k , а из дифференциальных характеристик отлична от нуля лишь собственная связность $\omega_{\alpha mk}$ [см. определение (42)]. Можно определить ковариантную производную $D_\alpha \equiv \delta_{mk} \partial_\alpha + \omega_{\alpha mk}$; равенство нулю такой производной от векторов репера

$$D_\alpha \mathbf{q}_k \equiv (\delta_{mk} \partial_\alpha + \omega_{\alpha mk}) \mathbf{q}_m = 0, \quad (131)$$

по сути, эквивалентно определению $\omega_{\alpha mk}$. Далее, пусть репер \mathbf{q}_k есть результат преобразования некоторой постоянной триады $\mathbf{q}_{\tilde{k}}$ матрицами спинорной группы – функциями четырехмерных координат $\mathbf{q}_k = S(y) \mathbf{q}_{\tilde{k}} S^{-1}(y)$, тогда

$$\partial_\alpha S \mathbf{q}_{\tilde{k}} S^{-1} + S \mathbf{q}_{\tilde{k}} \partial_\alpha S^{-1} = \omega_{\alpha kn} S \mathbf{q}_{\tilde{n}} S^{-1}. \quad (132)$$

Каждую векторную кватернионную единицу всегда можно представить в виде тензорного произведения спиноров [см. формулы (26)], в частности собственных функций $\psi_{(\tilde{n})}^\pm, \varphi_{(\tilde{n})}^\pm$ вектора $\mathbf{q}_{\tilde{n}}$. Обобщение формулы (26г) для любого вектора триады с использованием спиноров лишь положительной четности (знак «+» опускается) имеет вид

$$\mathbf{q}_{\tilde{n}} = i(2\psi_{(\tilde{n})} \varphi_{(\tilde{n})} - 1).$$

Тогда левая часть соотношения (132) можно переписать в виде

$$\frac{1}{2}(\partial_\alpha S \mathbf{q}_{\tilde{k}} S^{-1} + S \mathbf{q}_{\tilde{k}} \partial_\alpha S^{-1}) = (\partial_\alpha S \psi_{(\tilde{k})}) \varphi_{(\tilde{k})} S^{-1} + S \psi_{(\tilde{k})} (\varphi_{(\tilde{k})} \partial_\alpha S^{-1}),$$

сходном с формулой (126) преобразования спинорных функций, то есть форм-инвариантность правила умножения кватернионных единиц относительно преобразований спинорной группы приводит к выражениям, аналогичным тем, что инициируют введение калибровочного поля типа Янга–Миллса. Чтобы определить, как такие поля могут возникнуть в математике кватернионов, потребуется более детально проанализировать последнее соотношение. Его домножение справа на комбинацию $S \mathbf{q}_{\tilde{k}}$ со сверткой по \tilde{k} приводит к выражению

$$-3\partial_\alpha S + S \mathbf{q}_{\tilde{k}} \partial_\alpha S^{-1} S \mathbf{q}_{\tilde{k}} = \omega_{ckn} S \mathbf{q}_{\tilde{n}} \mathbf{q}_{\tilde{k}}. \quad (133)$$

Представление 2×2 -матрицы спинорного преобразования в форме кватерниона (что всегда возможно)

$$S \equiv a + b_k \mathbf{q}_{\tilde{k}}, \quad S^{-1} \equiv a - b_k \mathbf{q}_{\tilde{k}}, \quad SS^{-1} = a^2 + b_k b_k,$$

что после несложных вычислений существенно упрощает второе слагаемое левой части уравнения (133), преобразуя его к замечательно простому выражению

$$\begin{aligned} S \mathbf{q}_{\tilde{k}} \partial_\alpha S^{-1} S \mathbf{q}_{\tilde{k}} &= \\ &= (a + b_n \mathbf{q}_{\tilde{n}}) \mathbf{q}_{\tilde{k}} (\partial_\alpha a - \partial_\alpha b_m \mathbf{q}_{\tilde{m}}) (a + b_l \mathbf{q}_{\tilde{l}}) \mathbf{q}_{\tilde{k}} = \\ &= -\partial_\alpha (a + b_n \mathbf{q}_{\tilde{n}}) = -\partial_\alpha S. \end{aligned}$$

Правая часть уравнения (133) преобразуется следующим образом

$$\omega_{ckn} S \mathbf{q}_{\tilde{n}} \mathbf{q}_{\tilde{k}} = -\varepsilon_{knm} \omega_{ckn} S \mathbf{q}_{\tilde{m}},$$

и в целом это уравнение после деления на два и переноса всех членов в одну сторону приобретает вид

$$\partial_\alpha S - \frac{1}{4} \varepsilon_{kmn} \omega_{ckn} S \mathbf{q}_{\bar{m}} = 0. \quad (134)$$

Если теперь сделать обозначения

$$A_{k\alpha} \equiv \frac{1}{2} \varepsilon_{kmn} \omega_{ckn}, \quad (135)$$

$$A_\alpha \equiv \frac{1}{2} A_{n\alpha} \mathbf{q}_{\bar{n}}, \quad (136)$$

то определение (136) совпадает с определением (129) (при $g = 1$), а уравнение (134) оказывается эквивалентным уравнению (127)

$$S \bar{D}_\alpha \equiv S (\bar{\partial}_\alpha - A_\alpha) = 0. \quad (137)$$

Выражение для производной обратной матрицы следует из тождества

$$\partial_\alpha S S^{-1} = -S \partial_\alpha S^{-1},$$

тогда, используя формулу (138), легко подсчитать

$$\bar{D}_\alpha S^{-1} \equiv (\partial_\alpha + A_\alpha) S^{-1} = 0. \quad (138)$$

Направление действия операторов производной не меняет существа дела, ибо ничто не мешает замене $S^{-1} \rightarrow S$ и $S \rightarrow S^{-1}$, и тогда соотношение (138) в точности совпадает с соотношением (127).

Таким образом, имеет место любопытный факт. Форм-инвариантность правила кватернионного умножения имеет своим следствием ковариантное постоянство матрицы спинорного преобразования векторных Q-единиц. При этом роль связности в ковариантной производной (то есть роль потенциала некоторого поля Янга–Миллса) играет свернутая по антисимметричным индексам дискриминантным тензором

собственная связность, которая, кстати, легко выражается из соотношения (135)

$$\omega_{akn} = \varepsilon_{mkn} A_{m\alpha}. \quad (139)$$

С помощью формулы (139) несложно установить, как через связность выражается тензор напряженности (130), свернутый для удобства с дискриминантным тензором (эта свертка обозначена специальным символом $R_{mn\alpha\beta}$)

$$\begin{aligned} R_{mn\alpha\beta} &\equiv \varepsilon_{kmn} F_{k\alpha\beta} = \\ &= \partial_\alpha \omega_{\beta mn} - \partial_\beta \omega_{\alpha mn} + \omega_{\alpha nk} \omega_{\beta km} - \omega_{\beta nk} \omega_{\alpha km}, \end{aligned} \quad (140)$$

это есть не что иное, как тензор кривизны пространства, построенный из собственной связности. Но как отмечено в параграфе 3, в силу метричности собственной связности все компоненты тензора (140) равны нулю, то есть поле Янга–Миллса, построенное таким образом, имеет ненулевой потенциал, но исчезающую напряженность.

Картина меняется в пространстве, где помимо собственной связности $\omega_{\alpha mk}$ присутствует и кватернионная неметричность $\sigma_{\beta kn}$, вызывающая поворот репера вне зависимости от его собственной функциональной зависимости от координат

$$\Omega_{\beta kn}(y^\alpha) = \omega_{\beta kn} + \sigma_{\beta kn}. \quad (141)$$

В этом случае ковариантная производная единичного кватернионного вектора не исчезает, ее результатом является именно неметричность

$$\hat{D}_\alpha \mathbf{q}_k \equiv (\delta_{mk} \partial_\alpha + \Omega_{\alpha mk}) \mathbf{q}_m = \sigma_{\alpha mk} \mathbf{q}_k. \quad (142)$$

Стандартным образом – посредством альтернирования повторной ковариантной производной некоторого вектора (или из второго уравнения структуры Картана) определяются компоненты тензора кривизны такого пространства

$$\hat{R}_{kn\alpha\beta} = \partial_\alpha \Omega_{\beta kn} - \partial_\beta \Omega_{\alpha kn} + \Omega_{\alpha km} \Omega_{\beta mn} - \Omega_{\alpha nm} \Omega_{\beta mk}. \quad (143)$$

Если свернуть этот тензор с дискриминантным тензором, сделав обозначения

$$\frac{1}{2} \varepsilon_{knm} \hat{R}_{kn\alpha\beta} \equiv \hat{F}_{m\alpha\beta}, \quad \frac{1}{2} \varepsilon_{knm} \Omega_{\alpha kn} \equiv \hat{A}_k{}_\alpha, \quad \frac{1}{2} \hat{A}_{n\alpha} \mathbf{q}_{\tilde{n}} \equiv \hat{A}_\alpha, \quad (144)$$

то определение (143) принимает вид

$$\hat{F}_{m\alpha\beta} = \partial_\alpha \hat{A}_{m\beta} - \partial_\beta \hat{A}_{m\alpha} + \varepsilon_{knm} \hat{A}_k{}_\alpha \hat{A}_{n\beta}, \quad (145)$$

ожидаемо совпадающий с определением напряженности поля Янга–Миллса (130). Но в рассматриваемом пространстве тензор кривизны, следовательно, тензор напряженности поля уже не исчезает, а согласно уравнению (142), при отсутствии собственной связности [см. формулу (44)] есть функция только кватернионной неметричности, которая таким образом является сущностным потенциалом поля. Составляющим кватернионной неметричности в данном случае могут быть геометрические объекты двух типов. Первый тип – объект неголономности, порождаемый переходом от координат искривленного пространства к координатам плоского касательного пространства; в этом случае поле с напряженностью (145) имеет природу геометрической гравитации. Действительно, уравнения (128) следуют из вариационной процедуры с лагранжианом $L_{ЯМ} \sim \hat{F}_k{}^{\alpha\beta} \hat{F}_{k\alpha\beta}$; в обозначениях (144) это – простейший квадратичный по кривизне инвариант $L_{ЯМ} \sim \hat{R}_{mn}{}^{\alpha\beta} \hat{R}_{mn\alpha\beta}$, который широко используется для построения обобщений теории гравитации Эйнштейна. Второй тип – тензор чисто кватернионной неметричности, аналог

Картанова кручения; тогда поле (145) представляет собой независимую геометрическую сущность, с гравитацией, вообще говоря, не связанную. Конечно, возможно и смешение этих двух типов кватернионной неметричности.

Теперь, имея в виду кватернионный «вывод» уравнений электродинамики, можно поставить вопрос: нельзя ли, минуя вариационную процедуру, обнаружить уравнения поля Янга–Миллса (128) в каком-либо «естественном» геометрическом соотношении? Здесь стоит вспомнить, что тензор Эйнштейна, являющий собой левую часть уравнений общей теории относительности, обнаруживает свою «консервативность» (ковариантное сохранение) в результате свертки тождеств Бьянки. Конструктивен ли анализ этих тождеств для уравнений (128), несложно проверить, используя для простоты метод дифференциальных форм. Пусть $\Omega_{kn} \equiv \Omega_{\beta kn} dy^\beta$ есть 1-форма связности, $\hat{R}_{kn} \equiv \hat{R}_{\alpha\beta kn} dy^\alpha \wedge dy^\beta$ – соответствующая 2-форма кривизны, определяемая вторым уравнением структуры

$$d\Omega_{kn} = \hat{R}_{kn} - \Omega_{km} \wedge \Omega_{mn}.$$

Внешний дифференциал левой точной формы есть тождественный ноль

$$dd\Omega_{kn} = d\hat{R}_{kn} - d\Omega_{km} \wedge \Omega_{mn} + d\Omega_{km} \wedge \Omega_{mn} = 0;$$

замена в последнем выражении производных 1-форм связности на 2-форму кривизны (из тех же уравнений структуры) приводит к тождествам Бьянки

$$d\hat{R}_{kn} + \hat{R}_{mn} \wedge \Omega_{km} + \hat{R}_{km} \wedge \Omega_{nm} = 0,$$

или в координатном представлении (греческие индексы в квадратных скобках антисимметризованы)

$$\partial_{[\gamma} \hat{R}_{kn\alpha\beta]} + \hat{R}_{mn[\alpha\beta} \Omega_{\gamma]km} + \hat{R}_{km[\alpha\beta} \Omega_{\gamma]nm} = 0. \quad (146)$$

Последовательные свертки по индексам k, α и n, γ в общей теории относительности имеют следствием ковариантное сохранение тензора Эйнштейна. В случае же поля Янга–Миллса векторные (групповые) индексы должны остаться у потенциала и напряженности, которые появляются в тождестве (146) при его свертке с дискриминантным тензором и заменой геометрических величин на «физические» с использованием соотношений (144)

$$\begin{aligned} & \frac{1}{2} \varepsilon_{knl} (\partial_{[\gamma} \hat{R}_{kn\alpha\beta]} + \hat{R}_{mn[\alpha\beta} \Omega_{\gamma]km} + \hat{R}_{km[\alpha\beta} \Omega_{\gamma]nm}) = \\ & = \partial_{[\gamma} \hat{F}_{l\alpha\beta]} + 2\varepsilon_{knl} \hat{F}_{k[\alpha\beta} \hat{A}_{n\gamma]} = 0. \end{aligned}$$

Для формирования дивергенции тензора напряженности, входящего в уравнение поля, требуется свертка по индексам α, γ ; такая свертка приводит к равенству (свободный координатный индекс также поднят метрикой)

$$\partial_{\alpha} \hat{F}_j^{\alpha\beta} + 2\varepsilon_{jkn} \hat{F}_k^{\alpha\beta} \hat{A}_{n\alpha} + \partial_{\alpha} \hat{F}_j^{\beta\alpha} + 2\varepsilon_{jkn} \hat{F}_k^{\beta\alpha} \hat{A}_{n\alpha} = 0, \quad (147)$$

которое в силу антисимметрии $\hat{F}_j^{\alpha\beta} = -\hat{F}_j^{\beta\alpha}$ подтверждает свой тождественный характер. Однако легко заметить, что уравнение (128), вводимое для поля Янга–Миллса как калибровочное и записанное в векторных кватернионных компонентах

$$\partial_{\alpha} F_j^{\alpha\beta} \mathbf{q}_j + F_{[k}^{\alpha\beta} A_{n]\alpha} \mathbf{q}_k \mathbf{q}_n = 0 \rightarrow \partial_{\alpha} F_j^{\alpha\beta} + 2\varepsilon_{jkn} F_k^{\alpha\beta} A_{n\alpha} = 0,$$

в точности эквивалентно исчезновению любой «половины» тождества (147). Это наблюдение представляется весьма нетривиальным.

Таким образом, сравнивая «невариационное» происхождение двух разных теорий – гравитационного поля и поля Янга–Миллса, можно отметить, что обе теории связаны с тождеством Бьянки. Свертка по «симметричным» индексам

этого тождества, записанного для риманова пространства, приводит к сохранению тензора Эйнштейна, порождая (до взятия ковариантной дивергенции) геометрическую вакуумную теорию гравитации. Но равенство нулю «половины» тождества Бьянки, записанного для пространства с кватернионной неметричностью и свернутого по антисимметричным индексам, есть в точности вакуумное уравнение поля Янга–Миллса. Понятно, что включение источника отменяет исчезновение «половины» тождества Бьянки.

Завершая этот раздел, следует напомнить, что правило умножения кватернионных единиц форм-инвариантно относительно преобразований полной спинорной группы $SL(2\mathbb{C})$. Это обстоятельство открывает возможность построения более общей «теории Янга–Миллса» в таких кватернионных пространствах, неметричность которых имеет комплексные компоненты. Однако развитие подобной теории требует специального исследования, выходящего за рамки данной работы.

Заключение

В предложенной работе представлены примеры обнаружения в «гиперкомплексной среде» формул известных физических законов, составляющих суть возникших на базе опытных данных теорий, таких как классическая механика и электродинамика, либо явившихся результатом физико-математической эвристики («гениального озарения»), среди них – теория относительности, квантовая механика, теория Янга–Миллса. Не все найденные гиперкомплексные формулы абсолютно совпали с традиционной записью известных законов. Так, в уравнении Гамильтона–Якоби оказалась выделенной нехарактерная для классики дополнительная часть микромасштабного взаимодействия, а мир теории относительности, дающей те же результаты, что и теория Эйнштей-

на, оказался не четырехмерным, а шестимерным. Впрочем, не исключено, что такого рода «поправки», возникающие в чисто математическом выводе известных соотношений, не «портят картину», а, наоборот, уточняют то, что в традиционных методах формулировки закономерностей могло быть упущено. Конечно, это предположение должно быть по возможности проверено на опыте.

Но есть еще одна, как представляется, наиболее существенная особенность «отражения физики» в математике гиперкомплексных чисел, имманентно связывающая все вышеизложенные примеры и факты. Она состоит в возможности исследования почти всех соотношений, свойственных физическим взаимодействиям, с позиций фундаментальной поверхности, свойства которой достаточно подробно описаны в разделе 2 и которая явилась логической основой вывода базовых спинорных уравнений – уравнения квантовой механики и уравнения Гамильтона–Якоби. Насколько известно автору данной работы, анализ уравнений физики, допускающих такого рода «предгеометрическое погружение», ранее не проводился, но он представляет безусловный интерес и, возможно, окажется плодотворным.

Литература

1. Кантор И.Л., Солодовников А.С. Гиперкомплексные числа. М.: Наука, **1973**.
2. Hamilton W.R. The mathematical Papers of William Rouan Hamilton. App. 3, Vol. 3, Cambridge: CUP (1967). [См. также: Гамильтон У. Избранные труды. М.: Изд. Наука, **1994**]
3. Cayley A. On Jacobi's elliptic functions, in reply to the Rev. B. Brounin; and on quaternions. Philosophical Magazine. V. 26. P. 208–211, **1845**.

4. Conway J.H., Smith D.A. On Quaternions and Octonions: Their Geometry, Arithmetic, and Symmetry. A.K.Peters Ltd., Natick, Massachusetts, **2003**.

5. Cockle J. A new imaginary in algebra. London–Edinburgh–Dublin Philosophical Magazine. Vol. 33. No. 3. P. 345–349 (**1848**).

6. Clifford W.K. Mathematical Works, London, R. Tucker, ed., Macmillan (**1882**).

7. Fjelstad P. Extending special relativity via the perplex numbers. American Journal of Physics. Vol. 54. No. 5. P. 416–422 (**1986**).

8. Band W. Extending relativity via the perplex numbers. American Journal of Physics. Vol. 56. No. 5. P. 469–470 (**1988**).

9. Study E. Geometrie der Dynamen, Leipzig, Tuebner B.G. (**1903**).

10. Yaglom I.M. A simple non-Euclidean geometry and its physical basis, New York, Springer Verlag (**1979**).

11. Kisil V.V. Erlangen Program at Large – 2: Inventing a Wheel. The Parabolic One. URL: arXiv:0707.4024v1 [math.GM] 27 Jul (**2007**).

12. Hamilton W.R. Lectures on Quaternions, Royal Irish Academy (**1853**).

13. Yefremov A.P. Quaternions and Biquaternions: Algebra, Geometry and Physical Theories. URL: arXiv:math-ph/0501055 v1 25 Jan. **2005**.

14. Rastall P. Quaternions in relativity. Rev. Mod. Phys. Vol. 2. P. 820–832 (**1964**).

15. Yefremov A.P. Quaternion Model of Relativity: Solutions for Non-Inertial Motions and New Effects. Adv. Sci. Lett. Vol. 1. P. 179–186 (**2008**).

16. Yefremov A.P. Structure of Hypercomplex Units and Exotic Numbers as Sections of Bi-Quaternions. Adv. Sci. Lett. Vol. 3. P. 537–542 (**2010**).

17. Yefremov A.P. Splitting of 3d Quaternion Dimensions into 2d-Cells and a "World Screen Technology". *Adv. Sci. Lett.* Vol. 5. No. 1. P. 288–293 (2012).

18. Wheeler J.A. Pregeometry: motivations and prospects. A. R. Marlov (ed.), *Quantum Theory and Gravitation* (New York, Academic Press). P. 1–11, 1980.

19. Yefremov A.P. Fundamental Properties of Quaternion Spinors. *Gravit. and Cosmol.* Vol. 18. No. 3. P. 188–195 (2012).

20. Yefremov A.P. The Conic-Gearing Image of a Complex Number and a Spinor-Born Surface Geometry. *Gravit. and Cosmol.* Vol. 17. No. 1. P. 1–6 (2011).

21. Пенроуз Р. Структура пространства-времени. М.: Изд. Мир, 1972.

22. Gsponer A., Hurni J.-P. Quaternions in mathematical physics (2): Analytical bibliography, Independent Sci. Research Inst. Oxford, OX4 4YS, England; arXiv:math-ph/0510059v4, 2008.

22. Ефремов А.П. Кватернионные пространства, системы отсчета и поля. М.: Изд. РУДН, 2005.

23. Yefremov A.P. Quaternions: algebra, geometry and physical theories. *Hypercomplex Numbers in Geometry and Physics*. No. 1. P. 104–119 (2004).

24. Sommerfeld A. *Atombau und Spectrallilien* (Friedr., Vieweg und Sohn, Braunschweig), 1951.

25. Bohm D. A Suggested Interpretation of the Quantum Theory in Terms of "Hidden" Variables. I. *Phys. Rev.* Vol. 85. P. 166–179 (1952).

26. Yefremov A.P. Quaternionic Multiplication Rule as a Local Q-Metric. *Lett. Nuovo. Cim.* Vol. 37. № 8. P. 315–316 (1983).

27. Бранец В.Н., Шмыглевский И.П. Применение кватернионов в задачах ориентации твердого тела. М.: Наука, 1973.

28. Yefremov A.P. Bi-quaternion Square Roots, Rotational Relativity, and Dual Space-Time Intervals. *Gravit. and Cosmol.* Vol. 13. No. 3 (51). P. 178–184 (2007).

29. Ландау Л.Д., Лифшиц Е.М. Теория поля. М.: Изд. Наука, 1973.

30. Tomas L.H. The Kinematics of an Electron with an Axis. *Philosophical Magazine.* Vol. 3. No.7. P. 1–13 (1927).

31. Taylor E.F., Wheeler J.A. *Space-Time Physics.* San Francisco, London, W.H. Freeman & Co., 1966.

32. Misner Ch.W., Thorn K.S., Wheeler J.A. *Gravitation.* San Francisco, W.N. Freeman & Co., 1973.

33. Yefremov A.P. Relativistic Warning to Space Missions Aimed to Reach Phobos. *Int. Journal of Astron. and Astrophys.* Vol. 1. No. 4. P. 200–203 (2011).

34. Sharpless B.P. Secular acceleration in the longitudes of the satellites of Mars. *Astron. J.* Vol. 51. P. 185–186 (1945).

35. Wilkins G.A. Meeting of Royal Astronomical Society. *The Observatory.* Vol. 90. No. 976, P. 37–38 (1970).

36. Wilkins G.A., Sinclair A.T. The dynamic of the planets and their satellites. *Proc. R. Soc. Lond.* Vol. A 386. P. 85–104 (1974).

37. Shor V.A. The motion of the Martian satellites. *Celestial Mechanics.* Vol. 12. P. 61–75 (1975).

38. Anderson J.D., Laing P.A., Lau E.L., Liu A.S., Nieto M.M., Turyshev S.G. Indication, from Pioneer 10/11, Galileo, and Ulysses Data, of an Apparent Anomalous, Weak, Long-Range Acceleration. *Phys. Rev. Lett.* Vol. 81. P. 2858–2862 (1998).

39. Yefremov A.P. Gravitational Contributions to Pioneer Space Probe Decelerations and Time-Delay-Doppler “Relativistic Confusion. *Gravit. and Cosmol.* Vol. 15. No. 2. P. 121–128 (2009).

40. Yefremov A.P. Notes on Pioneer Anomaly Explanation by Sattellite-Shift Formula of Quaternion Relativity. *Progress in Physics.* Vol. 2. P. 93–96 (2007).

41. URL: <http://cohoweb.gsfc.nasa.gov/helios/book2/book2.html>

42. Turyshev S.G., Toth V.T., Ellis J., Marcwardt C.B., Support for Temporary Varying Behavior of Pioneer Anomaly from the Extended Pioneer 10 and 11 Doppler Data Sets, arXiv: 1107.2886v1 [gr-qc] 14 Jul **2011**.

43. Yefremov A.P. Solutions of Dynamic Equations in Quaternion Model of Relativity. Adv. Sci. Lett. Vol. 3. P. 236–240 (**2010**).

44. Horrobin M., Eisenhauer F., Tecza M., Thatte N., Genzel R., Abuter R., Iserlohe C., Schreiber J., Schegerer A., Lutz D., Ott T., Schodel R. First results from SPIFFI. I: The Galactic Center. Astron. Nachr. V. AN 325. P. 88–91 (**2004**).

45. Fueter R. Über die analytische Darstellung der regulären Funktionen einer Quaternionenvariablen I. Comm. Math. Helv. Vol. B9. P. 320–334 (**1936–1937**).

46. Шнеерсон М.С. Кватернионная аналитичность и об одной реализации представлений группы Лоренца. Известия вузов. Физика. Т. 11–82. С. 73–79 (**1982**).

47. Moisil G.C. Sur les quaternions monogenes. Bull. Sci. Math. Vol. 55. P. 168–174 (**1931**).

48. Ramond P. Field Theory. A Modern Primer The Benjamin / Cumming Publishing Co., ABPR Massachusetts, **1981**.

49. Huang K. Quarks, Leptons and Gauge Fields. World Scientific Publishing Co., **1982**.

Раздел 2

**ГЕОМЕТРИЗАЦИЯ НЕНАБЛЮДАЕМЫХ
И ОБЩАЯ ТЕОРИЯ МЕХАНИКИ**

В сознании человека физика и геометрия связаны неразрывно. В первую очередь потому, что так выстроена биологическая система человеческого восприятия и познания мира: из всех сенсорных устройств, обеспечивающих связь с внешней средой, самым мощным у здорового человека является зрение, которое передает в сознание формы, то есть геометрию, окружающих объектов. Пожалуй, и осязание немало добавляет к этому восприятию представление о материальности составляющих мира. И это всего лишь на бытовом уровне, который, впрочем, является базовым для зарождения и развития любой науки, в том числе и физики.

О картах и формулах

Но если уж говорить собственно о физике, причем физике любого уровня развития, включая самые точные измерения последних десятилетий, то здесь геометрия – уже в иной ипостаси – выходит на передний план. Я уже высказывался ранее на эту тему, но повторюсь: сегодня все виды физических измерений на их конечном этапе сводятся исключительно к измерению длины. Имеется в виду, конечно, не собственно объект измерения – скорость частицы, напряженность силового поля или что-то иное – а непосредственный акт считывания показаний со шкалы прибора, даже в цифровом формате. Хотя можно было бы на слух определять частоту звукового сигнала, на ощупь определять температуру тела, по запаху или на вкус – долю вещества в той или иной смеси. Но мы этого не делаем, потому что «первое чувство» – зрение оказывается самым точным инструментом измерения.

Есть еще один аспект геометризации физических объектов и сущностей, точнее, даже не геометризации, а визуализации, возможности увидеть. Увидеть – значит лучше понять, хотя это не всегда верно. Но, во всяком случае, иметь изображение объекта – значит иметь возможность много-

кратно его рассматривать, анализировать, вникать в его сущность – но не только! Визуальное изображение существенно упрощает процесс передачи знания о данном объекте другим людям; без метода изображения существенно затрудняются процессы образования, фактически становится невозможной наука как явление общественное.

В качестве известного примера можно вспомнить, что изображение местности на одном листе современной топографической карты по количеству информации эквивалентно многостраничному тому, содержащему адекватное описание содержания такой карты. Понятно, однако, что топографические изображения значительно отличаются от реальных объектов, поскольку они в подавляющем большинстве имеют условный характер, и нужно иметь надлежащий опыт расшифровки, чтобы видеть в них натуральные черты изучаемой местности. Впрочем, обретение такого опыта – процесс недлительный и весьма не сложный. Гораздо больше труда и времени занимает получение куда более глубокого навыка «расшифровки картинок» – речь идет о понимании сути, заложенной в других криптограммах – математических формулах.

Оставаясь в рамках темы, будут рассматриваться только формулы, описывающие физические законы, – те, об относительной точности которых люди более или менее договорились. Хотя на каком-то уровне рассуждений придется уйти в «метафизическую математику». Действительно, «хорошая» формула закона физики содержит в себе огромный объем информации. Так, одно из «наиболее концентрированных» выражений законов электродинамики $d^*da = j$, записанное в формализме дифференциальных форм, в тысячи раз короче изначальных развернутых формул тех же законов, впервые записанных Максвеллом во второй половине XIX в. Если же сравнивать с той же топографической картой уравнение Шредингера (длиной в четверть строки), то рядом с десятками и сотнями томов его описаний, решений и обсуж-

дений одна книжка описания карты представляется бесконечно малой. Но об этом уравнении ниже.

Если задуматься, то математическое содержание (проверяемого на опыте) закона физики, записанное, как правило, в буквенных выражениях, тоже представляет собой не что иное, как зашифрованное геометрическое изображение, своего рода иероглиф, понимание сути которого доступно только носителям соответствующего специфического знания. Понятно, конечно, что «шифровальщики» – изобретатели символьного языка математики – представители земной цивилизации. Они предложили свои методы, термины и форматы записи и с годами «победили в конкурентной борьбе»: не флюксии Ньютона, но бесконечно малые Лейбница, не индийские, но арабские цифры, наконец, не египетские и не китайские иероглифы и даже не русские, но латинские и греческие буквы. Что же касается самой сути математических соотношений, то она оказывается универсальной для всего человечества, независимо от региональной или этнической принадлежности его групп.

Но вернемся к анализу формул – «геометрических картинок» законов физики. Из столетия в столетие история науки демонстрирует все большее внешнее упрощение, примитивизацию этих записей. Иногда говорят, что физикотейоретики редуцируют многостраничные системы своих уравнений к максимально компактным выражениям исключительно из соображений «наименьшего действия» (попросту – из-за лени). Возможно, здесь есть доля истины, но главное – другое, и это хорошо известно. Возможность компактификации уже известных и проверенных опытом формул позволяет «подняться над ползучей эмпирикой» и с высоты увидеть незамеченную в разрозненных записях новую общую закономерность. Так, Мопертюи в XVIII в. обнаружил, что эмпирический закон динамики Ньютона является следствием минимального значения функционала действия – введенной им некой абстрактной величины. С тех давних пор

сотни тысяч публикаций уважаемых авторов в не менее уважаемых печатных изданиях посвящены тысячам «новых законов физики», у каждого из которых – свое персональное действие, придуманное автором. Другая знаменитая цепочка физических открытий за письменным столом: уравнения Максвелла, объединившие разрозненные законы электричества и магнетизма, – преобразования Лоренца, обеспечивающие инвариантность этих уравнений, – интервал пространства-времени, столь же лоренц-инвариантный и приведший к теории относительности Эйнштейна.

С того момента, когда у теоретиков стала получаться компактификация длинных формул, описывающих физические процессы и явления, началась эпоха открытия законов физики не за пультом экспериментальной установки, а над чистым листом бумаги, но притом – в глубинных недрах математики. Эксперименты ставили уже потом, чтобы подтвердить или опровергнуть теоретическое предсказание.

Возможно, это личное ощущение, но мне представляется, что тщательное изучение, даже просто осознанное наблюдение формулы «хорошего» физического закона («визуальный контакт» с ним) является одним из мощнейших инструментов «геометризации» физики в сознании исследователя. Такой визуальный контакт обнаруживает ассоциативные связи с иными математическими сущностями, может быть, виртуальными, еще не выраженными формально, но объективными и, как затем оказывается, – логически совершенными. Не знаю, насколько точно удастся передать этот процесс получения новых аналитических конструкций посредством интеллектуального – но вместе с тем и интуитивного – погружения в математическую среду, но по опыту можно утверждать, что поиск новых связей математики и физики путем «настройки информационной антенны» исследователя оказывается весьма эффективным и притом не слишком загадочным [1].

О гравитации и кривизне

Теперь несколько слов собственно о геометризации физических сущностей. Наиболее известный и широко обсуждаемый пример – гравитационное взаимодействие. Базируясь на гипотезе эквивалентности инертной и гравитирующей массы тела, Эйнштейн обнаружил, что в рамках созданной им теории относительности гравитационные силы могут интерпретироваться как следствие искривленности четырехмерного пространства-времени. Решения соответствующих уравнений эйнштейновской теории гравитации позволили объяснить и предсказать несколько кинематических эффектов движения планет, частиц света, динамики Вселенной, конечно, с определенной степенью точности и с целым рядом существенных упрощений, сегодня уже неудовлетворительных с точки зрения некоторых наблюдательных данных. Не будем приводить здесь аргументы в пользу введения новых сущностей типа темной материи и темной энергии и затрагивать тему противоречий общей теории относительности (ОТО) и квантовой теории поля. Тем не менее теория гравитации Эйнштейна была, в известной степени, успешной, безусловно революционной, а главное – являла собой широкое поле для исследований. Все это, наряду с завораживающей красотой математики и экзотическими решениями, вызвало волну энтузиазма у нескольких поколений физиков, которые по ходу дела свято поверили в реальную кривизну мира.

Выскажу свое мнение на этот счет. Модель гравитации как кривизны, конечно, весьма привлекательна, но, скорее, как идея, нежели как физическая сущность. В чем смысл такого сомнения? Полезно вспомнить, что три известных опытных подтверждения состоятельности ОТО – смещение перигелия Меркурия, отклонение луча света в поле массивного тела и гравитационное красное смещение – следуют из решения Шварцшильда, описывающего эйнштейновскую гравитацию сферически симметричного тела в виде диаго-

нальной метрики. При этом потенциал классического ньютоновского закона «всемирного тяготения» в приближении слабого поля (в котором и рассчитываются все вышеперечисленные эффекты) входит как удвоенная величина в выражение временной компоненты метрического тензора пространства-времени. Следует подчеркнуть: знакомый из школьных учебников потенциал гравитации содержится в компоненте метрики, связанной с координатой геометрического времени.

Возникает два вопроса. Первый: существует ли геометрическое время как физическая сущность? Второй: есть ли иной «геометрический способ» прийти к метрике с переменными коэффициентами и аналогичному выражению для гравитационного потенциала?

Обсуждая вопрос номер один, полезно вспомнить, что сам Эйнштейн в статье 1905 г., где, по сути, сформулирована специальная теория относительности, о геометрии не упоминает; четырехмерное пространство-время – это продукт Минковского. Но Минковский включил в свою геометрическую схему не просто временную координату, а мнимую временную координату. Говорят, что тем самым он всего лишь хотел сохранить знакопостоянную метрику – типа метрики Евклида, но в мире с большим числом измерений. Но скорее всего, Минковский сомневался в том, что время можно рассматривать как физическую сущность, и свою четырехмерную модель мира считал лишь моделью. Только позднее (вначале для удобства) евклидова метрика пространства-времени была заменена индефинитной, а координата времени – реальной переменной. Представляется, что именно этот чисто технологический шаг надломил барьер традиционно приземленного представления о физических объектах в психологии научных работников последующих лет; гравитационно-геометрия искривленного пространства-времени добавила к этому разрушительному процессу, а еще чуть позже квантовая теория успешно добила физическое рацию физиков-

теоретиков. (К слову сказать, сегодня никого из гравитационистов уже не смущают ни мнимые массы, ни отрицательные давления, ни замкнутые временноподобные линии – изучается и публикуется всё подряд; кризис жанра). Впрочем, я глубоко и искренне верю в известное лукавство высокоумных.

Но вернемся к вопросу о геометрическом времени. Проживая в реальном мире, приходится заботиться о способах измерения его составляющих. Время измеряется двумя типами процессов: циклическим и линейным. С циклическим типом ясно: задается эталонный процесс, с которым сравниваются все иные. Что же касается второго типа, то новая возможность линейного измерения времени (помимо гномон и водяных часов) появилась с введением электродинамической постоянной (по результатам опытов Вебера), идентификацией ее со скоростью света и эйнштейновским постулатом о ее фундаментальности. При этом значения интервала времени появляется как величина производная, полученная от деления измеренной пространственной длины на фундаментальную скорость. Это нормальный приземленный подход (хотя в реальности и не всегда осуществимый). Но вот варианты непосредственного измерения отрезка временной координаты что-то не припоминаются; так что наличие времени как физической сущности вызывает сомнение. Следует отметить, что эта точка зрения уже не раз обсуждалась со всеми возможными аргументами (см., например, статью [2], а также видеозапись доклада [3]). А прямым следствием проблем с координатой времени является проблема с соответствующими метрическими коэффициентами. Впрочем, не известны методы физического детектирования и переменности пространственных (тем более смешанных – пространственно-временных) компонент метрики, ибо все заключения о физической кривизне мира являются косвенными, так как сводятся к анализу геометрии (в том числе девиации) автопараллельных линий.

Здесь можно было бы перейти к заданному выше второму вопросу. Однако ответ на него будет дан в самом конце этой работы (перед заключением), и этот ответ неожиданно оказывается положительным. Такой вывод следует после внимательного изучения криптограмм давным-давно известных формул законов физики (в том числе квантовой механики) и едва ли не всецелого погружения в математическую среду. Но сначала – о неожиданных свойствах самой математической среды.

О геометризации ненаблюдаемых

С квантовой механики и начнем. Хорошо известно, что это – странная теория. Из физического мира, допускающего измерение, в ней остаются только характеристики частицы – масса, заряд, спин. Присутствующие же в уравнениях привычные пространственные координаты и параметр времени оказываются едва ли не чужеродными, поскольку в квантовой механике нет представлений о положениях частицы, ее скорости, ускорении и траектории – всем том, что является предметом формулировки и решения «приемлемых здравым смыслом» задач классической механики. Необходимо акцентировать внимание также на том, что в квантовой механике нет и понятия силы, действующей на частицу, вместо нее в уравнение существенным образом входит внешний потенциал, то есть энергия, в физическом пространстве, как известно, непосредственно не измеряемая (следовательно, не наблюдаемая). Но самая удивительная и загадочная величина – та, что в идее описывает частицу, вернее, некоторое ее «состояние», зная которое, можно некоторым образом найти все кинематические характеристики. В процессе осмысления эвристически возникшей абстрактной квантовой механики был предложен ряд интерпретаций «функции состояния», но ее смысл и до сегодняшнего дня вызывает споры. Дело в том, что при вычислении наблюдаемых физических величин

(то есть таких, которые можно измерить в трехмерном пространстве) приходится пользоваться своего рода квадратичными комбинациями этой функции, а такие фрактальные объекты – «корни квадратные» из обычной длины – ранее физике были чужды.

Была еще одна загадка. Базовое уравнение квантовой механики – уравнение Шредингера – внешне оказалось весьма похожим на уравнение Гамильтона–Якоби, одно из основных уравнений классической аналитической механики, содержащее в себе всю достаточную информацию о механике физического тела. Но, несмотря на явное сходство, «родственные связи» этих двух уравнений не просматривались, поскольку закон классической механики никак не получался из квантово-механического (см., например, [4]). В частности, и потому, что функция состояния квантовой механики непременно должна быть комплексным числом (точнее, комплексной функцией действительных переменных).

И если сделанные здесь предыдущие замечания связаны с поверхностным «осмыслением криптограммы» – анализом формата и содержания элементов уравнения Шредингера, то факт безусловной комплексности функции состояния перенаправляет вектор поиска в сущностную сферу математической среды ненаблюдаемых величин.

Дело в том, что возникшее в XVIII в. представление о мнимых (и комплексных) числах никак не связано с *наблюдаемой геометрией*, то есть оно не является отражением в сознании человека материального мира, но есть продукт «чистого разума». Отдавая себе отчет в том, что комплексные числа весьма необычны и желая представить их в наглядной форме, уже первые исследователи нашли их простые образы на поверхности – комплексной плоскости и сфере (Римана). Тем самым – для удобства понимания, или под влиянием императива «максимального расширения мысли» – был осуществлен акт геометризации логической структуры, никак не следующей из окружающего мира. Последствия

этого пионерского акта оказались еще более неожиданными. Проведенный уже в XXI в. анализ структуры комплексного числа, представленного не в традиционной «скалярной», а в простейшей матричной форме, выявил еще один его геометрический образ, имеющий вид так называемой конической пары. В этой модели комплексное число и ему сопряженные изображаются в виде двух взаимно перпендикулярных дисков, касающихся своими краями (окружностями) в одной точке и имеющими возможность вращаться на своих осях, также взаимно перпендикулярных и сходящихся к одной центральной точке. При этом поворот одного диска вызывает соответствующий поворот второго (см.: рис. 1, с. 27). Длина оси диска задает модуль числа, записанного в полярной форме, а угол его поворота – аргумент, или фазу, мнимый показатель экспоненты (см., например, [5]).

В целом полученный объект представляет собой локальную область двумерного комплексного пространства – 2D-ячейку, реальное сечение которой (действительная плоскость) задается базисом – парой ортогональных и единичных векторов, направленных вдоль осей дисков. Такой базис называют диадой. При постоянном изменении фазы диски равномерно вращаются, реальные составляющие векторов базиса сокращаются, но возникают их мнимые составляющие, то есть площадка ячейки как бы перекачивается (мерцает) из действительного сектора в мнимый и обратно. Этот «макет» комплексного числа, очевидно, не слишком сложен даже в описании, и его совсем не трудно изобразить. И тем не менее, именно такая 2D-ячейка, как представляется, оказывается одним из базовых визуализируемых объектом как в математике, так и в физике.

Вначале о математике. Рассмотрим простейший случай, когда комплексное число унимодулярно; это означает, что длина оси каждого диска равна единице, то есть концы векторов диады определяют границу 2D-ячейки. Если из векторов одной такой диады построить все простейшие квадра-

тичные комбинации в виде прямых произведений (а таких числовых комбинаций всего четыре), то – теперь внимание! – эти четыре числа оказываются базовыми единицами трех исключительных ассоциативных алгебр: действительных чисел, комплексных чисел и кватернионов. А несколько модифицированных квадратичных комбинаций векторов той же диады представляют собой базовые единицы трех «плохих» ассоциативных алгебр (с делителями нуля) – алгебр двойных чисел, дуальных чисел и, конечно, бикватернионов.

Итак, прозвучало, пожалуй, главное: векторы диады 2D-ячейки – вполне визуализируемого объекта – математически оказываются своего рода «корнем квадратным» (фракталом), извлекаемым из единиц алгебр. Осталось только вспомнить, что три мнимых (векторных) единицы алгебры кватернионов еще со времен Гамильтона ассоциируются с тремя размерностями физического пространства. А если это так, то диаду 2D-ячейки можно рассматривать как фрактал физического пространства.

Однако в общем случае модуль комплексного числа отличен от единицы; тогда прежние квадратичные комбинации векторов диады уже не дают единиц алгебры (возникает метрический дефект). Следствием этого является нарушение правил умножения этих алгебр, а 2D-ячейка оказывается конформно растянутой. Однако визуальный образ комплексного числа – «коническая пара» – при этом не искажается, а преобразуется изометрически, с одинаковым удлинением осей каждого диска. Это наблюдение подсказывает простой способ устранения метрического дефекта, для этого нужно так «подредактировать» линейный масштаб картинки, чтобы с позиции наблюдателя «квадраты» векторов диады оставались единичными.

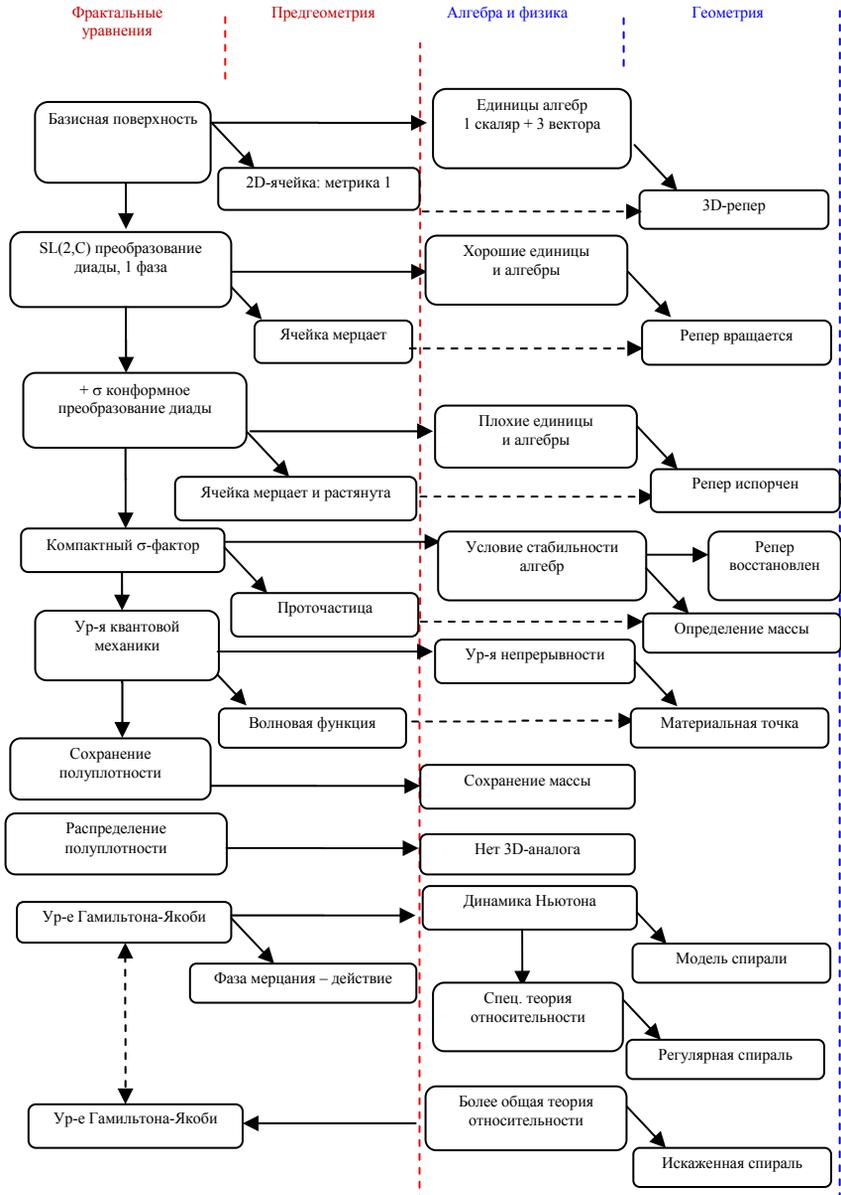
Ключевые слова здесь – с позиции наблюдателя; наблюдатель может находиться только в некотором внешнем по отношению к 2D-ячейке мире, в частности в физическом трехмерном пространстве. Условие «редукции масштаба»

оказывается очень простым: это нормализованный на единицу интеграл квадрата функции растяжения ячейки, определенный по объему внешнего пространства. И если этот интеграл есть функция свободного параметра, то единицы алгебр остаются таковыми «навечно» (в смысле параметра), когда подынтегральное выражение удовлетворяет уравнению типа непрерывности, включающему произвольный «вектор движения» 2D-ячейки во внешнем пространстве. Задача решена: хотя при растяжении 2D-ячейки метрический дефект «внутренне» существует, но, с точки зрения наблюдателя, во внешнем пространстве он «сглаживается», остается незаметным. Существенно, что все величины, входящие в обсуждаемые соотношения, как и сами эти соотношения, являются чисто математическими; они никак не связаны с физикой, только с геометрическими и алгебраическими сущностями, поэтому все величины здесь безразмерны (не измеряются ни в каких физических единицах).

Но метафизическая взаимосвязь геометрии и физики такова, что описанные выше чисто математические манипуляции с ненаблюдаемыми субгеометрическими объектами, направленные, главным образом, на «сохранение масштаба картинки», неожиданно оказываются исходными позициями «общей теории механики», в которой логически последовательно возникают все известные до настоящего времени уравнения – квантовой, классической и релятивистской механики частицы.

Не перегружая читателя проблемами расшифровки, вероятно, незнакомых ему криптограмм математических формул, сделаем попытку в словесной форме, но, по возможности, внятно представить логическую линию и основные пункты теории, неожиданно возникшей из попытки представить визуальный образ ненаблюдаемых объектов. Тем же, кто заинтересуется строгими математическими формулировками, порекомендую статью [6].

Логическая карта «общей теории механики»



Общая теория механики в тезисах

Представленное здесь (пока не окончательное) словесное изложение теории содержит основные разделы (обозначены римскими цифрами), этапы развития теории (обозначены символами S-№) и главные пункты (обозначены символами P-№). Описанные выше начальные, чисто математические этапы развития теории вошли в данное изложение в пунктах S-1–S-7.

I. ПРЕДГЕОМЕТРИЧЕСКАЯ 2D-ЯЧЕЙКА И УСЛОВИЕ СТАБИЛЬНОСТИ АЛГЕБР

S-1. Структура алгебраических единиц

P-1. Все базовые единицы ассоциативных алгебр чисел действительных, комплексных, двойных, дуальных и (би)кватернионов можно представить как квадратичные комбинации (прямые произведения) векторов одной диады – двумерного базиса, заданного на 2D-ячейке (локальной области) некоторой фундаментальной поверхности.

P-2. Три векторные (мнимые) единицы ассоциативной алгебры максимальной размерности (кватернионов и бикватернионов) геометрически эквивалентны направляющим векторам декартовой системы координат в 3D-пространстве. Скалярная единица (всех вышеназванных алгебр) геометрически эквивалентна метрике плоской 2D-ячейки.

P-3. Если 3D (физическое) пространство и объекты в нем ассоциируются с понятием «геометрия», то фундаментальная поверхность и объекты на ней (в том числе, 2D-ячейка, диада) могут ассоциироваться с понятием «предгеометрии» (термин Дж.А. Уилера [7]), поскольку «длина» векторов диады есть специфический корень квадратный (фрактал – в смысле дробной размерности) из длины 3D-пространства. С точки зрения 3D-пространства векторы диады являются спинорами.

S-2. Преобразования 2D-ячейки

P-4. Простейшее преобразование $[SU(2)]$ векторов диады приводит к тому, что площадка 2D-ячейки «перекачивается» из реального сектора в мнимый с некоторой фазой; это мерцание не изменяет метрики, но соответствующая 3D-триада поворачивается на угол, равный двойной фазе. 2D-мерцание (следовательно, 3D-поворот) не нарушает размера единиц и правила умножения алгебр.

P-5. Посредством конформного преобразования диады мерцающую 2D-ячейку можно также растянуть; это вносит дефект 2D-метрики, изменяет длину вращающейся 3D-триады, что нарушает правила умножения алгебр.

S-3. Внешнее (абстрактное) пространство и условие стабильности алгебр

P-6. Задание интеграла, нормализующего квадрат диады в объеме некоторого абстрактного M-мерного пространства (в частности, 3D-пространства) сглаживает дефект 2D-метрики, и с точки зрения наблюдателя во внешнем пространстве, восстанавливает единицы и правила умножения алгебр.

P-7. Правила умножения алгебр сохраняются «навсегда» в смысле свободного параметра, если нормализующий интеграл, рассматриваемый как функция этого параметра, постоянен; это «условие стабильности алгебр» приводит к уравнению типа непрерывности, включающему в его дивергентную часть некоторый «вектор движения» 2D-ячейки (propagation vector).

II. ПРЕДГЕОМЕТРИЧЕСКИЕ УРАВНЕНИЯ МЕХАНИКИ

S-4. Варианты вектора движения и предгеометрические эквиваленты условия стабильности

P-8. Вариант 1. Если вектор движения 2D-ячейки – градиент фазы мерцания, то уравнение непрерывности распадается на два комплексно-сопряженных спинорных урав-

нения, каждое из которых является математическим эквивалентом уравнения Шредингера (уравнение 1).

P-9. Вариант 2. Если вектор движения, кроме градиента фазы, включает векторное поле, то уравнение непрерывности распадается на два эрмитово-сопряженных спинорных уравнения, каждое из которых является математическим эквивалентом уравнения Паули (уравнение 2).

P-10. Вариант 3. Если абстрактное пр-во является 3D-сечением 4D-пространства с метрикой Минковского, то из уравнения непрерывности следует спинорное уравнение типа уравнения Клейна–Гордона (уравнение 3).

S-5. Физические единицы и уравнения квантовой механики

P-11. Для перехода к физике внешнее пространство считается 3D физическим пространством, а поскольку все математические уравнения и величины безразмерны, вводятся (микро) стандарты физической длины и времени. За единицу длины принята комптоновская длина волны (постоянная Планка, деленная на массу электрона и скорость света), единицу времени – та же длина волны, деленная на скорость света.

P-12. Функция конформного растяжения 2D-ячейки трактуется как «относительная полуплотность массы» (фрактальная плотность), тогда в принятых физических единицах нормализующий интеграл приобретает смысл определения массы частицы.

P-13. Чисто математические уравнения 1, 2 и 3 в физических единицах становятся в точности уравнением Шредингера, Паули и Клейна–Гордона; из последнего разными способами можно получить фрактальные уравнения типа уравнения Дирака.

S-6. Разделение действительной и мнимой частей математического уравнения 1

P-14. Разделение уравнения 1 на действительную и мнимую части приводит к системе, аналогичной системе

уравнений Бома [8]. Если при изменении аргументов все функции этой системы изменяются «одинаково быстро», то в физических переменных эта система эквивалентна уравнению Шредингера.

P-15. В особом случае, когда функция растяжения диады изменяется быстро («внутри» 2D-ячейки), а фаза мерцания изменяется медленно («вне» 2D-ячейки, в лаборатории), действительная часть системы Бома становится математическим эквивалентом уравнению сохранения массы, а мнимая часть системы распадается на статическое уравнение распределения фрактальной плотности и математический эквивалент уравнения Гамильтона–Якоби (уравнение 4).

P-16. Формат уравнения 4 с необходимостью предполагает, что математическим эквивалентом функции действия классической механики является фаза мерцания 2D-ячейки. Тогда в физических переменных уравнение 4 в точности становится уравнением Гамильтона–Якоби.

III. ГЕОМЕТРИЧЕСКИЕ УРАВНЕНИЯ МЕХАНИКИ КАК СЛЕДСТВИЯ ПРЕДГЕОМЕТРИЧЕСКИХ

S-7. Уравнения механики Ньютона

P-17. Фаза мерцания 2D-ячейки вычисляется как функционал на отрезке свободного параметра, подынтегральное выражение которого следует из уравнения 4. Требование минимального значения фазы приводит к чисто математическому «динамическому» уравнению (уравнение 5).

P-18. В физических единицах уравнение 5 становится в точности уравнением динамики Ньютона, подынтегральное выражение функционала становится функцией Лагранжа классической механики частицы, а фаза мерцания оказывается функцией действия, измеренной в единицах постоянной Планка.

S-8. Предгеометрический и геометрический образ частицы

P-19. Предгеометрический образ частицы (проточастица, функция состояния квантовой механики, волновая

функция) – мерцающая растянутая 2D-ячейка; в физических единицах – это 2D-ячейка, фрактальная плотность массы которой при изменении фазы «перекачивается» из действительного сектора в мнимый.

P-20. Соответствующий геометрический (лабораторный) образ частицы – материальная точка (масса в малом объеме с размером стандарта длины), в центр которой встроена триада единичных векторов, способных вращаться; при этом угол поворота триады равен удвоенной фазе мерцания 2D-ячейки; половине угла поворота триады пропорциональна функция действия с множителем в виде постоянной Планка.

S-9. Релятивистская частица и «спиральная версия» специальной теории относительности

P-21. Если частица вращается (с удвоенной частотой мерцания 2D-ячейки) и движется в 3D-пространстве, то точка на ее границе (предельная точка – на половине стандарта длины) описывает спиральную линию. Предельная точка свободной частицы описывает регулярную (правильную) спираль.

P-22. Скорость предельной точки считается всегда максимальной (скорость света); тогда разность квадратов элемента дуги спирали и малого пути частицы есть интервал пространства-времени специальной теории относительности.

P-23. Геометрический смысл интервала в этом случае – элемент длины дуги, описываемой предельной точкой в собственной системе отсчета частицы; если частица свободна, то скорости ее движения и вращения не изменяются, следовательно, длина дуги постоянна (отсюда инвариантность интервала пространства-времени).

P-24. Диаграмма Минковского получается из обсуждаемой модели, если цилиндрическую спиральную линию, описываемую предельной точкой свободной частицы, развернуть на плоскость. Иными словами, спиральная линия оказывается «четвертым» (или временным) измерением тео-

рии относительности; здесь это – пространственная линия, но она действительно дополняет три измерения пространства, в котором задается вектор скорости частицы. Данную версию теории относительности можно назвать “spring theory” (теория пружины).

P-25. Вычисление (из формулы интервала) половины угла собственного поворота частицы (фазы мерцания 2D-ячейки) в физических единицах дает в точности известное выражение для действия релятивистской частицы; при этом спиральность частицы с неизбежностью оказывается левой (триада частицы вращается по правилу левого винта).

S-10. Нерелятивистское приближение и формулы де Бройля

P-26. При переходе к нерелятивистскому пределу из полученной формулы интервала пространства-времени свободной частицы автоматически следуют (выводятся) известные выражения энергии и импульса частицы через постоянную Планка; при этом функция свободной проточастицы оказывается в точности волной де Бройля.

P-27. Как следствие выведенных соотношений классических и квантовых величин энергия покоя свободной частицы оказывается энергией ее собственного вращения.

S-11. Искаженная спираль и «более общая» теория относительности

P-28. Если частица несвободна, то ее предельная точка, очевидно, должна описывать нерегулярную спираль: искривленную и сжатую. Запись линейного элемента такой искаженной спирали приводит к формуле интервала «пространства-времени» с диагональной метрикой, имеющей переменные коэффициенты (как в общей теории относительности). При этом переменность шага спирали (сжатие) описывается временной компонентой, а кривизна траектории (оси спирали) – пространственными компонентами метрики. Динамика частицы в этом случае описывается уравнением экстремальной (геодезической) линии.

P-29. Нерелятивистским приближением формулы первой степени «пространственно-временного» интервала с неизбежностью оказывается классическое уравнение Гамильтона–Якоби (полученное здесь из другой логики) с геометризованным потенциалом внешней силы – частью временной компоненты метрики. Существенно, что здесь геометризованная сила может иметь произвольную природу (не обязательно гравитационную).

Заключение

Сегодняшняя человеческая цивилизация переживает трудные времена. Мир все более и более насыщается информацией самого разнообразного качества, и носителям частных информационных систем все сложнее «отсекать лишнее». Поток научнообразных фантазий, пустых выдумок и чьих-то ночных кошмаров несется с экранов, из наушников, с фундаментальной скоростью пронизывает эфир и летит по оптоволоконным сетям. Как сопротивляться этому нашествию? Какие фильтры позволяют выделить главное в бушующем информационном океане и есть ли вообще в нем фарватер?

Полагаем, что есть и, поскольку здесь речь идет о науке, постараемся остаться в рамках темы. Один из самых надежных, проверенных опытом поколений фильтров – здоровый консерватизм. Действительно, если есть общепринятые, проверенные практикой точки зрения, то зачем что-то еще? Бритва Оккама вот уже 700 лет как срезает никчемные сущности. Что касается физики, то в ней есть безусловные реперные точки – незабываемые законы Ньютона, Максвелла, Больцмана, Эйнштейна, наконец, Шредингера. Все замечательно вычисляется, конструируется и строится, корабли плавают, ракеты летают, связь работает, деньги печатаются. Этого достаточно. А если некие чудаки будут слишком уж

суетиться с новыми идеями, мы им напомним, что у вечного огня великих научных достижений всегда кружились мотыльки. Этот фильтр очень эффективен, но он и безжалостно жесток: консерваторы зря включают в свой список Больцмана. Кроме того, включая такое мышление, мы все откладываем на завтра, а жизнь коротка. Но главное, консерватизм в науке – это уже своего рода религия. Ее основа – научная вера, а на эту тему сказано и написано достаточно.

В современной физике, на мой взгляд, есть и иной фильтр, позволяющий отсеять ошибки и фантазии. Несложно догадаться, что это инструмент математики. Но помимо контрольных функций математика, будучи исключительно идеальной сущностью, расширяет возможности поиска новых физических реальностей. Однако, как и со сложной экспериментальной установкой, с ней следует обращаться осторожно. Она может увести далеко от физической реальности, и иногда (хочется сказать – зачастую) именно это и происходит. Так, на последней Российской гравитационной конференции (Казань, июль 2014 г.), в которой участвовали почти 200 исследователей, я пожелал, чтобы их изыскания непременно подтверждались на опыте. Это пожелание вызвало дружный, хотя и не очень веселый, смех.

Но математика может вести за собой, как нить в лабиринте неизведанного. Именно такой случай тезисно описан в этой небольшой статье. Единая логическая линия, как нить, пронизывает и одновременно связывает между собой все разделы «общей теории механики» – от квантовых и классических спинорных уравнений до физических уравнений механики Ньютона и уравнений динамики релятивистской частицы. Уже немного привыкшего к этой теории автора, тем не менее, до сих пор изумляет сам факт того, что никак не связанные с физикой равенства, призванные сохранить некие фундаментальные свойства геометрических и алгебраических конструкций, оказались не чем иным, как эмпирически открытыми сотни лет назад законами, управляющими объек-

тами физического мира. Конечно, представленная теория в ряде деталей заметно противоречит устоявшимся взглядам, например, в трактовке квантовой волновой функции или исходного объекта теории относительности. Будем надеяться, что консервативное мышление даст этой еретической теории (она же – никчемная сущность) достойный отпор, если, конечно, снизойдет до того, чтобы ее заметить.

Однако некоторые аспекты этой вынырнувшей из математики «универсальной механики», как представляется автору, определенно удались. В числе таких достижений – возможность увидеть ранее загадочные абстрактные (но полезные) объекты в геометрических формах. Среди них, в первую очередь, фундаментальная поверхность и ее нагруженная «полуплотностью» массы ячейка, как куколка в бабочку, превращающаяся в частицу при переходе из фрактального мира в физический. И уж совершенно непредсказуемым оказался следующий из модели такой частицы вариант «спиральной» теории относительности, в которой инвариантность «пространственно-временного» интервала является не эвристическим постулатом, а естественным геометрическим следствием. Следует упомянуть и аналитический вывод серии известных соотношений между классическими и квантовыми величинами. Конечно, эти соотношения получаются только в выбранной системе физических стандартов длины и времени; но это означает, что стандарты выбраны верно: ведь прежде данные соотношения вводились не иначе как предположения.

Наконец теория, пожалуй, впервые дает геометрический образ «главного факела вечного огня великой физики» – функции действия классической механики. Введенная четверть тысячелетия назад, эта сущность до последнего времени оставалась абсолютной математической абстракцией. «Теория механики» утверждает, что абстрактное действие – это половина угла вращения точечной частицы вокруг своей оси; при этом человеку не виден ни размер частицы, ни сама

ось, ни, конечно, сам этот угол вращения. Но теория настаивает, что он есть, и более того, что этот угол, равный функции действия, есть также фаза мерцания совсем уже не видимой фрактальной поверхности, которая также имеет геометрический образ.

Удивительное возникновение известных эмпирических и эвристических уравнений механики из глубин математической среды, аналитический вывод известных соотношений классической и квантовой механики, серия неожиданных геометрических образов абстрактных величин и объектов – все факты, объединившиеся в «общей теории механики», вряд ли можно считать случайным совпадением. Помимо логического заключения на этот счет у автора есть и некое метафизическое ощущение справедливости этого предположения.

А что касается практической пользы этой теории, то она может оказаться ключом к открытию новых представлений и методов, эффективно используемых при построении физико-теоретических моделей. Тогда как резервы пока еще правящего бал метода изобретения лагранжианов, как представляется, практически исчерпаны.

Литература

1. Ефремов А.П. Метафизика кватернионной математики. Метафизика, Век XXI: сб. Т. 2 / под ред. Ю.С. Владимирова: М.: Бином. С. 223–269 (2007).
2. Ефремов А.П. «Природа пространства-времени», Основания физики и геометрии. М.: РУДН. С. 6–22 (2008).
3. Интернет-сайт: URL: http://www.youtube.com/watch?v=UuzkDdNCew4&index=20&list=PLO_mgs762HSBiV SMM6yyZT1_I-XCSImMf
4. Блохинцев Д.И. Основы квантовой механики. Изд. 5-е. М.: Наука. С. 136 (1970).

5. Yefremov A.P. Conic Gearing Image of a Complex Number and a Spinor-Born Surface Geometry. *Gravitation & Cosmology*. V. 17. No 1. P. 1–6 (2011).

6. Yefremov A.P. Structured Relativistic Particle, Helix-Type Minkowski Diagram, and More General Relativity. *Gravitation & Cosmology*. V. 20. No. 3. P. 226–232 (2014).

7. Wheeler J.A. Pregeometry: motivations and prospects. In: A.R. Marlov (ed.), *Quantum Theory and Gravitation* (New York, Academic Press) P. 1–11 (1980).

8. Bohm D. A suggested interpretation of the quantum theory in terms of “hidden” variables. I. *Phys. Rev.* **85**. P. 166–179 (1952).

СОДЕРЖАНИЕ

ПРЕДИСЛОВИЕ	3
--------------------------	---

Раздел 1. ГИПЕРКОМПЛЕКСНЫЕ ЧИСЛА КАК СРЕДА ОБИТАНИЯ ЗАКОНОВ ФИЗИКИ	5
---	---

<i>Введение</i>	7
-----------------------	---

<i>Глава 1. Математическая среда гиперкомплексных чисел</i>	9
---	---

1. Общие сведения о гиперкомплексных числах	9
---	---

2. Предгеометрический базис гиперкомплексных чисел	18
---	----

3. Геометрия кватернионных пространств	31
--	----

<i>Глава 2. Формулы физических законов в гиперкомплексной среде</i>	39
---	----

4. Спинорные уравнения механики	39
---------------------------------------	----

5. Кватернионная версия теории относительности ...	58
--	----

6. Кватернионы и векторные «калибровочные поля»	87
--	----

<i>Заключение</i>	100
-------------------------	-----

<i>Литература</i>	101
-------------------------	-----

Раздел 2. ГЕОМЕТРИЗАЦИЯ НЕНАБЛЮДАЕМЫХ И ОБЩАЯ ТЕОРИЯ МЕХАНИКИ	107
--	-----

О картах и формулах	109
---------------------------	-----

О гравитации и кривизне	113
-------------------------------	-----

О геометризации ненаблюдаемых	116
-------------------------------------	-----

Общая теория механики в тезисах	121
---------------------------------------	-----

<i>Заключение</i>	128
-------------------------	-----

<i>Литература</i>	131
-------------------------	-----

Научное издание

Ефремов Александр Петрович

**ЗАКОНЫ ФИЗИКИ В МАТЕМАТИКЕ
ГИПЕРКОМПЛЕКСНЫХ ЧИСЕЛ
И ОБЩАЯ ТЕОРИЯ МЕХАНИКИ**

Редактор *И.Л. Панкратова*
Технический редактор *Н.А. Ясько*
Компьютерная верстка *Н.А. Ясько*
Дизайн обложки *М.В. Рогова*

Подписано в печать 27.11.2014 г. Формат 60×84/16.
Бумага офсетная. Печать офсетная. Гарнитура Таймс.
Усл. печ. л. 7,91. Тираж 500 экз. Заказ 1656

Российский университет дружбы народов
115419, ГСП-1, г. Москва, ул. Орджоникидзе, д. 3

Типография РУДН
115419, ГСП-1, г. Москва, ул. Орджоникидзе, д. 3, тел. 952-04-41

Для заметок
